





Красноярский
математический центр

Всероссийская конференция,
посвящённая 50-летию ИВМ СО РАН,

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ

18-20 сентября 2024 г.

Материалы докладов

Красноярск – 2024

УДК 538.9+53.09+53.04+539+532
ББК 22.25

Материалы докладов Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвящённой 50-летию ИВМ СО РАН. – Электронные данные. – Красноярск : ИВМ СО РАН, 2024. – 20 Мб ; 255 с. – Режим доступа: https://mdm2024.tilda.ws/#rec796105776. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-6047078-6-9

Содержит статьи по материалам докладов, представленных на Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвящённой 50-летию Института вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, 18-20 сентября 2024 г.

УДК 538.9+53.09+53.04+539+532
ББК 22.25

Издаётся по решению учёного совета ИВМ СО РАН.

Ответственные за выпуск: В. Б. Бекежанова, И. В. Степанова.

ISBN 978-5-6047078-6-9

© Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2024

Организационный комитет:

Председатель
Садовский В. М. – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, Красноярск
Заместитель председателя
Бекежанова В. Б. – д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, Красноярск
Секретарь оргкомитета
Степанова И. В. – д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, Красноярск

Члены оргкомитета:

Андреев В. К. – д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, Красноярск
Гончарова О. Н. – д.ф.-м.н., АлтГУ, Барнаул
Любимова Т. П. – д.ф.-м.н., ИМСС УрО РАН, Пермь
Марчук И. В. – профессор РАН, д.ф.-м.н., НГУ, Новосибирск
Никитин И. С. – д.ф.-м.н., ИАП РАН, Москва
Пухначёв В. В. – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИГиЛ СО РАН, Новосибирск
Фрейдин А. Б. – д.ф.-м.н., СПбПУ, Санкт-Петербург
Шайдуров В. В. – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, Красноярск

Научная тематика конференции предполагает обсуждение актуальных проблем прикладной математики, механики и методов математического моделирования, а также их приложений для описания и прогнозирования природных и технических процессов, протекающих в деформируемых средах. В ходе работы мероприятия будут представлены оригинальные сообщения по следующим научным направлениям:

- Математические модели механики деформируемых сред
- Поверхностные явления. Термокапиллярная и термоконцентрационная конвекция. Магнитные жидкости
- Внутренние волны. Взаимодействие волн с деформируемыми конструкциями
- Фазовые переходы в подвижных средах
- Методы изучения реологических свойств
- Микроструктурные превращения в упруго-пластических средах. Механохимия
- Численные методы механики деформируемых сред.

Всероссийская конференция организована в рамках мероприятий, посвящённых 300-летию Российской академии наук и проводится при поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

СОДЕРЖАНИЕ

Авдейчик Е. В. *Аналитическое и численное исследование равновесных форм жидкости на вращающейся плоскости в поле силы тяжести* 9
Алабужев А. А. *Влияние свойств поверхности на гистерезис газового зажатого пузырька* 12
Андреев В. К., Вахрамеев И. В. *Решение обратной начально–краевой задачи, моделирующей движение двух несмешивающихся жидких сред в трубке* . . 13
Биллер А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л. *Моделирование индуцированных переменным полем колебаний частиц в магнитоактивном эластомере: влияние магнитомеханического гистерезиса* 16
Брацун Д. А., Мизёв А. И., Мошева Е. А., Сираев Р. Р., Шмыров А. В. *Генератор релаксационных колебаний в проточном микроканале* 20
Вирц Р. А. *Осесимметричная модель утилизации диоксида углерода в пороупругой среде* 22
Володько О. С., Лемешкова Е. Н. *Вертикальная структура внутренних сейш в стратифицированном озере* 24
Генова С. Н., Белолипецкий В. М. *Одномерная модель для исследования годовой динамики вечной мерзлоты в районах суши* 25
Гилёв Н. И., Зайцев Д. К. *Численное моделирование автоколебаний в открытой каверне с ламинарным транзитным потоком* 29
Гилёв Н. И., Магденко Е. П. *Нелинейные эффекты при потере устойчивости двухфазных течений с испарением* 34
Гилёв П. В., Папин А. А. *Слабая разрешимость задач двухфазной фильтрации несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде в приближении ячейки Хеле – Шоу* 36
Глухов А. А., Пачева М. Н. *Дисперсионные соотношения для нормальных SH-волн в трансверсально-изотропном слое с разнотипной экспоненциальной поперечной неоднородностью по механическим характеристикам* 38
Гончарова О. Н. *Анализ теоретических и экспериментальных данных в рамках одной задачи испарительной конвекции* 41
Губайдуллин А. А., Болдырева О. Ю., Дудко Д. Н. *Распространение волн давления в пористой среде с трещиновато-пористой зональной неоднородностью* 42
Губайдуллин А. А., Пяткова А. В. *Особенности теплопереноса и течения газа в прямоугольном вибрирующем канале с разнонагретыми стенками* . . 46
Губарева К. В., Ерёмин А. В. *Исследование процесса теплопереноса в пористой среде со структурой ТПМП Неовиуса* 48
Гусева Е. К., Епифанов В. П., Голубев В. И., Петров И. Б. *Упругопластическая модель льда с динамическим разрушением для описания тонкой структуры льда* 51
Данилов П. Д., Голых Р. Н., Шалунов А. В., Хмелёв В. Н. *Численная модель взаимодействия аэрозольных частиц в потенциальном знакопеременном поле скоростей газа* 55

Денисова И. В. *Общий случай фигур равновесия вращающейся двухфазной жидкости* 57
Дёмин В. А., Дёмин Ф. В. *Математическое моделирование левитации капли над гладкой или шероховатой поверхностью за счёт избыточного давления при парообразовании* 62
Дёмин В. А., Дёмина Т. В. *Точные решения и численное моделирование распределения паров кремния в реторте в ходе силицирования пористых углеродных материалов* 68
Доброхотов С. Ю., Ильясов Х. Х., Толстова О. Л. *Эквивалентные источники в поршневой модели о длинных волнах на воде, порождённые пространственно-локализованными смещениями в упругом основании* . . . 71
Дудин Д. С., Келлер И. Э. *Моделирование сульфидно-оксидной коррозии жаропрочного сплава при действии напряжений* 73
Ерофеев В. И., Антонов А. М. *Поверхностные волны Рэлея, распространяющиеся вдоль границ классических и обобщённых континуумов* 76
Жилин А. А., Примаков А. В. *Моделирование параметров газодинамического потока в цилиндрической полости при взаимодействии с внешней набегающей нерасчётной струёй* 84
Золотов О. А., Зализняк В. Е., Золотова О. П. *Вычислительная схема для расчётов взаимодействия проводящей нанопоры с ионным раствором методами молекулярной динамики* 88
Зубров И. Е. *Анализ конвективных режимов в слое испаряющейся жидкости, обдуваемом газовым потоком* 92
Иванова Е. А. *Моделирование электродинамических и термодинамических процессов посредством микрополярного континуума* 93
Иванцов А. О., Любимова Т. П., Хлыбов О. А. *Влияние высокочастотных вибраций на форму капли на твёрдой подложке* 96
Казаков А. Л. *Точные решения в нелинейной параболической модели механики сплошных сред* 97
Кириллов П. И., Шапеев В. П. *Решение одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода методом коллокации и наименьших квадратов с аппроксимацией Паде* 100
Клочков Ю. В., Николаев А. П., Вахнина О. В., Клочков М. Ю. *Упругопластическое деформирование оболочки на основе трёхпольного МКЭ* 102
Князева А. Г., Крюкова О. Н., Анисимова М. А., Чумаков Ю. А. *О построении связанных и двухуровневых моделей синтеза композитов* 106
Конон П. Н., Нестерович С. С. *Влияние внешнего потока на движение слоя вязкой жидкости на вращающемся цилиндре* 109
Кулагина А. Н., Кадыйров А. И. *Экспериментальное определение реологических свойств полимерных растворов* 113
Лавринов В. В. *Цифровой двойник стенда адаптивной системы, эмулирующего фазовые искажения излучения в турбулентной атмосфере* 114
Лавринова Л. Н., Лавринов В. В. *Численная модель датчика волнового фронта Шэка – Гартмана на стенде адаптивной системы* 117

Лапшина К. Ю. *Сравнение характеристик нелинейных поверхностных гравитационных волн* . . . 121
Ласковец Е. В. *Влияние температурного режима на структуру двухслойного течения в горизонтальном канале с учётом испарения* . . . 125
Лемешкова Е. Н. *Спектр краевой задачи, описывающей двумерное плоское термокапиллярное течение в канале* . . . 126
Любимова Т. П. *Влияние вибраций на возникновение термокапиллярной конвекции в двухслойных системах жидкостей с деформируемыми поверхностями раздела* . . . 130
Макаров Е. Е. *Исследование влияния характера испарения на характеристики двухфазных течений в канале в рамках постановки с нулевым расходом жидкости* . . . 131
Максимова А. А., Рыжков И. И. *Сравнительный анализ моделей концентрационной поляризации в установке тангенциальной фильтрации с радиальным течением раствора* . . . 134
Мердеева Я. Р., Кадыйров А. И. *Визуализация течения полимерного раствора в конфузор-диффузорном канале* . . . 138
Найденова К. Е., Сибирякова Т. А., Шишмарёв К. А., Токарева М. А. *Колебания двухслойной тонкой частично пористой среды в контакте с жидкостью* . . . 139
Наседкин А. В., Наседкина А. А. *Численный анализ мостового пьезопреобразователя из пористой пьезокерамики при различных моделях поляризации* . . . 142
Новиков А. Е., Новиков Е. А. *Полуявный алгоритм четвёртого порядка решения жёстких задач* . . . 146
Номбре С. Б., Полянский Д. Д., Сторожев С. В. *Методика нечёткомножественного учёта параметрической неопределённости при исследовании температурных напряжений в тонких протяжённых цилиндрических оболочках* . . . 147
Оглезнева К. Н., Шишмарёв К. А. *Влияние формы ледового покрова на характеристики периодических гидроупругих волн в ледовом канале* . . . 150
Очиров А. А. *Применение теории сингулярных асимптотических разложений к решению задачи о распространении поверхностных периодических течений* . . . 154
Очиров А. А., Трифонова У. О. *Динамика и структура периодических течений в сжимаемой атмосфере* . . . 158
Парфёнова Е. С., Князева А. Г. *Взаимодействие разномасштабных процессов в поверхностном слое твёрдого тела при внешнем импульсном воздействии* . . . 162
Пашковский Д. М. *Уравнение диффузии гиперболического типа для анизотропной сплошной среды* . . . 164
Пекарская Т. А., Сибин А. Н. *Исследование особенностей фазового перехода во влагонасыщенном грунте* . . . 166

Перельмутер М. Н. *Метод граничных элементов в задачах нестационарной термоупругости с трещинами* 170
Петраков И. Е. *Моделирование сечения двухслойного разномодульного композитного материала с упругой прослойкой* 174
Погосян В. Б., Токарева М. А. *Осесимметричная задача динамики роста клеточной ткани* 176
А. В. Примаков[1], Жилин А. А. *Моделирование газового потока резонирующих газодинамических систем в адиабатическом приближении* 178
Рогалёв А. Н. *Исследование устойчивости математических моделей технических систем с возмущающими воздействиями* 181
Роговой А. А., Столбова О. С. *Микроструктурное моделирование поведения сплава Гейслера в магнитных и силовых полях* 185
Роменский Е. И., Пешков И. М. *Гиперболическая термодинамически согласованная модель двухфазного сжимаемого течения с поверхностным натяжением* 187
Садовская О. В., Садовский В. М. *Моделирование волн разрушения на основе уравнений блочной среды* 191
Садовский В. М., Садовская О. В. *О веерном механизме Тарасова образования разломов в земной коре* 195
Салихова Н. К., Дудин Д. С., Келлер И. Э., Петухов Д. С., Максимов А. Б. *Распределение остаточных напряжений в толстолистовой стали при различных режимах термомеханической обработки: расчёт и эксперимент* 198
Сибин А. Н., Пекарская Т. А. *Формирование теплового режима в тающем снеге при объёмном прогреве потоком солнечного излучения* 200
Сибирякова Т. А., Найденова К. Е., Шишмарёв К. А. *Периодические волны в пористой ледовой пластине* 205
Смолехо И. В. *Исследование эффекта ориентационной термоупругости с помощью упрощённой модели нематического жидкого кристалла в акустическом приближении* 207
Смородин Б. Л. *Конвективные течения бинарной смеси в модулированном тепловом поле: нелинейная динамика и зеркально-сдвиговая симметрия* . . 209
Степанова И. В., Зотов И. Н. *О влиянии расхода газа на течение испаряющейся бинарной смеси* 211
Токарева М. А., Папин А. А. *Пороупругая среда, насыщенная двухфазной жидкостью* 214
Уточкин В. Ю., Брацун Д. А. *Конвективная неустойчивость раствора во вращающемся реакторе Хеле – Шоу* 216
Фатьянов А. Г. *Динамическая задача о вдавливании плоского штампа. Метод Зоммерфельда* 218
Фёдорова Н. А. *Создание и управление прочностными свойствами волокнистого композита посредством криволинейного армирования* 222
Фрейдин А. Б. *Локализованные и объёмные химические реакции в связанных задачах хемомеханики* 225

Фурцев А. И. *Задачи о равновесии гиперупругих тел с жёсткими включениями и трещинами с условиями непроникания* 226
Чашечкин Ю. Д. *Лигаменты и внутренние волны в непрерывно стратифицированных средах: теория и лабораторный эксперимент* 227
Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю. *Математическое моделирование динамики, структуры, энергетики и микроэнергетики течений жидкостей и газов* 231
Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Литвинов Д. А. *Исследование напряжений в квадратной мембране под действием куполообразной нагрузки* 235
Шарифулин В. А., Белобородов Ф. С., Шарифулин А. Н., Любимова Т. П. *Границы существования аномального конвективного течения воздуха в квадратной полости с подвижной крышкой* 238
Шмидт А. В. *Приближённое решение для дальней области закрученного турбулентного следа* 241
Шубенков И. С., Любимова Т. П. *Конвекция бинарной смеси с эффектом Соре в наклонном пористом слое под действием вертикального градиента температуры* 242
Litvinov V. L., Litvinova V. K. *Resonance properties of a beam with a moving boundary lying on an elastic foundation* 246
Авторские данные 248

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Е. В. Авдейчик

Белорусский государственный университет, Минск

В работе рассматриваются осесимметричные ограниченные жидкие слои, покоящиеся на верхней стороне плоского горизонтального основания, вращающегося с постоянной угловой скоростью в однородном поле силы тяжести. На границе жидкой и газообразной фаз действует сила поверхностного натяжения, описываемая формулой Лапласа. Таким образом, форма меридианной линии λ на свободной поверхности капли определяется системой уравнений

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = a, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = b, \quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = Hb, \quad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = -Ha, \quad H = \frac{\mathrm{We}}{2}\, r^2 - \mathrm{Bo} z - X + \frac{b}{r}\,, \tag{1}$$

где r, z – безразмерные радиальная и вертикальная координаты соответственно, t – естественный параметр данной кривой λ, $(a,\ b)$ – единичный касательный к λ вектор, направленный в сторону увеличения t, при этом газообразная среда расположена слева при соответствующем обходе контура, H – безразмерная кривизна λ в рассматриваемой точке, We – вращательное число Вебера, Bo – число Бонда, X – безразмерный параметр, представляющий собой константу интегрирования градиента давления в уравнениях Навье – Стокса.

Исследуются три различных типа форм относительного покоя жидкости. Первый тип включает капли с односвязной свободной поверхностью, которую пересекает ось симметрии. Для таких слоёв параметр X имеет смысл суммы безразмерных главных кривизн в центре капли, краевые условия имеют вид

$$r\,(t_{\min}) = 0, \quad a\,(t_{\min}) = 1, \quad b\,(t_{\min}) = 0, \quad z\,(t_{\max}) = 0, \quad a\,(t_{\max}) = \cos\theta, \quad b\,(t_{\max}) = -\sin\theta,$$

где θ – статический краевой угол смачивания. Ко второму типу относятся капли с двусвязной свободной границей и сухой поверхностью подложки в центре. В этом случае

$$z\,(t_{\min}) = z\,(t_{\max}) = 0, \quad a\,(t_{\min}) = a\,(t_{\max}) = \cos\theta, \quad b\,(t_{\min}) = -b\,(t_{\max}) = \sin\theta.$$

Равновесные формы третьего типа представляют собой слои с двусвязной свободной поверхностью и со смоченной границей твёрдой и газообразной фаз в центре диска, что обеспечивает малый внутренний краевой угол. Тогда условия на трёхфазных линиях принимают вид

$$z\,(t_{\min}) = 0, \quad a\,(t_{\min}) = 1, \quad b\,(t_{\min}) = 0, \quad z\,(t_{\max}) = 0, \quad a\,(t_{\max}) = \cos\theta, \quad b\,(t_{\max}) = -\sin\theta.$$

Одни из наиболее ранних результатов, применимых при описании первого и второго типов слоёв в отсутствие силы тяжести, были получены в работе [1], где рассматривался

случай вращающейся невесомой массы жидкости, не контактирующей с подложкой. Свойства капель двух первых типов при наличии силы тяжести были изучены в фундаментальной монографии [2]. Теоретические выводы о рассматриваемых равновесных формах были представлены в статье [3]. Численному исследованию данной задачи при односвязной свободной поверхности посвящены работы [4, 5]. В частности, были определены зависимости между различными характеристиками, установлены критические значения ряда параметров. Аналитическое и экспериментальное исследование первого типа капель осуществлено в статье [6].

В рамках данной работы произведена аппроксимация зависимостей между различными параметрами задачи на основе упрощающих предположений, определены точные допустимые диапазоны значений, которые могут принимать одни характеристики при заданных других. Строго доказаны качественные утверждения о свойствах равновесных форм и описанных зависимостей. В частности, аналитически получено, что рост числа Бонда для капель первого типа ведёт к уменьшению максимально возможного X в случае односвязной свободной поверхности. Рассчитаны приближённые формы кривых λ, и найдены максимальные отклонения от них точных решений уравнения (1).

При исследовании капель второго типа использованы вспомогательные параметры β и γ, где β/γ – безразмерный радиус окружности из наивысших точек, $\beta\gamma^2$ – безразмерный радиус кривизны меридианной кривой в наивысшей точке. В частности, показано, что область допустимых параметров β и γ ограничена тремя линиями. Первая линия определяет минимальное значение β, равное 1; при этом $\theta = 0$. На второй границе $\theta = \pi$, γ мало. Первая и вторая линия сходятся при $\gamma = 0$, что соответствует каплям бесконечно большого радиуса и бесконечно малого меридианного сечения при любом краевом угле θ. Третья линия задаёт максимальное возможное значение β при фиксированном γ. На этой линии соединяются все описанные виды капель, что соответствует капле третьего типа с нулевым внутренним радиусом, капле второго типа с нулевым внутренним радиусом и бесконечной кривизной λ у оси вращения, капле первого типа с нулевой высотой в центре. Вторая и третья границы области допустимых β и γ сходятся при $\gamma > 0$. Третья и первая линии не сходятся, при $\gamma \to \infty$ максимальное значение параметра β стремится к $4^{1/3}$.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Энергетические и ядерные процессы и технологии» (подпрограмма «Энергетические процессы и технологии»).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. *Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости.* Перевод с французского под ред. Н. И. Идельсона. М. : ОНТИ, 1936.
2. Бабский В. Г. [и др.] *Гидромеханика невесомости.* Под ред. А. Д. Мышкиса. М. : Наука, 1976.
3. Авдейчик Е. В., Конон П. Н., Могилевский Е. И. *Аналитическое и численное исследование форм равновесия ограниченного объёма жидкости на вращающемся горизонтальном основании.* Механика машин, механизмов и материалов. 2020. Т. 51. № 2. С. 91–96.
4. Авдейчик Е. В., Конон П. Н. *Численное исследование относительного равновесия капли с односвязной свободной поверхностью на вращающейся плоскости.* Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 79–90.
5. Полевиков В. К., Денисенко В. М. *Численное исследование равновесных форм капли, вращающейся в гравитационном поле.* Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 1985. № 2. С. 37–41.

6. Lebedev-Stepanov P. V. [et al.] *Investigation of the shape and stability of a liquid drop on a rotating substrate.* Acoustical Physics. 2011. V. 57. № 3. P. 320–325.

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ НА ГИСТЕРЕЗИС ГАЗОВОГО ЗАЖАТОГО ПУЗЫРЬКА

А. А. Алабужев[1,2]

[1]*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*
[2]*Пермский государственный национальный исследовательский университет*

Исследуются собственные и вынужденные колебания зажатого газового пузырька в пульсационном поле давления с учётом гистерезиса краевого угла смачивания. Пузырёк зажат между двумя параллельными между собой твёрдыми пластинами и окружён несжимаемой жидкостью конечного объёма со свободной внешней поверхностью. Линия контакта может двигаться, если отклонение краевого угла превышает некоторое критическое значение [1]. Свойства поверхностей пластин могут отличаться друг от друга [2] или быть неоднородными [3]:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = {\Lambda^*}_{1,2}\left(\alpha\right) \begin{cases} (\gamma^* - \gamma^*_{cr}), & \gamma^* > \gamma^*_{cr}, \\ 0, & |\gamma^*| < \gamma^*_{cr}, \\ (\gamma^* + \gamma^*_{cr}), & \gamma^* < -\gamma^*_{cr}. \end{cases}$$

Для собственных колебаний показано, что неоднородность поверхностей существенно перестраивает спектр частот. Суммарный коэффициент диссипации пропорционален сумме коэффициентов для каждой пластины.

Получены амплитудно-частотные характеристики для разных параметров задачи. Ввиду диссипативного характера используемого эффективного краевого условия существует устойчивый режим нелинейных колебаний. Показано, что с увеличением критического значения краевого угла область движения уменьшается. Показано существование двойного резонанса – частота радиальных колебаний близка к частоте одной из гармоник колебаний формы.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 24-21-00379, https://rscf.ru/project/24-21-00379/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hocking L. M. *Waves produced by a vertically oscillating plate.* J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 267–281.
2. Alabuzhev A. A. *Forced axisymmetric oscillations of a drop, which is clamped between different surfaces.* Microgravity Science and Technology. 2020. V. 32. P. 545–553.
3. Pyankova M. A., Alabuzhev A. A. *Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the cramped drop.* Phys. Fluids. 2022. V. 34. 092015.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКИХ СРЕД В ТРУБКЕ

В. К. Андреев[1], *И. В. Вахрамеев*[2]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*
[2]*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\begin{gathered} w_{1t} = w_{1rr} + \frac{1}{r} w_{1r} + f_1(t), \\ T_{1t} = \frac{1}{\mathcal{P}_1}\left(T_{1rr} + \frac{1}{r} T_{1r}\right) + w_1(r,t), \quad 0 < r < 1, \quad 0 \le t \le t_0, \end{gathered} \tag{1}$$

$$|w_1(0,t)| < \infty, \quad |T_1(0,t)| < \infty, \quad 0 \le t \le t_0, \tag{2}$$

$$w_1(r,0) = w_{10}(r), \quad T_1(r,0) = T_{10}(r), \quad 0 \le r \le 1, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} w_{2t} = \frac{1}{\nu}\left(w_{2rr} + \frac{1}{r} w_{2r}\right) + \frac{1}{\nu} f_2(t), \\ T_{2t} = \frac{1}{\mathcal{P}_2 \chi}\left(T_{2rr} + \frac{1}{r} T_{2r}\right) + \frac{1}{\nu} w_2(r,t), \quad 1 < r < \lambda, \quad 0 \le t \le t_0, \end{gathered} \tag{4}$$

$$w_2(r,0) = w_{20}(r), \quad T_2(r,0) = T_{20}(r), \quad 1 \le r \le \lambda, \tag{5}$$

$$w_2(1,t) = \nu w_1(1,t), \quad w_{2r}(1,t) = \mu\nu w_{1r}(1,t) - \nu M, \tag{6}$$

$$T_1(1,t) = T_2(1,t), \quad T_{2r}(1,t) = k T_{1r}(1,t), \tag{7}$$

$$w_2(\lambda,t) = 0, \quad T_2(\lambda,t) = 0, \quad 0 \le t \le t_0, \tag{8}$$

$$\int_0^1 r w_1(r,t)\,dr + \frac{1}{\nu}\int_1^\lambda r w_2(r,t)\,dr = \frac{q(t)}{2\pi}, \quad 0 \le t \le t_0, \tag{9}$$

$$f_2(t) = \mu\nu f_1(t) + \nu M, \quad 0 \le t \le t_0. \tag{10}$$

Поставленная задача (1)–(10) описывает в безразмерных переменных двухслойное движение вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе; здесь $\nu = \nu_1/\nu_2$, $\mu = \mu_1/\mu_2$, $\mathcal{P}_j = \nu_j/\chi_j$ – числа Прандтля, $M = æAa^2/(\mu_2\nu_1)$ – число Марангони, $æ > 0$ – температурный градиент поверхностного натяжения на межфазной границе $\bar r = a$, A – постоянный градиент температуры на твёрдой боковой границе трубы $\bar r = b$, $\lambda = b/a > 1$ – геометрический параметр. Безразмерные величины: $r = \bar r/a$, $t = \nu_1 \bar t/a^2$, $w_j(r,t) = a\bar w_j/\nu_j$, $T_j(r,t) = \bar T_j/aA$, $f_j(t) = a^3 f_j/\nu_j^2$, $q(t) = \bar q/a\nu_1$. Соотношение (9) означает, что задан общий нестационарный расход обеих жидкостей. Это – условие переопределения, поскольку наряду с неизвестными w_j, T_j необходимо найти и градиент давления $f_1(t)$ (или $f_2(t)$).

Представление решения в размерных переменных таково:

$$\mathbf{u}_j = (0, 0, \overline{w}_j(\bar r, \bar t)), \quad \overline{p}_j = -\rho_j \overline{f}_j(\bar t)\overline{z} + \overline{D}_j(\bar t), \quad \overline{\theta} = A\overline{z} + \overline{T}_j(\bar r, \bar t).$$

На границе раздела $\overline{r} = a$ поверхностное натяжение линейно зависит от температуры: $\sigma(\overline{\theta}_1) = \sigma_0 - æ\theta_1$, где $\sigma_0 > 0$, $æ > 0$ — постоянные.

Пусть $w_j^s(r)$, $T_j^s(r)$, f_1^s – стационарное решение задачи (1)–(10). Учитывая условия ограниченности при $r = 0$, имеем представления

$$\begin{gathered} w_1^s(r) = \alpha_1 - f_1^s \frac{r^2}{4}, \\ T_1^s(r) = \mathcal{P}_1 \left(\frac{f_1^s}{48} r^4 - \alpha_1 \frac{r^2}{4} \right) + \alpha_2, \quad 0 \le r \le 1, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} w_2^s(r) = \frac{f_2^s}{4} \left(\lambda^2 - r^2 \right) + \beta_1 \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right), \quad 1 \le r \le \lambda, \\ T_2^s(r) = \mathcal{P}_2 \left[\frac{f_1^s}{16} \left(\frac{3}{4}\lambda^4 + \frac{1}{4} r^4 - \lambda^2 r^2 \right) - \frac{\beta_1}{4} \left(r^2 \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \lambda^2 - r^2 \right) \right] + \beta_2 \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right), \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} f_1^s = \frac{1}{\mu \left(\lambda^2 - 1 \right) \left(3 + \lambda^2 \right) + 1} \left[\frac{8 q^s}{\pi} - M \left(\lambda^2 - 1 \right) \left(3 + \lambda^2 \right) \right], \\ f_2^s = \frac{\nu}{\mu \left(\lambda^2 - 1 \right) \left(3 + \lambda^2 \right) + 1} \left(\frac{8 \mu q^s}{\pi} + M \right), \end{gathered} \tag{13}$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 – постоянные, определяемые из граничных условий.

Предположим, что $q(t) \in C^2[0, t_0]$, $w_{10}(t), T_{10}(r) \in C^2[0, 1]$, $w_{20}(t), T_{20}(r) \in C^2[1, \lambda]$, сделаем преобразование

$$\begin{gathered} w_1(r, t) = v(r, t) + \Pi(r, t), \quad 0 \le r \le 1, \\ \Pi(r, t) = \frac{M}{\mu} \left(2r^2 - 5r^3 + 3r^4 \right) + \frac{30 q(t)}{\pi} (r^2 - 2r^3 + r^4). \end{gathered} \tag{14}$$

Новая неизвестная функция $v(r, t)$ удовлетворяет уравнению вида (1) с уже однородными граничными условиями.

С помощью оценок из работы [1] доказываются следующие априорные оценки в равномерной метрике:

$$\begin{aligned} &|w_1(r, t)| \le H_1(t), \quad |w_{1t}(r, t)| \le H_2(t), \quad r \in [0, 1], \\ &|w_2(r, t)| \le H_3(t), \quad |w_{2t}(r, t)| \le H_4(t), \quad r \in [1, \lambda], \end{aligned} \tag{15}$$

с ограниченными при всех $t \in [0, t_0]$ функциями $H_j(t)$, $j = \overline{1, 4}$. Теперь в сопряжённой начально-краевой задаче для $T_i(r, t)$ можно считать в правых частях функции $w_i(r, t)$, $i = 1, 2$, известными. Для них доказываются неравенства, аналогичные (15), с известными ограниченными на $[0, t_0]$ функциями $H_5(t), ..., H_8(t)$.

Что касается градиента давления $f_1(t)$, то для него справедливо представление

$$\frac{1}{60} f_1(t) = \int_0^1 r^3 (1 - r)^2 w_{1t} \, dr - 2 \int_0^1 r \left(2 - 9r + 8r^2 \right) w_1 \, dr.$$

Откуда, используя (15) и (10), имеем ($d_1 > 0, d_2 > 0$ — постоянные)

$$|f_1(t)| \le d_1 H_1(t) + d_2 H_2(t), \quad |f_2(t)| \le \nu\mu |f_1(t)| + \nu |M|. \tag{16}$$

Пусть теперь расход $q(t)$ определён для всех $t \geq 0$. Нас будут интересовать дополнительные условия на $q(t)$, при которых $w_j(r,t) \to w_j^s(r)$, $T_j(r,t) \to T_j^s(r)$, $f_1(t) \to f_1^s$ при $t \to \infty$ в равномерной метрике. Для это произведём замену: $W_j(r,t) = w_j(r,t) - w_j^s(r)$, $K_j(r,t) = T_j(r,t) - T_j^s(r)$, $F_1(t) = f_1(t) - f_1^s$. Тогда эти функции будут решением той же задачи (1)–(9) с функцией $Q(t) = q(t) - q^s$ и изменёнными начальными данными: $W_{j0}(r) = w_{j0}(r) - w_j^s(r)$, $K_{j0}(r) = T_{j0}(r) - T_j^s(r)$. Поэтому для W_j, F_j справедливы оценки (15), (16), (K_j удовлетворяют аналогичным оценкам). Предположим, что

$$|q(t) - q^s| \leq Ce^{-\alpha t}, \quad |q'(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \quad |q''(t)| \leq Ce^{-\alpha t} \tag{17}$$

с положительными постоянными C и α; величина α будет указана далее. Детальный анализ зависимости функций $H_j(t)$, $j = \overline{1,8}$, показывает, что имеют место оценки при всех $t > 0$ (ниже $d_k > 0$ — постоянные)

$$|F_j(t)| \leq d_3e^{-\delta t} + d_4e^{-2\alpha t}, \quad |W_2(r,t)| \leq d_5e^{-\delta t/2}, \quad |K_2(r,t)| \leq d_6e^{-\delta_1 t/2}, \tag{18}$$

$$|W_1(r,t)| \leq d_{10}e^{-\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 = \min\left(\xi_1^2, \frac{\delta}{2}\right), \tag{19}$$

$$|K_1(r,t)| \leq d_{14}e^{-\alpha_2 t}, \quad \alpha_2 = \min\left(\frac{\xi_1^2}{\mathcal{P}_1}, \frac{\delta_1}{2}, \alpha_1\right). \tag{20}$$

Итак, согласно оценкам (18)–(20) нестационарное решение задачи (1)–(10) при условиях (17) стремится при $t \to \infty$ к своим стационарным значениям (11)–(13) по экспоненциальному закону. При этом должно быть $\alpha > \max(\delta, \delta_1)$, а сами δ, δ_1 зависят от безразмерных параметров задачи; ξ_1 — первый корень функции Бесселя $J_1(\xi) = 0$.

Задача (1)–(10) является линейной. В образах по Лапласу $\widehat{w}_j(r,p)$, $\widehat{T}_j(r,p)$, $\widehat{F}_j(p)$ она сводится к сопряжённой краевой задаче для ОДУ, которая здесь не выписывается. Решение последней задачи находится в виде квадратур, содержащих функции $I_n(x), K_n(x)$, $n = 0, 1$. При $q(t) \to q^s$, $t \to \infty$ доказывается, что и $w_j(r,t) \to w_j^s(r)$, $T_j(r,t) \to T_j^s(r)$, $f_j(t) \to f^s$ при $t \to \infty$ равномерно при всех $r \in [0, \lambda]$. Таким образом, стационарное решение (11)–(13) является устойчивым при более слабом условии на расход $q(t)$. Приведённые многочисленные вычислительные эксперименты подтверждают эти теоретические выводы. При определённых $q(t)$ в средах могут возникать и возвратные течения.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. К. *О неравенстве типа Фридрихса для составных областей.* Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2008. Т. 1. № 4. С. 349–370.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНДУЦИРОВАННЫХ ПЕРЕМЕННЫМ ПОЛЕМ КОЛЕБАНИЙ ЧАСТИЦ В МАГНИТОАКТИВНОМ ЭЛАСТОМЕРЕ: ВЛИЯНИЕ МАГНИТОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИСТЕРЕЗИСА

А. М. Биллер, О. В. Столбов, Ю. Л. Райхер

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Интерес исследователей к магнитоактивным эластомерам (МАЭ) обусловлен уникальной возможностью бесконтактно – посредством приложенного магнитного поля – управлять напряжённо-деформированным состоянием, формой и диссипативными характеристиками образцов материала в режиме реального времени. В основе такого макроскопического поведения лежат сложные взаимодействия между компонентами композита: микронными частицами ферромагнетика и мягкой эластомерной матрицей.

Физическая магнитомеханика МАЭ, где состояние и процессы, протекающие в этих композитах, рассматриваются на мезоскопическом уровне (см., например, [1]), позволяет разобраться в механизмах, управляющих внутренней структурой материала, и обеспечивает базу для создания устройств с МАЭ в качестве рабочих элементов. В большинстве потенциальных приложений МАЭ предполагается, что элементы, изготовленные из него, работают в динамическом режиме, особенно это относится к виброзащите, технике демпфирования и адаптивной акустике. Соответственно, динамическим свойствам МАЭ посвящено большое количество исследований. В основном это экспериментальные измерения, см., например, [2].

В настоящей работе мезоскопическая модель, предложенная в [3,4] для описания квазиравновесного деформирования таких систем, распространена на динамическую ситуацию. В однородное гармоническое поле $H(t) = H_0 \sin \omega t$ помещается элементарная ячейка МАЭ, состоящая из цилиндрического образца упруговязкого эластомера типа Кельвина, внутри которого расположена пара сферических линейно намагничивающихся частиц. Частицы, состоящие из изотропного ферромагнетика с высокой восприимчивостью $\chi \sim 10^3$ и намагниченностью насыщения $M_s \sim 10^3$ кА/м, не обладают собственным магнитным моментом. Оказавшись под действием поля, направленного вдоль оси цилиндра, они намагничиваются в том же направлении, и между ними возникают силы притяжения. Неразрывно связанные с окружающей матрицей частицы смещаются навстречу друг другу, чему противодействуют упругие силы. Типичные МАЭ, характеризующиеся модулем Юнга $E \leq 30$ кПа и коэффициентом вязкости $\eta \sim (5 \div 50)$ кПа·с, способны к большим магнитоуправляемым деформациям (см., например, [5]), которые включают в себя ситуации индуцированного намагничиванием коллапса (кластеризации) частиц.

Если приложенное магнитное поле H_0 постоянно или квазистатично (имеет период много больший, чем самый низкочастотный отклик системы), то вязкие свойства эластомера несущественны. Тогда можно считать, что в любой момент времени частицы занимают в матрице равновесные положения, и расстояние q между их центрами определяется из минимизации суммарной (магнитная + упругая) энергии:

$$U = U_{el}(q, q_0) + U_{mag}(q, H_0). \tag{1}$$

Этот случай изучался в работах [3, 4], где для магнитной и упругой энергий предложены аналитические выражения, с высокой точностью описывающие магнитное взаимодействие

двух сферических линейно намагничивающихся частиц и упругое взаимодействие двух твёрдых включений в образце из гиперупругого материала.

В результате конкуренции магнитных и упругих сил в элементарной ячейке может возникать магнитомеханический гистерезис. Расстояние между частицами q, слабо изменяясь на начальном этапе, по достижении полем некоторого значения H_F скачком падает до минимального, соответствующего плотному контакту частиц (коллапс), и при дальнейшем росте поля изменяется лишь незначительно. При снижении поля до значения $H_B < H_F$ упругие силы становятся преобладающими, и частицы разъединяются, расходясь на расстояние, близкое к исходному. Таким образом, на интервале $(H_F - H_B)$ рассматриваемая ячейка имеет два возможных состояния равновесия; в каком из них она действительно находится, определяется предысторией. Тем самым квазистатическое намагничивание модельного парного элемента следует сценарию фазового перехода I рода.

В линейно-поляризованном поле $H(t) = H_0 \sin \omega t$ сила взаимного притяжения частиц магнитомягкого ферромагнетика изменяется с частотой 2ω. Как и в статике, энергию системы можно представить как сумму двух частей. Модельное уравнение движения рассматриваемой задачи записывается в терминах объёмной плотности энергии $\tilde{w} = U/(Vc_1)$:

$$\tilde{\xi}\,\frac{dq}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{w}_{el}(q, q_0)}{dq} - \beta\,\frac{\tilde{w}_{mag}(q, h(\tilde{t}))}{dq}\,. \tag{2}$$

Коэффициент $\tilde{\xi} = \xi/(\tau_R c_1)$, содержащий время запаздывания τ_R и упругую константу c_1, характеризует в безразмерном виде вязкие свойства эластомера; параметр $\beta = \mu_0 M_s^2/c_1$ – это отношение характерных значений магнитной и упругой компоненты; безразмерная напряжённость магнитного поля введена согласно $h_0 = H_0/M_s$.

Уравнение в форме (2) распространяет квазистатическое описание, использованное в работах [3, 4], на динамический случай и по существу представляет собой реологическую схему Кельвина с временем запаздывания τ_R. Модель даёт простой способ учёта релаксационных свойств эластомера в условиях больших деформаций (вплоть до контакта частиц) без громоздких расчётов методом конечных элементов.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (2) решалось численно с помощью функции `odeint` библиотеки `scipy` для языка `python`. Вычисление прекращалось, когда решение выходило на стационарный цикл.

Рассматриваемая система во внешнем поле $h(t) = h_0 \sin \tilde{\omega}\tilde{t}$ демонстрирует разнообразные режимы колебаний при их сильной параметрической зависимости от величины коэффициента внутренней вязкости полимерной матрицы. Будут ли частицы предельно сближаться и затем расходиться, определяется, в том числе, величиной приложенного магнитного поля. Экстраполируя квазистатическую ситуацию, можно предполагать, что когда величина приложенного поля в максимуме превышает пороговое значение $(h_0 > h_F)$, то возможны колебательные циклы, включающие как коллапс частиц, так и выход из него.

Сильное $(h_0 > h_F)$ поле в высокочастотной области порождает ещё один стационарный режим. Причина в следующем. При $\tilde{\omega} \gg 1$ частицы не успевают следовать за изменениями поля и слабо на него реагируют. Для них действие поля становится эквивалентным постоянному псевдопотенциалу, содержащему вместо квадрата поля $h(t)$ его не зависящее от времени среднеквадратичное значение $h_0/2$. Если h_0 достаточно велико, то стационарным циклом для таких колебаний будет ситуация, когда частицы будут находиться или в состоянии «скрепки» (коллапса) или слегка отклоняться от него, но никогда не будут уходить друг от друга на расстояние порядка q_0. Пример различных устойчивых колебательных циклов представлен на рис. 1.

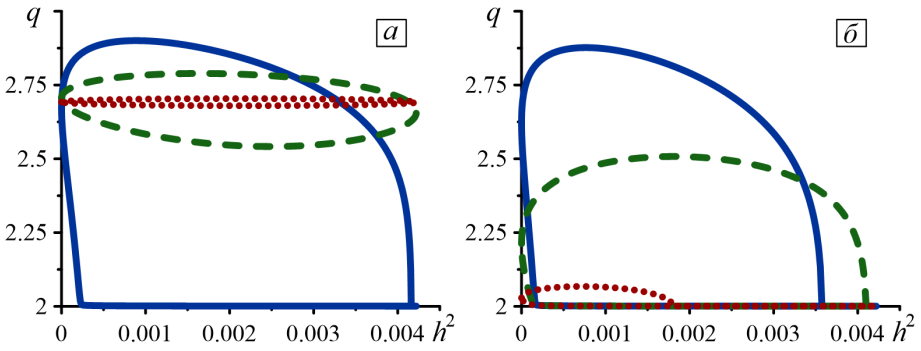


Рис. 1: Магнитодеформационные циклы для модели с $q_0 = 3$ в поле с амплитудой *а*) $h_0 = 0,03$, *б*) $h_0 = 0,04$ и частотами $\tilde{\omega}$, равными 0,2 (сплошная линия), 1 (штриховая) и 10 (пунктирная)

Рассмотрим диссипацию энергии переменного поля, которой сопровождаются колебания частиц в магнитоактивном эластомере. В зависимости от прикладных целей динамического намагничивания нагрев образца МАЭ может быть как полезным (облегчение формования изделия, активация термочувствительных композитов, гипертермия), так и нежелательным (ухудшение эксплуатационных свойств) эффектом. Очевидно, что режимы колебаний, имеющие наибольшую площадь петли на графиках рис. 1, приводят к наибольшей диссипации. Для возникновения такого устойчивого цикла необходимо, чтобы амплитуда h_0 была не ниже h_F, а частота – не слишком высокой.

Величиной, удобной для экспериментального измерения, является мощность потерь $\tilde{N}$, то есть величина поглощения, отнесённая к периоду колебаний поля. Результаты, представленные на рис. 2, приводят к следующим общим заключениям. Во-первых, вне определённого диапазона ни повышение частоты, ни увеличение амплитуды переменного поля не может повысить поглощаемую мощность рассматриваемой системы. Во-вторых, при определённых условиях система способна резко снизить уровень поглощения и стать существенно «прозрачнее» для облучающего магнитного поля.

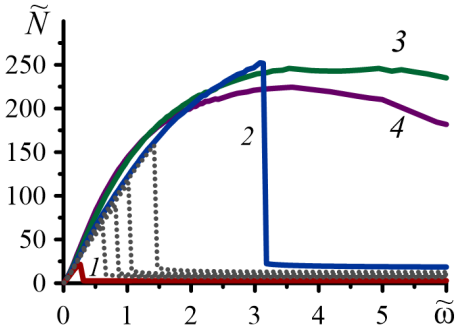


Рис. 2: Частотные зависимости мощности потерь в переменном поле с амплитудой h_0, равной 0,05 (линия *1*), 0,06 (*2*), 0,07 (*3*), 0,08 (*4*). Пунктирные линии соответствуют амплитудам из интервала от 0,055 до 0,06 с равными приращениями

Колебания двухчастичного элемента магнитоактивного эластомера (МАЭ) в переменном магнитном поле рассмотрены в настоящей работе. Использована модель вязкоупругой эластомерной матрицы, учитывающая её способность испытывать большие деформации. В квазистатических условиях изучаемый элемент при увеличении и уменьшении приложенного магнитного поля претерпевает магнитомеханический гистерезис. В пределе низ-

ких частот переменного поля этот гистерезис воспроизводится внутри цикла колебаний. В умеренных и высоких частотах гистерезис «выживает» далеко не всегда, его присутствие/отсутствие является результатом взаимного влияния управляющих параметров: амплитуды и частоты магнитного поля.

Рассмотрено рассеяние энергии, сопровождающее вынужденные колебания пары частиц. Обнаружено, что магнитомеханический гистерезис может служить эффективным регулятором мощности поглощения; например, в определённом диапазоне амплитуд переменного поля он вызывает резкое (пороговое) снижение поглощения в ответ на рост частоты.

Изученная система представляет собой простую мезоскопическую модель структурного элемента МАЭ, которая работоспособна для пар с межцентровым расстоянием до шести радиусов частицы. Полученные результаты расширяют представления о динамических механизмах перестройки внутренней структуры МАЭ самого распространённого типа – систем, где наполнителем являются частицы магнитомягких ферромагнетиков.

Работа выполнена в рамках проекта AAAA-A20-120020690030-5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Puljiz M. [et al.] *Reversible magnetomechanical collapse: virtual touching and detachment of rigid inclusions in a soft elastic matrix.* Soft Matter. 2018. V. 14. P. 6809–6821.
2. Moreno-Mateos M. A. [et al.] *Magneto-mechanical system to reproduce and quantify complex strain patterns in biological materials.* Applied Materials Today. 2022. V. 27. 101437.
3. Биллер А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л. *Мезоскопические модели для определения упругих характеристик мягких магнитных эластомеров.* Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 1. С. 122–136.
4. Биллер А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л. *Двухчастичный элемент магнитореологического эластомера под действием осциллирующего магнитного поля и переменной механической нагрузки.* ВМСС. 2017. Т. 10. С. 426–432.
5. Saveliev D. V. [et al.] *Giant extensional strain of magnetoactive elastomeric cylinders in uniform magnetic fields.* Materials. 2020. V. 13. 3297.

ГЕНЕРАТОР РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПРОТОЧНОМ МИКРОКАНАЛЕ

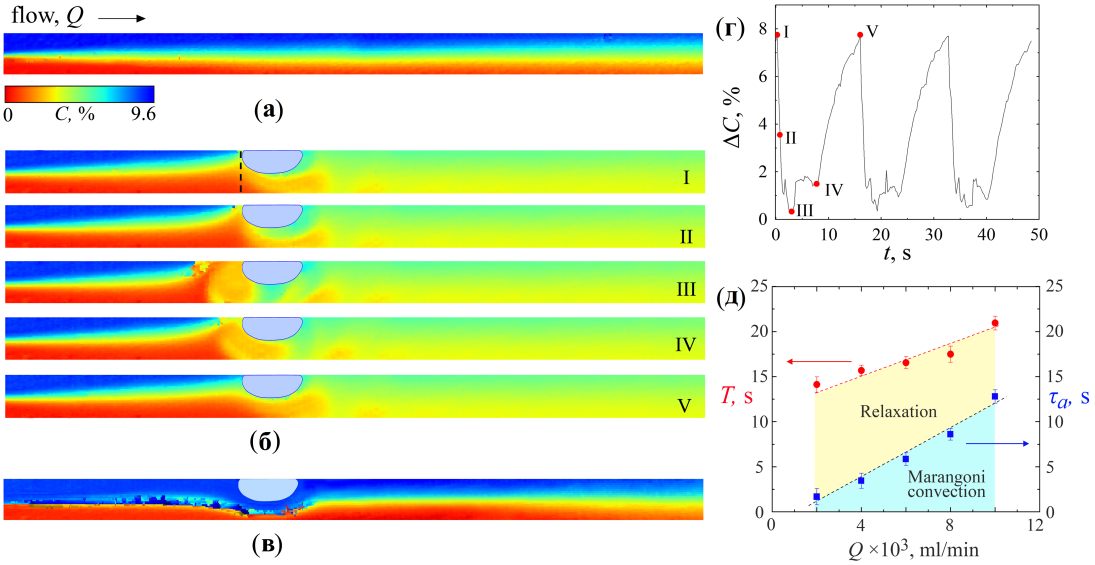
Д. А. Брацун, А. И. Мизёв, Е. А. Мошева, Р. Р. Сираев, А. В. Шмыров

Институт механики сплошных сред ПФИЦ УрО РАН, Пермь

Микрореакторы проточного типа, широко используемые в последнее время в тонком химическом синтезе, имеют характерный размер канала, который достаточно большой, чтобы сделать простое диффузионное перемешивание неэффективным. Поэтому такой микрореактор должен быть дополнен устройством для быстрого перемешивания растворов, поступающих в реакционную камеру [1]. В данной работе экспериментально и численно исследуется автоколебательный процесс в Т-образном микрожидкостном чипе, в который поступают два раствора. Смешение жидкостей происходит вблизи пузырька воздуха, имплантированного в главном канале на некотором расстоянии от места разветвления. Пузырь частично перекрывает канал. Исследовался нереакционный случай. Показано, что при подаче на вход неоднородного раствора поверхностно-активного вещества (ПАВ) может возникнуть концентрационная неустойчивость Марангони на границе раздела жидкость – воздух. Возбуждение концентрационно-капиллярной конвекции приводит к сравнительно быстрой гомогенизации раствора ниже по потоку. Особенностью процесса является то, что он протекает импульсно за счёт быстрой активации конвекции, выравнивания поля концентрации вблизи пузырька и последующего восстановления критического градиента концентрации поперёк канала. Релаксационные колебания хорошо известны в разных разделах физики со времен выхода работы Ван дер Поля [2]. В механике жидкости релаксационные колебания исследовались Струхалем и Рэлеем, которые показали, что частота колебаний вихрей позади цилиндрического препятствия в набегающем потоке жидкости (газа) растёт с увеличением скорости потока.

Релаксационные колебания вблизи межфазной поверхности жидкость – газ или жидкость – жидкость в присутствии ПАВ обнаружены достаточно давно [3]. Неоднородность среды в тех задачах создавалась силой тяжести, которая способствовала оседанию молекул ПАВ в жидкости. В данной работе предлагается принципиально другой механизм релаксации системы на основе стационарного течения жидкости с растворённым ПАВ. В новой схеме процесс релаксации не зависит от гравитации точно так же, как и сама неустойчивость Марангони. Это делает генератор автоколебаний более однородным по своим свойствам. Его реализация в любом технологическом устройстве позволяет одинаково успешно функционировать в условиях гравитации и микрогравитации. Ещё одним важным для приложений бонусом является возможность управления процессом релаксации путём регулирования скорости основного потока. Это принципиально отличает новую конструкцию осциллятора от процесса осаждения ПАВ под действием силы тяжести [3], который является медленным и плохо контролируемым извне.

Было обнаружено, что в новой конструкции микрореактора регенерация неоднородности поля ПАВ определяется исключительно геометрией канала и свойствами входящих растворов. Изучены нелинейные свойства колебаний и описаны режимы течения. Интересной особенностью системы является увеличение периода колебаний с ростом расхода, что не согласуется с общепринятой теорией релаксационных колебаний Рэлея – Струхаля в набегающем потоке.



На рисунке представлены следующие экспериментальные результаты: (а) процесс смешения растворов в канале без пузыря; (б) несколько кадров перестройки поля концентрации ПАВ во время одного периода релаксационных колебаний; (в) режим прекращения колебаний из-за проскакивания струи жидкости мимо пузыря; (г) изменение концентрации ПАВ, измеренной в контрольной точке перед пузырём; (д) зависимость периода колебаний от величины расхода жидкости.

Построена математическая модель процессов переноса в системе, проведено численное исследование. Детально обсуждается механизм колебаний, который приводит к неклассической зависимости частоты колебаний от расхода. Показано, что экспериментальные данные и результаты численного моделирования хорошо согласуются.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы мегагрантов, договор № 075-15-2024-535 от 23 апреля 2024 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bratsun D. [et al.] *Adaptive micromixer based on the solutocapillary Marangoni effect in a continuous-flow microreactor.* Micromachines. 2018. V. 9. Art. 600.
2. Van der Pol B., Van der Mark J. *The heartbeat considered as a relaxation oscillation and electrical model of heart.* Phil. Mag. Supll. 1928. V. 6. P. 763–775.
3. Mizev A. I., Birikh R. V. *Interaction between buoyant and solutocapillary convections induced by a surfaceactive source placed under the free surface.* EPJ-Special Topics. 2011. V. 192. P. 145–153.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ УТИЛИЗАЦИИ ДИОКСИДА УГЛЕРОДА В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Р. А. Вирц

Алтайский государственный университет, Барнаул

В работе рассматривается осесимметричная модель утилизации диоксида углерода в пороупругой среде. Основу модели составляют уравнения сохранения масс для газовой и твёрдой фаз, закон Дарси, реологическое соотношение для пористой среды и уравнение баланса сил [1, 2]

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{v}_f \rho_f) = 0, \quad \frac{\partial \rho_s (1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot [(1-\phi)\vec{v}_s \rho_s] = 0, \tag{1}$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{K(\phi)}{\mu}(\nabla p_f - \rho_f \vec{g}), \quad p_f = p_{tot} - p_e, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e), \tag{3}$$

$$\rho_{tot}\vec{g} + \nabla \cdot \left\{ (1-\phi)\eta \left[\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} \right)^* \right] \right\} - \nabla p_{tot} = 0, \tag{4}$$

где $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_f, \vec{v}_s$ – истинные плотности и скорости газовой и твёрдой фаз соответственно, ϕ – пористость, p_f, p_s – давления газовой и твёрдой фаз соответственно, $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s$ – общее давление, $\rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$ – плотность двухфазной среды, $\vec{g} = (0, 0, -g)$ – вектор силы тяжести, $K(\phi) = k'\phi^n$ – коэффициент проницаемости, k' – проницаемость пористой среды, μ – динамическая вязкость газа, $a_1(\phi)$ – коэффициент объёмной вязкости, $a_2(\phi)$ – коэффициент объёмной сжимаемости. В дальнейшем используется обозначение $k(\phi) = K(\phi)/\mu$. Плотности газовой и твёрдой фаз считаются постоянными. Задача записана в эйлеровых координатах $(x, y, z, t) \in Q_T$.

Близкие по структуре системы уравнений рассматривались в работах [1–4]. Предположение о малости скорости движения твёрдого скелета среды позволило свести определяющую систему уравнений (1)–(4) к двум уравнениям для нахождения эффективного давления и пористости [1]. Под областью фильтрации газа подразумевается пласт горной породы, в котором на глубине расположена нагнетательная скважина, а по бокам пласт ограничен непроницаемыми породами. Кровля пласта не является непроницаемой и совпадает с поверхностью. Миграция углекислого газа и его выход на поверхность происходит за счёт увеличения пористости у кровли пласта. На основе этих предположений поставлены краевые условия для скоростей газовой и твёрдой фаз и далее переписаны в терминах искомой функции эффективного давления среды. Даны разностная схема и алгоритм решения поставленной задачи. Проведено численное моделирование нескольких вариантов закачки углекислого газа в пласт на различных глубинах расположения скважины и с различными скоростями нагнетания. Определены оптимальные варианты нагнетания газа для его хранения в геологической среде в долгосрочной перспективе.

Распределение пористости среды и давления газа при одном из вариантов нагнетания представлены на рис. 1. В данном случае длительность закачки $T = 7$ сут., $\phi^0(r, z) = 0.025$,

$Q = 1.133 \cdot 10^{-5}$ м^3/с, $Q_m = 0.0086$ кг/c, $Q_t = 5201.28$ кг, где ϕ^0 – начальная пористость, Q – объёмный расход газа, Q_m – массовый расход газа, Q_t – общая масса закачанного CO_2.

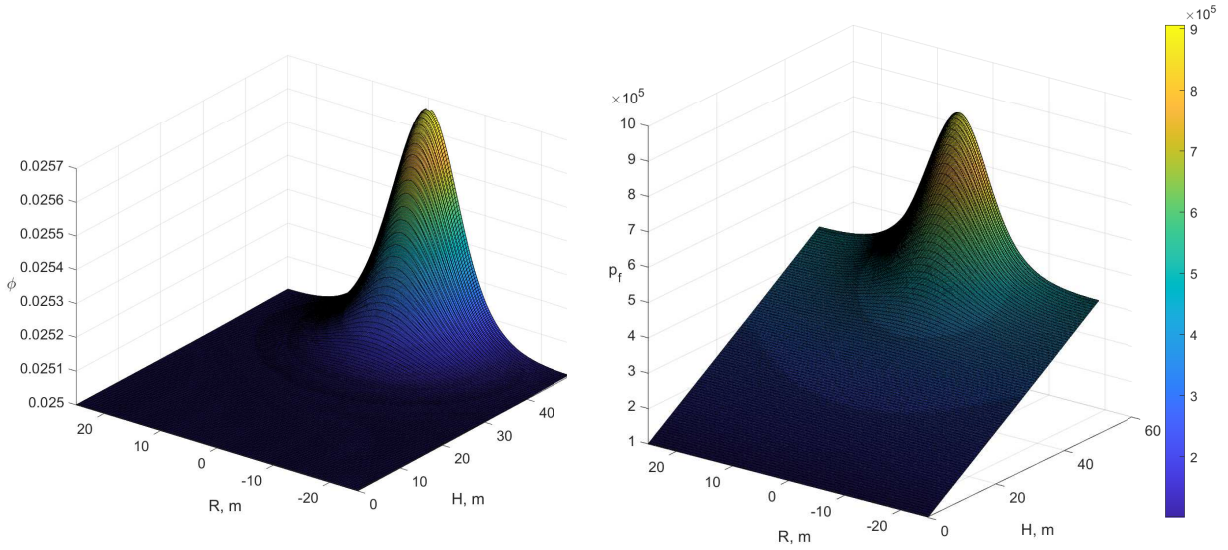


Рис. 1: Распределение пористости среды (слева) и давления газа (справа) на следующие сутки с момента остановки закачки газа

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-71-10045, https://rscf.ru/project/23-71-10045/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Connoly J. A. D., Podladchikov Y. Y. *Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock.* Geodinamica Acta. 1998. V. 11. № 2-3. P. 55-84.
2. Fowler A. *Mathematical Geoscience*. Springer-Verlag London Limited, 2011.
3. Вирц Р. А., Папин А. А. *Моделирование захоронения углекислого газа в вязкоупругой пористой среде*. Вычислительные технологии. 2022. Т. 27. № 6. С. 4–18.
4. Вирц Р. А., Папин А. А. *Проблемы математического моделирования хранения углекислого газа в геологических формациях: учебное пособие*. Барнаул : Алтайский государственный университет, 2021. 70 с.

ВЕРТИКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ВНУТРЕННИХ СЕЙШ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОЗЕРЕ

О. С. Володько, Е. Н. Лемешкова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Внутренние сейши приводят к перемешиванию в водоёме, вызывая перераспределение кислорода и питательных веществ, поэтому понимание пространственной структуры внутренних сейш обеспечивает основу для понимания последующих физических, химических и биологических процессов. Наличие выраженной и достаточно устойчивой стратификации является необходимым условием для возникновения внутренних сейш в озёрах.

В настоящей работе определена вертикальная структура внутренних сейш в стратифицированном озере (Шира, Хакасия, Восточная Сибирь). Частоты и профили вертикальной скорости каждой моды были рассчитаны с использованием данных натурных измерений температуры и солёности в озере Шира в разные годы.

Для теоретического анализа вертикальной структуры внутренних сейш использовалась линеаризованная система уравнений движения стратифицированной жидкости на ровном дне [1, 2]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}-fv=-\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial t}+fu=-\frac{1}{\rho_*}\frac{\partial p'}{\partial y},$$
$$0=-\frac{\partial p'}{\partial z}-\rho' g,\qquad \frac{\partial \rho'}{\partial t}-\rho_*\frac{N^2}{g}w=0. \tag{1}$$

Здесь $u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)$ – составляющие вектора скорости, g – ускорение свободного падения, f – параметр Кориолиса, ρ_* – постоянное значение плотности, N – частота Брента – Вяйселя, ρ' и p' – отклонение плотности и давления от соответствующих величин в равновесном состоянии жидкости.

При расчётах непрерывная стратификация в озере варьировалась от трёхслойной до шестислойной. Частоты вертикальной скорости были также получены при спектральном анализе данных натурных измерений и результатов численного моделирования на основе модели ROMS (Regional Oceanic Modeling System) [3] и показали хорошее согласование с рассчитанными по линейной модели (1) в длинноволновом приближении.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ле Блон П., Майсек Л. *Волны в океане.* М. : Мир, 1981.
2. Hutter K., Wang Y., Chubarenko I. P. *Physics of Lakes: V. 1: Foundation of the Mathematical and Physical Background.* Springer Science & Business Media, 2010.
3. ROMS [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: https://www.myroms.org.

ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГОДОВОЙ ДИНАМИКИ ВЕЧНОЙ МЕРЗЛОТЫ В РАЙОНАХ СУШИ

С. Н. Генова, В. М. Белолипецкий

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании или оттаивании осуществляется с помощью решений задач Стефана. Для исследования мощности сезонно-талого слоя применяются математические модели различного уровня сложности [1–5], которые основываются на уравнениях теплопроводности для мёрзлых и талых слоёв. В вертикальной структуре зоны вечной мерзлоты выделяются слои талого и мёрзлого грунта (каждого может быть больше одного), а также слой снега. В работе [5] предложен численный алгоритм решения одномерных (в вертикальном направлении) задач теплопроводности с подвижными границами фазового перехода с образованием новых и аннулированием существующих слоёв, позволяющий описать годовую динамику замерзания/оттаивания вечной мерзлоты в болотно-озёрных ландшафтах с заданными значениями температуры поверхностного слоя в летний период (данные дистанционных измерений температуры подстилающей поверхности). В настоящей работе рассматриваются территории, на которых отсутствуют озёра и болота. Возможны различные варианты расположения мёрзлых и талых слоёв.

Численный алгоритм состоит из модулей, определяющих толщины и температуры слоёв с использованием дистанционно измеренной температуры поверхностного слоя. Вертикальные распределения температуры в рассматриваемых слоях определяются из решений уравнений теплопроводности, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям [5]:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{c_{v,i}} \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Здесь $T_i(t, z)$ – температура i-того слоя, t – время, z – вертикальная координата (направлена вниз), λ_i – коэффициент теплопроводности, $c_{v,i}$ – объёмный коэффициент теплоёмкости грунта.

На подвижных границах фазового перехода ($z = h_i$)

$$T_i = T_{i+1} = T_{ph}, \tag{2}$$

$$\rho_i L_i \frac{dh_i}{dt} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_i - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{i+1}, \tag{3}$$

если i-ый слой мёрзлый, $(i + 1)$-ый – талый,

$$\rho_{i+1} L_{i+1} \frac{dh_i}{dt} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{i+1} - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_i, \tag{4}$$

если i-ый слой талый, $(i + 1)$-ый – мёрзлый. Здесь ρ_i – плотность грунта, $L_i = L_w \cdot W_{v,i}$ – скрытая объёмная теплота плавления среды в i-ом слое, $W_{v,i}$ – влажность грунта в i-ом слое.

На нижней границе в слое вечной мерзлоты при $z = H = \text{const}$, $T = T_H$.

На поверхности суши в летний период задаётся температура T_{sf}.

Начальные условия: $t = 0$, $T_i(0, z) = T_i^0$, $h_i = h_i^0$, $\delta_i = \delta_i^0$, $\delta_1 = h_1 - h_3$ – толщина слоя 1, $z = h_i$ – координаты i-го слоя.

Полагаем, что в начальный момент образуется мёрзлый слой толщиной $\delta_3 = \delta_3^0$ с наличием снега толщиной δ_{s1}, $\delta_{s2} = 0$.

Введём новые независимые переменные (t, ξ):

$$t = t, \quad \xi_1 = (z - h_3)/\delta_1, \quad h_3 \le z \le h_1, \quad 0 \le \xi_1 \le 1,$$

$$\xi_2 = (z - h_1)/\delta_2, \quad h_1 \le z \le H, \quad 0 \le \xi_2 \le 1,$$

$$\xi_3 = z/\delta_3, \quad 0 \le z \le h_3, \quad 0 \le \xi_3 \le 1.$$

Рассмотрим произвольный i-ый слой, $h_{i-1} \le z \le h_i$, $\delta_i = h_i - h_{i-1}$ – толщины соответствующих слоёв (h_i – координата слоя). Введём равномерную разностную сетку в прямоугольнике $[0 \le \xi_i \le 1,\ 0 \le t \le t_k]$:

$$\Delta\xi_i = \frac{1}{N-1}, \quad \xi_{i,j} = \frac{j-1}{N_i - 1}, \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad 1 \le j \le N_i,$$

$$T_{i,j}^{n+1} = T_i(t_{n+1}, \xi_{i,j}),$$

N_i – количество точек в соответствующем слое. Сеточные уравнения, соответствующие дифференциальному уравнению теплопроводности в новых переменных в приближении медленных движений границ фазового перехода для внутренних точек i–того слоя, имеют вид

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\lambda_i}{c_{v,i}\delta_i^2} \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta\xi_i^2}, \qquad 2 \le j \le N_i - 1. \tag{5}$$

Сезонные периоды динамики вечной мерзлоты.

• *Модуль «снежный покров»*. Выделяются интервалы времени, на которых температура воздуха T_a одного знака. В зимний период $T_a \le 0$. Для оценки термического сопротивления снежного покрова используется квазистационарное приближение. Снежный покров схематизируется двумя слоями. Для вычисления температуры грунта на границе снег – грунт получена формула

$$T_{3,1}^n = \frac{T_{3,2}^n + \mu_c T_a}{1 + \mu_c}, \qquad \mu_c = \frac{\lambda_{s1}\delta_3\Delta_3}{\lambda_3\delta_{s1}(1 + \lambda_{s1}/\lambda_{s2})}.$$

Здесь T_a – температура воздуха, λ_{s1}, λ_{s2} – коэффициенты теплопроводности снега в слоях 1 и 2 соответственно; δ_{s1}, δ_{s2} – толщины слоёв снега 1 и 2, λ_3, δ_3 – коэффициент теплопроводности и толщина мёрзлого грунта. Предполагается, что известна температура в слое мёрзлого грунта ($T_{3,2}^n = T_3^n(t_n, \Delta_3)$). В начальный момент образуется мёрзлый слой толщиной $\delta_3 = \delta_3^0$ с наличием снега толщиной $\delta_{s1} = \delta_{s1}^0$, $\delta_{s2} = 0$.

• *Модуль «таяние снега»*. При повышении температуры снега весной до нуля градусов начинается таяние снега. Затраты тепла на таяние снежного покрова толщиной δ_s: $F_s = 80\rho_s\delta_s$ кал/см^2. Затраты тепла на прогрев снега до нуля: $F_s = c_s\rho_s\delta_s T_s$ кал/см^2, c_s – теплоёмкость снега, кал/(г·град). Теплообмен на границе снег–атмосфера: $F_{a_s} = \alpha(T_a - T_s)$ кал/(см$^2 \cdot$ с), теплообмен на границе снег – мёрзлый грунт: $F_{s-gr} = \lambda_3(T_{3,2} - T_{3,1}/(\delta_3\Delta_3)$ кал/(см$^2 \cdot$ с), $\alpha = 5.54\sqrt{W_2 + 0.3}$ кал/(см$^2 \cdot$ с·град), W_2 – скорость ветра (м/с).

Из уравнения теплового баланса следует формула для оценки интервала времени таяния снега τ_s:

$$\tau_s = \frac{\rho_s \delta_s (80 - c_s T_s)}{F_{a-s} - F_{s_g r}}\,. \tag{6}$$

В случае аннулирования слоя 1 $h_1 = h_3 = \hat{h}, \quad \delta_1 = 0, \quad \hat{\delta_3} = \hat{h}, \quad \delta_2 = H - \hat{h},$

$$T_{2,1} = T_{3,N_3} = \frac{T_{3,N_3-1} + \mu_1 T_{2,2}}{1 + \mu_1}\,, \qquad \mu_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\,.$$

Вариант I. Начало весеннего периода $t = t_1$ определяется из условия $T_a(t_1) > 0$. Выполняется модуль «таяние снега». Вычисляется интервал времени τ_s по формуле (6). При $t_2 = t_1 = \tau_s$ осуществляется переход на вариант I: атмосфера – талый грунт (слой 1) – мёрзлый грунт (слой 2). Из уравнений (5) и граничных условий определяется температура в слоях 1 и 2, из уравнений (3) находится положение границы фазового перехода $z = h_1^{n+1}$. При $t = t_3$, $T_a(t_3) < 0$ выполняется переход на вариант II.

Вариант II. $T_a < 0$. Добавляются два слоя снега и мёрзлый слой толщиной $\delta_3 = \varepsilon_3$: атмосфера – снег 1 – снег 2 – мёрзлый грунт (слой 1) – талый грунт (слой 2) – мёрзлый грунт (слой 3). Задаются среднесуточная температура воздуха T_a, толщины снега δ_{s1}, δ_{s2} (среднедекадные или среднемесячные). Из уравнения (5) и граничных условий находится температура грунта в слоях 1, 2, 3. Пересчитывается h_1^{n+1}, $\delta_1 > \varepsilon_1$.

При $T_a(t_3) > 0$ по (6) определяется интервал времени, за который весь снег растает, и выполняется переход на вариант I.

Если для $T_a(t_3) < 0$ в момент времени $t = t_3 \quad \delta_1 \le \varepsilon_1$, то слой 1 аннулируется и выполняется переход на вариант III.

Если при $t = t_4$, $T_a > 0 \quad \delta_1 > \varepsilon_1$, то весь снег растает за время τ_s (по (6)) и начнёт таять мёрзлый слой 3, образуя талый слой 4. Переход на вариант IV.

Вариант III. $T_a < 0$. Атмосфера – снег 1 – снег 2 – мёрзлый грунт (слой 3) – мёрзлый грунт (слой 2). По уравнениям (5) и граничным условиям находятся распределения температуры в слоях грунта 2, 3. При $t = t_4$, $T_a > 0$ весь снег растает за время τ_s (по (6)) и начнёт таять мёрзлый слой 3, образуя талый слой 1 ($\delta_1^0 = \varepsilon_1$). Переход на вариант I.

Вариант IV. $T_a > 0$. Атмосфера – талый грунт (слой 4) – мёрзлый грунт (слой 3) – талый грунт (слой 1) – мёрзлый грунт (слой 2). Из уравнений (5) и граничных условий определяется температура грунта в рассматриваемых слоях. Из уравнений (3) вычисляются координаты границ фазовых переходов. Если $\delta_1 > \varepsilon_1$, $\delta_3 > \varepsilon_3$, то расчёты продолжаются до $t = t_1$, $T_a < 0$. Если $\delta_3 \le \varepsilon_3$, то слой 1 аннулируется, получается вариант I (слой 1 и слой 4 объединяются). Если $\delta_1 < \varepsilon_1$, то слой 3 аннулируется, получается вариант I (слои 2 и 3 объединяются).

Численный алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе определяются распределения температуры в выделенных слоях. На втором – из условия Стефана уточняются положения границ раздела фаз.

Примеры расчётов. Выполнена серия расчётов динамики вечной мерзлоты для различных сценариев изменений погоды. При потеплении летом на 1–2 градуса глубина протаивания увеличивалась на 7–15 см (при этом температура поверхности изменялась на 2–3 градуса).

Разработанная одномерная в вертикальном направлении математическая модель термического режима вечной мерзлоты может применяться для качественных исследований районов суши с использованием наземных и дистанционных измерений температуры поверхностного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нельсон Ф. Э. *Прогноз изменения мерзлотных условий в северном полушарии: применение результатов балансовых и транзитивных расчетов по моделям общей циркуляции атмосферы.* Криосфера Земли. 1998. № 2. С. 53–57.
2. Малевский-Малевич С. П., Молькентин Е. К., Надежина Е. Д. *Модельные оценки эволюции вечной мерзлоты и распределения слоя сезонного протаивания в зависимости от климатических условий в северных регионах Западной Сибири.* Криосфера Земли. 2000. № 4. С. 49–57.
3. Аржанов М. М. [и др.] *Моделирование изменений температурного и гидрологического режимов приповерхностной мерзлоты с использованием климатических данных (реанализа).* Криосфера Земли. 2007. № 4. С. 65–69.
4. Belolipetskii V. M., Genova S. N. *A numerical model of the seasonal thawing of permafrost in the bog-lake landscapes.* J. Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2016. Т. 9. № 2. P. 158–165.
5. Белолипецкий В. М., Генова С. Н. *Применение вертикальной модели сезонно-талого слоя для района оз. Тулик (Аляска).* Вычислительные технологии. 2021. Т. 26. № 4. С. 4–15.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ОТКРЫТОЙ КАВЕРНЕ С ЛАМИНАРНЫМ ТРАНЗИТНЫМ ПОТОКОМ

Н. И. Гилёв, Д. К. Зайцев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Введение. Фундаментальный и прикладной интерес к изучению задачи об обтекании разного рода каверн набегающим потоком обусловлен возможным применением результатов в аэрокосмической индустрии и теплоэнергетике. Последним объясняется её практическая важность – подобная конфигурация встречается в различном оборудовании и установках, где присутствуют стыки деталей; примерами такой геометрии могут также служить всевозможные полости и выемки в летательных аппаратах, турбинных установках и теплообменниках. Автоколебания, возникающие при обтекании каверны, могут приводить к значительному уровню шума и вибраций, которые, как правило, рассматриваются как негативные факторы, требующие принятия специальных мер для их предотвращения. Устранение указанных проблем или снижение возможных негативных последствий предполагает, в том числе, инженерные решения, например изменение геометрии полости. Для рассматриваемого течения характерно наличие множества аспектов, требующих исследования: возвратный вихрь внутри каверны, развитие слоя смешения над каверной, передача колебаний вверх по потоку, теплообмен и многое другое. На практике чаще всего встречаются высокоскоростные турбулентные потоки сжимаемого газа, поэтому исследование ламинарного течения носит скорее фундаментальный характер. Предположение о ламинарности даёт возможность сконцентрироваться на определяющих параметрах потока, избавляет от необходимости учёта эффектов сжимаемости и исследования влияния модели турбулентности. Целью данной работы является параметрическое исследование влияния параметров ламинарного набегающего потока несжимаемой жидкости на частоту автоколебаний в прямоугольной каверне.

К настоящему времени накоплен большой объём фактического научного материала, полученного в рамках экспериментальных и численных исследований течений в данной конфигурации. В [1] исследовано влияние геометрических параметров каверны и проведён анализ полей скорости и давления. Получены соотношения, связывающие пространственные размеры ячейки, при которых происходит перестройка режимов течений, и выделены вихревые структуры. Эксперименты [2] позволили классифицировать автоколебания, проявляющиеся в различных условиях в кавернах разных конфигураций и описать механизмы их возникновения. Динамические осцилляции связаны с неустойчивостью слоя смешения над каверной и поддерживаются с помощью механизма передачи возмущений вверх по потоку. Резонансные или акустические осцилляции обусловлены эффектами сжимаемости, упругие – деформацией твёрдой границы. Неустойчивость слоя смешения в рамках линейной теории исследована в [3]. Работа [4] содержит результаты серии экспериментов по исследованию низкоскоростного течения над каверной, в которых были изучены спектры частот автоколебаний, возникающих в слое смешения, и обнаружен эффект переключения моды колебаний. Была установлена зависимость появления и характеристик автоколебаний от отношения r длины каверны к толщине пограничного слоя. Переключение моды колебаний в полостях разной длины исследовалось численно в [5]. При численном моде-

лировании дозвукового [6] обтекания прямоугольной каверны определён преимущественно динамический характер осцилляций и некоторые закономерности для режима следа. В аналогичной задаче для трансзвукового двумерного и трёхмерного потоков исследован спектр частот колебаний в зависимости от геометрических параметров выемки [7]. Установлено, что при увеличении длины каверны происходит переключение частот, а спектр частот существенно зависит от ширины. Устойчивость ламинарного и турбулентного течений сжимаемой жидкости над прямоугольной каверной изучена в [8]. В качестве базового решения для её анализа использовались стационарное ламинарное и стационарное турбулентное решение. При этом оказывается, что эти два решения довольно схожи по своей структуре, особенно в области слоя смешения. А так как возникновение автоколебаний происходит именно в слое смешения, можно предположить, что влияние определяющих параметров остаётся неизменным как для ламинарного, так и для турбулентного течения. Несмотря на то, что задача хорошо изучена, в литературе практически отсутствуют результаты исследований влияния пограничного слоя на возникающие колебания.

Постановка задачи. Рассматривается плоское ламинарное течение несжимаемой жидкости с плотностью ρ над открытой прямоугольной полостью длины L и глубины H, при этом $L = 2H$ (рис. 1(а)). Примем в качестве определяющих параметров число Рейнольдса $\mathrm{Re}_L = UL/\nu$, построенное по длине каверны, и число $\mathrm{Re}_\theta = U\theta/\nu$, построенное по толщине потери импульса θ пограничного слоя на расстоянии одной длины каверны от переднего края полости. Здесь U – скорость набегающего потока, $\nu = \mathrm{const}$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости. Основными характеристиками являются вектор скорости $\mathbf{V} = (U, V)$ и давление p. Течение описывается системой уравнений Навье – Стокса.

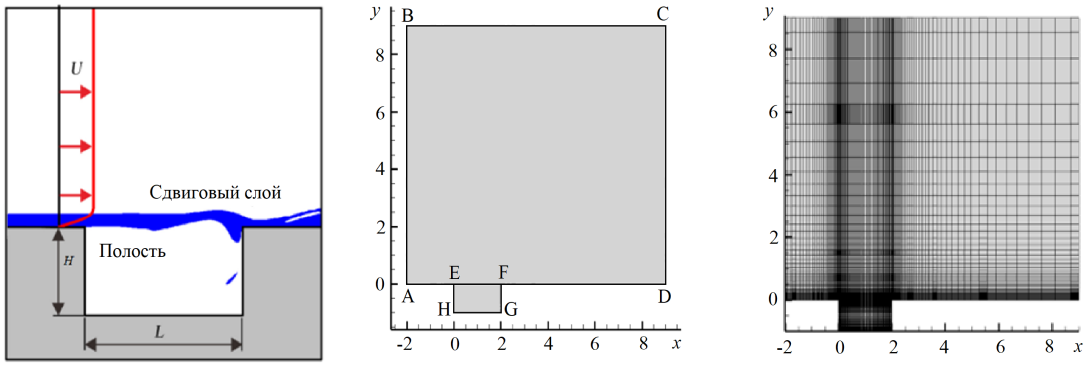


Рис. 1: Схема течения: (а) – физическая область; (б) – расчётная область; (в) – расчётная сетка

Проводится прямое численное моделирование рассматриваемого течения. Расчётная область представляет прямоугольник EFGH с пространством над каверной ABCD (рис. 1(б)). Верхняя граница находится на расстоянии $9H$ от плоскости AD. Входная граница – на расстоянии одной длины каверны от переднего края полости (точки E). Выходная граница расположена на расстоянии $7H$ от заднего края полости (точки F). На границах задаются следующие граничные условия:

- на входной границе AB задаётся профиль скорости с определённой толщиной потери импульса пограничного слоя. Профиль скорости соответствует теоретическому профилю Блазиуса. Максимальная скорость равна $U = 1$;
- на верхней границе BC – условие проскальзывания;

- на границе CD – выходное условие $p = 0$;
- на твёрдых стенках AE, EH, GH, FG, DF – условие прилипания;
- EF – межблочная граница с условием связности.

Вычислительные аспекты задачи. Использовалась структурированная сетка (рис. 1(в)) из двух блоков с прямоугольными ячейками. Сгущение узлов производилось к передней и задней стенке каверны, а также к границе EF, где расположен слой смешения. Коэффициенты сгущения были подобраны так, чтобы на пограничный слой приходилось не менее 25 точек, а также чтобы обеспечить плавное изменение размера ячеек на стыке блоков и различных сегментов. Исходная сетка содержала около 11 000 ячеек. Сетки были построены в программном пакете FLOS (Flow Studio), разработанном на кафедре ГГТ СПБПУ. Для контроля сходимости и получения данных об осцилляциях на стыке двух блоков были поставлены три точки мониторинга с координатами A(1;0), B(1.5;0) и C(1.9;0). Расчёты проводились с помощью программы SINF (вычислительного модуля пакета FLOS). Для продвижения по физическому времени использовалась трёхслойная неявная схема с дискретизацией временно́й производной со вторым порядком точности. Для связи полей давления и скорости организован итерационный процесс по методу SIMPLEC. Дискретизация пространственного оператора была основана на вычислении конвективных и диффузионных потоков через грани контрольного объёма по схеме QUICK третьего порядка точности.

Методические расчёты. Для определения оптимальных значений различных параметров выполнена серия методических расчётов. Сравнение проводилось по частоте и амплитуде колебаний поперечной скорости V в точке C(1.9;0), $\mathrm{Re}_L = 12000$, $r = L/\theta = 75$. Были исследованы сеточная сходимость, влияние граничного условия на верхней границе BC, шага по времени и количества итераций на шаг по времени. На основе результатов выполненных методических расчётов были выбраны пространственный и временны́е шаги, обеспечивающие приемлемую точность.

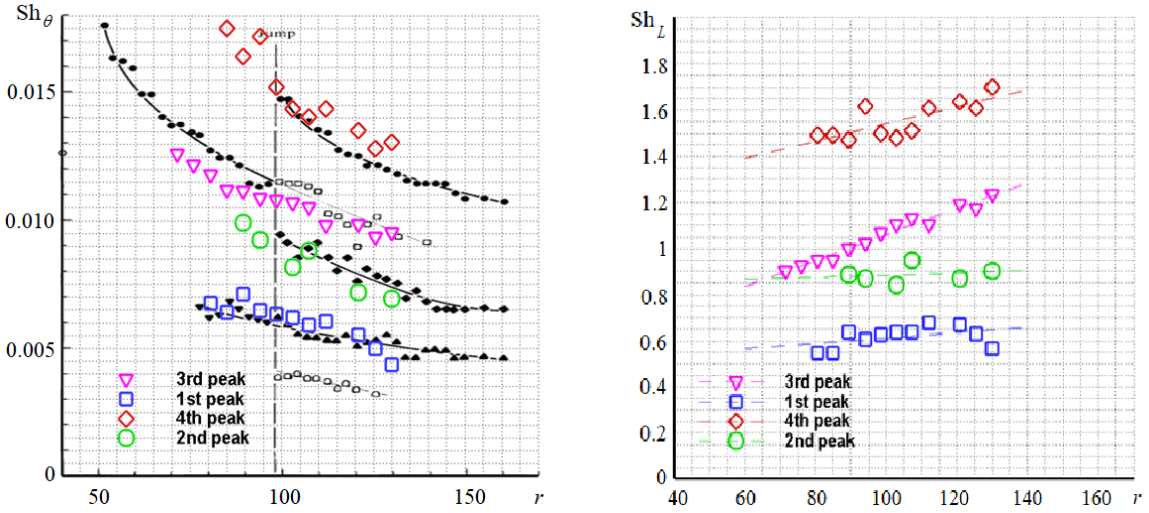
Параметрическое исследование. При фиксированной геометрии области ($L/H = 2$) рассматриваемое течение характеризуется тремя параметрами потока (очевидно, независимыми являются только два из них): Re_L, Re_θ, r. Целью параметрических исследований является определение параметра потока, который сильнее всего влияет на частоты колебаний. В первой серии расчётов варьируется число Re_L, во второй – число Re_θ.

Результаты расчётов позволяют провести качественный анализ структуры течений. Установлено, что неустойчивость слоя смешения приводит к формированию вихрей, которые двигаются вниз по потоку и «разбиваются» о заднюю стенку. В результате возникающих колебаний давления в слое смешения образуются новые вихри. Анализ динамики основных характеристик и Q-критерия позволяет сделать вывод о том, что вихри в слое смешения образуются вследствие неустойчивости Кельвина – Гельмгольца, а внутри каверны находятся два вихря с противоположной циркуляцией. При $r < 85$ в частотном спектре колебаний наблюдаются три пика, которые являются кратными частотами. Для больших r спектр гораздо богаче, наблюдаются другие частоты и их гармоники.

Исследовано влияние Re_L на спектр частот автоколебаний. Расчёты проводились при постоянном $\mathrm{Re}_\theta = 160$. Заметим, что при варьировании числа Re_L изменяется и второе число Рейнольдса Re_θ, поэтому вместе с изменением Re_L проводилось перемасштабирование толщины пограничного слоя так, чтобы Re_θ оставалось неизменным. При каждом расчёте

был построен теоретический профиль Блазиуса для заданной толщины пограничного слоя и устанавливался в качестве граничного условия на входе расчётной области. Число Re_L варьировалось в пределах от 11400 до 20900, соответственно $r = L/\theta$ изменялось в диапазоне от 71.5 до 130. Проведено сравнение результатов расчётов с результатами работы [4] в терминах числа Струхаля $\mathrm{Sh}_\theta = f\theta/U$, f – частота генерации вихрей. Имеет место хорошее совпадение экспериментальных и расчётных данных (рис. 2(а), разные цвета отвечают разным пикам в частотном спектре). Можно предположить, что число Струхаля Sh_θ изменяется в большей степени из-за изменения толщины пограничного слоя.

Результаты сравнения в плоскости параметров (r, Sh_L) показаны на рис. 2(б). Здесь $\mathrm{Sh}_L = fL/U$ – число Струхаля, построенное по длине каверны. Можно видеть, что безразмерные частоты меняются слабо, но прослеживается следующий тренд: с увеличением r число Sh_L растёт. При увеличении r в два раза частота изменяется на 15–20 %. Слабые изменения частоты соответствуют ожиданиям, что не противоречит формуле Росситера, согласно которой величина Sh_L зависит только от номера гармоники. Таким образом, число Струхаля Sh_L слабо зависит от толщины пограничного слоя. С точностью до ошибки определения частот в спектре зависимость можно считать линейной.



(а) (б)

Рис. 2: Зависимости чисел Струхаля от параметров задачи: (а) – $\mathrm{Sh}_\theta(r)$, сравнение с экспериментальными данными, цветными символами обозначены результаты расчётов, чёрными и белыми – данные экспериментов [4]; (б) – $\mathrm{Sh}_L(r)$ при $\mathrm{Re}_\theta = 160$

Для обеих серий получены почти одинаковые (в пределах погрешности определения частот в спектре) зависимости чисел Струхаля Sh_L от отношения r, что свидетельствует о слабом влиянии числа Рейнольдса на частоту автоколебаний в рассмотренном диапазоне параметров. Получено хорошее согласие результатов расчёта и эксперимента по частотам автоколебаний, однако зафиксировано значительное расхождение в распределении энергии по модам колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maull D. J., East L. F. *Three-dimensional flow in cavities.* J. Fluid Mech. 1963. V. 16(4). P. 620–632.
2. Rockwell D., Naudascher E. *Review – Self-sustaining oscillations of flow past cavities.* ASME J. Fluids Eng. 1978. № 100. P. 152–165.

3. Huerre P., Monkewitz P. A. *Absolute and convective instabilities in free shear layers.* J. Fluid Mech. 1985. V. 159. P. 151–168.
4. Knisely C., Rockwell D. *Self-sustained low-frequency components in an impinging shear layer.* J. Fluid Mech. 1982. V. 116. P. 157–186.
5. Yoshida T., Watanabe T. *Numerical simulation of flow over an open cavity with self-sustained oscillation mode switching.* Open J. Fluid Dyn. 2016. V. 6(4). P. 361–370.
6. Rowley C. W., Colonius T., Basu A. J. *On self-sustained oscillations in two-dimensional compressible flow over rectangular cavities.* J. Fluid Mech. 2002. V. 455. P. 315–346.
7. Woo C.-H., Kim J.-S., Lee K.-H. *Three-dimensional effects of supersonic cavity flow due to the variation of cavity aspect and width ratios.* J. Mech. Sci. Technol. 2008. V. 22. P. 590–598.
8. Sun Y. [et al.] *Resolvent analysis of compressible laminar and turbulent cavity flows.* AIAA J. 2020. V. 58(3). P. 1046–1055.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ИСПАРЕНИЕМ

Н. И. Гилёв[1,2], *Е. П. Магденко*[1]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*
[2]*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

Задача об устойчивости течений испаряющейся жидкости привлекает внимание исследователей в силу прикладного интереса. В последние десятилетия активно развиваются экспериментальные методы интенсификации теплообмена и повышения эффективности теплоотвода в двухфазных системах, в которых жидкий теплоноситель обдувается потоком сухого или влажного газа [1,2]. При использовании подобных систем в лабораторном и промышленном оборудовании важными вопросами являются возможность управления режимами тепломассопереноса в рабочих средах и обеспечение устойчивости конвективных течений. В настоящей работе рассматриваются трёхмерные колебания конечной амплитуды в однонаправленном двухслойном потоке жидкость – газ в условиях диффузионного испарения.

Исследуется установившееся течение испаряющейся жидкости, увлекаемой газовым потоком, в бесконечном плоском горизонтальном канале в поле силы тяжести. Граница раздела сред Г является термокапиллярной поверхностью раздела, допускающей диффузионный перенос массы за счёт испарения. За счёт прокачки газа с заданным расходом R_g на Г формируются дополнительные сдвиговые напряжения и растёт массовый расход M испаряющейся с поверхности жидкости. На стенках канала приложена линейная тепловая нагрузка, интенсивность которой характеризуется граничными температурными градиентами A_j. Индекс $j = 1$ определяет параметры нижнего (жидкого) слоя (и, соответственно, нижней границы, контактирующей с жидким теплоносителем), $j = 2$ – верхнего (газопарового). Основными механизмами, влияющими на структуру возникающих конвективных течений, являются сила плавучести, термокапиллярный эффект, прокачка газа и линейный нагрев внешних границ.

Описание конвективного тепломассообмена в рассматриваемой двухфазной системе осуществляется в рамках двусторонней модели испарительной конвекции на основе приближения Обербека – Буссинеска [3]. Определяющие уравнения включают уравнения переноса импульса, тепла и массы, допускающие точное частично-инвариантное решение ранга 1 дефекта 3 [4], которое описывает однонаправленные совместные течения испаряющейся жидкости и парогазового потока в протяжённом канале и может быть использовано для анализа зависимости характеристик системы от управляющих параметров.

На примере системы сред этанол – азот исследуется влияние величины расхода газа R_g на структуру основного течения и его устойчивость относительно возмущений конечной амплитуды. Согласно [5] для задачи об устойчивости двухслойного течения с испарением, описываемого упомянутым точным решением, относительно пространственных возмущений неприменимо преобразование Сквайра. Кроме того, в рамках линейной теории это решение предсказывает возникновение колебательной неустойчивости в пространстве параметров задачи. Поэтому рассматриваются трёхмерные колебания конечной амплитуды в заданном плоскопараллельном течении и изучается структура вторичных движений, которые описываются в виде суммы среднего движения и второй гармоники в закритичной области. Среднее вторичное движение определяется с помощью амплитудных функций

для первичных (инфинитезимальных) колебаний, которые вычисляются в результате решения линейной задачи об устойчивости. Под закритичной областью понимается область значений числа Грасгофа (или числа Марангони), при которых основное течение теряет устойчивость, и которые также находятся на основе линейной теории.

Установлено, что в системе с толщиной жидкого и газового слоёв $h_j = 3$ мм при малых расходах газа вторичное движение формируется главным образом под действием двумерной компоненты первичного колебания. В этом случае в слоях наблюдаются поперечные структуры в виде валиков, оси которых перпендикулярны основному течению. Эти вихревые структуры сносятся основным потоком в направлении приповерхностного течения в жидком слое, при этом наблюдается периодическое усиление вихрей, которое, по-видимому, обусловлено взаимодействием с другими компонентами, составляющими вторичное течение. Предполагается, что последнее представляет собой суперпозицию двумерных и трёхмерных компонент первичного колебания. С увеличением R_g проявляются трёхмерные нелинейные эффекты: в результате возникают продольные вихревые структуры, которые формируют винтовое периодическое течение. На возможность реализации подобных форм неустойчивости в слое испаряющейся жидкости, увлекаемой ламинарным газовым потоком, указывают экспериментальные данные [1].

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 22-11-00243, https://rscf.ru/project/22-11-00243/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kabov O. A. [et al.] *Evaporation and flow dynamics of thin, shear-driven liquid films in microgap channels.* Exp. Therm. Fluid Sci. 2011. V. 35(5). P. 825–831.
2. Kabov O. A., Kuznetsov V. V., Kabova Y. O. *Evaporation, dynamics and interface deformations in thin liquid films sheared by gas in a microchannel.* Encyclopedia of two-phase heat transfer and flow II: special topics and applications. V. 1: Special topics in boiling in microchannels, micro-evaporator cooling systems. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2015. P. 57–108.
3. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н. *Задачи испарительной конвекции (обзор).* ПММ. 2018. Т. 82. № 2. С. 219–260.
4. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. *Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions.* Microgravity Sci. Technol. 2020. V. 32. P. 139-154.
5. Шефер И. А. *Устойчивость стратифицированных двухфазных течений в условиях диффузионного испарения: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 1.1.9.* Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2022.

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЯЧЕЙКИ ХЕЛЕ – ШОУ

П. В. Гилёв, А. А. Папин

Алтайский государственный университет, Барнаул

В работе рассматривается следующая система квазилинейных уравнений, описывающая процесс двухфазной фильтрации в пороупругой среде [1]:

$$\frac{\partial s_i \phi \rho_i^0}{\partial t} + \nabla \cdot (s_i \phi \vec{u}_i \rho_i^0) = 0, \tag{1}$$

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \vec{g} \rho_i), \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$p_2 - p_1 = p_c(x, s), \quad s = \frac{s_1 - {s_1}^0}{1 - {s_1}^0 - {s_2}^0}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial (1-\phi) \rho_3^0}{\partial t} + \nabla \cdot [(1-\phi) \vec{u}_3 \rho_3^0] = 0, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} - \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e \right), \tag{5}$$

$$\nabla p_{tot} + \left[\eta (1-\phi) \left(\frac{\partial \vec{u_3}}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \vec{u_3}^*}{\partial \vec{x}} \right) \right] = -\rho_{tot} \vec{g}. \tag{6}$$

В системе (1)–(6) s_i, p_i, ρ_i^0, $\vec{u}_i$ – соответственно насыщенность, давление, истинная плотность и скорость i-той фазы, $K_0(\phi)$ – тензор фильтрации, k_{0i} – коэффициенты проницаемости, μ_i – коэффициенты вязкости, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести, ϕ – пористость, p_c – капиллярный скачок, $a_1(\phi)$ и $a_2(\phi)$ – коэффициенты объёмной вязкости и объёмной сжимаемости соответственно, $p_e = p_{tot} - (s_1 p_1 + s_2 p_2)$, $p_{tot} = (1-\phi) p_s + \phi (s_1 p_1 + s_2 p_2)$ – эффективное и полное давление, $\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_3^0 + \phi(s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0)$ – общая плотность.

Данная модель является обобщением известной модели Маскета – Леверетта [2]. Основное отличие состоит в том, что пористость в системе (1)–(6) считается неизвестной функцией. В работе исследуется разрешимость задач для данной модели.

Для уравнений (1)–(6) ставится начально-краевая задача в области $(x, z) \in [-H; H] \times [-L; L]$, причём $\delta = H/L$ – малый параметр. Перейдём к безразмерным переменным по правилу

$$u_i = \frac{L}{T} \bar{u}_i, \quad x = L\bar{x}, \quad t = T\bar{t}, \quad y = H\bar{y}, \quad p_i = P\bar{p}_i, \quad p_e = P\bar{p}_e, \quad p_f = P\bar{p}_f, \quad p_{tot} = P\bar{p}_{tot},$$

$$\eta = PT\bar{\eta}, \quad \widetilde{K}_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} = \frac{L^2}{PT} \bar{K}_0 \frac{k_{0i}}{\bar{\mu}_i}, \quad \rho_i g = \frac{P}{L} \bar{\rho}_i \bar{g}, \quad \rho_{tot} g = \frac{P}{L} \bar{\rho}_{tot} \bar{g},$$

тогда система, после формального предельного перехода по δ к 0, разобьётся на две подсистемы. Первая подсистема

$$\frac{\partial (1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1-\phi) u_3] = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta(1-\phi)\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)=0 \tag{8}$$

является замкнутой системой дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных u_3, ϕ. Вторая подсистема

$$\frac{\partial s_i\phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(s_i\phi u_i\right)=0,\quad \frac{\partial p_i}{\partial y}=0, \tag{9}$$

$$s_i\phi(u_i-u_3)=-K_0(\phi)\frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x}-g\rho_i^0\right),\quad i=1,2, \tag{10}$$

$$s_1+s_2=1,\quad p_2-p_1=p_c(x,s_1), \tag{11}$$

$$a_1(\phi)p_e+a_2(\phi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t}+u_3\frac{\partial p_e}{\partial x}\right)=0,\quad \frac{\partial p_{tot}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta(1-\phi)\right]\frac{\partial u_3}{\partial y}=0, \tag{12}$$

с учётом найденных решений первой подсистемы, тоже замкнута относительно неизвестных функций $s_i(x,y,t)$, $p_i(x,t)$, $u_i(x,y,t)$ $(i=1,2)$, $p_e(x,y,t)$ и $p_{tot}(x,y,t)$. Систему (9)–(12), вводя следующие обозначения:

$$f=K_0\left(\frac{k_{01}}{\mu_1}\,\rho_1 g+\frac{k_{02}}{\mu_2}\,\rho_2 g\right),\quad f_0=K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}\,\rho_1 g,$$

$$F=f_0-bf,\quad v=s_1\phi u_1+s_2\phi u_2+(1-\phi)u_3,$$

$$k(s)=\frac{k_{01}}{\mu_1}+\frac{k_{02}}{\mu_2},\quad b(s)=\frac{k_{01}}{\mu_1 k(s)},$$

$$a(s)=-\frac{1}{k(s)}\,\frac{k_{01}}{\mu_1}\,\frac{k_{02}}{\mu_2}\,\frac{\partial p_c}{\partial s},\quad v_1=s\phi u_1,$$

можно свести к эллиптико-параболической системе дифференциальных уравнений в частных производных [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0k(s)\frac{\partial p}{\partial x}+f\right)=0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(s\phi u_3-K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}\,\frac{\partial p}{\partial x}-K_0a(s)\frac{\partial s}{\partial x}-f_0\right)=0. \tag{14}$$

Далее для систем (7)–(8) и (13)–(14) ставятся начальные и граничные условия. Первая система имеет классическое решение. Для второй ищется слабое решение.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер госзадания FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gilev P. V., Papin A. A. *Filtration of two immiscible incompressible fluids in a thin poroelastic layer.* J. Applied and Industrial Mathematics. 2024. V. 18. № 2. P. 234–245.
2. Папин А. А. *Краевые задачи двухфазной фильтрации.* Барнаул, 2009.
3. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* Новосибирск : Наука, 1983.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ SH-ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ С РАЗНОТИПНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПО МЕХАНИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

А. А. Глухов, М. Н. Пачева

Донецкий государственный университет

Создаваемые на базе применения аддитивных технологий 3D печати конструкционные элементы из новых модификаций функционально-градиентных материалов получают всё более широкое и эффективное применение в таких современных научно-технических отраслях, как акустоэлектроника и приборостроение. В данной статье представлена методика получения дисперсионных соотношений, описывающих распространение горизонтально поляризованных сдвиговых упругих волн вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости слоя из функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала с различными экспоненциальными законами изменения физико-механических характеристик.

Рассматривается упругий трансверсально-изотропный слой, представления для модулей упругости $c_{ij}(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$ материала которого соответственно имеют вид

$$c_{44}(x_3) = c_{440}\exp(\lambda_1 x_3), \quad c_{66}(x_3) = c_{660}\exp(\lambda_2 x_3), \quad \rho(x_3) = \rho_0\exp(\lambda_1 x_3), \tag{1}$$

где λ_1, λ_2 – действительнозначные параметры неоднородности. Уравнение стационарного динамического деформирования волновода в случае распространяющихся вдоль координатного направления Ox_1 сдвиговых горизонтально поляризованных волн с циклической частотой ω, волновым числом k и комплексной функцией напряжённости

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_{20}(x_3)\exp(-i(\omega t - kx_1)) \tag{2}$$

записывается как результат подстановки соотношений

$$\sigma_{23} = c_{44}\partial_3 u_2, \quad \sigma_{12} = c_{66}\partial_1 u_2$$

в соответствующее динамическое уравнение упругой среды

$$\partial_1\sigma_{12} + \partial_3\sigma_{23} - \rho\ddot{u}_2 = 0, \quad \partial_j = \partial/\partial x_j.$$

С учётом представлений (1) и (2) оно принимает вид

$$\exp(\lambda_1 x_3)[c_{440}\partial_3^2 u_{20}(x_3) + c_{440}\ \lambda_1\ \partial_3 u_{20}(x_3) + \rho_0\omega^2 u_{20}(x_3)] - \exp(\lambda_2 x_3)c_{660}k^2 u_{20}(x_3) = 0. \tag{3}$$

После введения обозначений

$$u_{20}(x_3) = f(x_3), \quad \alpha = \lambda_1, \quad \beta = \rho_0\omega^2/c_{440}, \quad \gamma = c_{660}k^2/c_{440}, \quad \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$$

уравнение (3) записывается в форме

$$f'' + \alpha f' + \beta f = \gamma\exp(-\lambda x_3)f. \tag{4}$$

Для интегрирования (4) может быть применена схема итерационного алгоритма, в рамках которого

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_p + \ldots,$$
$$f_0'' + \alpha f_0' + \beta f_0 = 0, \quad f_1'' + \alpha f_1' + \beta f_1 = \gamma e^{-\lambda x_3} f_0, \quad \ldots, \tag{5}$$
$$f_p'' + \alpha f_p' + \beta f_p = \gamma e^{-\lambda x_3} f_{p-1} \quad (p = \overline{1,\infty}).$$

Соответственно, при выборе $f_0(x_3)$ в форме

$$f_0(x_3) = c_1 e^{\delta_1 x_3} + c_2 e^{\delta_2 x_3}, \quad \delta_j = -(\alpha/2) + (-1)^j[(\alpha/2)^2 - \beta)]^{1/2}, \quad j = \overline{1,2},$$

с произвольными коэффициентами c_j, могут быть построены два базисных частных решения $f^{(j)}(x_3)$ уравнения (4), отвечающие выбору $f_{0j} = A_{0j} e^{\delta_j x_3}$, $f_{pj} = A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3}$, где согласно алгоритму (5)

$$A_{pj} = \gamma[(\delta_j - p\lambda)^2 + \alpha(\delta_j - p\lambda) + \beta]^{-1} A_{p-1,j}, \quad A_{0j} = 1,$$

или

$$f^{(j)}(x_3) = e^{\delta_j x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3},$$

$$A_{pj} = \gamma^p \prod_{q=1}^{p} [(\delta_j - q\lambda)^2 + \alpha(\delta_j - q\lambda) + \beta]^{-1}.$$

Выражение для амплитудной функции динамического напряжения σ_{23} в исследуемых волновых полях может быть записано в форме

$$\sigma_{230}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_c x_3) u_{20}'(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_c x_3)\{C_1[f^{(1)}(x_3)]' + C_2[f^{(2)}(x_3)]'\},$$

$$(f^{(j)}(x_3))' = \delta_j e^{\delta_j x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} (\delta_j - p\lambda) A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3}.$$

Применительно к исследуемому волновому процессу могут быть рассмотрены следующие варианты граничных условий на гранях слоя $x_3 = 0$, $x_3 = h$:
жёсткое закрепление обеих граней

$$u_{20}(0) = u_{20}(h) = 0; \tag{6}$$

обе грани свободны

$$\sigma_{230}(0) = \sigma_{230}(h) = 0; \tag{7}$$

грань $x_3 = 0$ свободна, а грань $x_3 = h$ жёстко закреплена

$$\sigma_{230}(0) = u_{20}(h) = 0; \tag{8}$$

грань $x_3 = 0$ жёстко закреплена, а грань $x_3 = h$ свободна

$$u_{20}(0) = \sigma_{230}(h) = 0. \tag{9}$$

В итоге дисперсионные уравнения для нормальных волн исследуемого типа в случае задания на гранях слоя краевых условий (6)–(9) могут быть записаны соответственно в формах

$$f^{(1)}(0) f^{(2)}(h) - f^{(2)}(0) f^{(1)}(h) = 0,$$

$$[f^{(1)}(0)]'[f^{(2)}(h)]' - [f^{(2)}(0)]'[f^{(1)}(h)]' = 0,$$
$$[f^{(1)}(0)]'f^{(2)}(h) - [f^{(2)}(0)]'f^{(1)}(h) = 0,$$
$$f^{(1)}(0)[f^{(2)}(h)]' - f^{(2)}(0)[f^{(1)}(h)]' = 0.$$

Полученные дисперсионные соотношения являются основой для анализа спектральных характеристик нормальных горизонтально поляризованных сдвиговых упругих волн, распространяющихся вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости слоя из функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала с различными экспоненциальными законами изменения модулей упругости и параметра плотности по толщине слоя.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Miyamoto Y. [et al.] *FGM: Design, processing and applications*. Dordrecht : Kluwer Academic, 1999. 434 p.
2. Мелешко В. В. [et al.] *Упругие волноводы: история и современность*. Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51. № 2. С. 86–104.
3. Болнокин В. Е., Глухов А. А., Сторожев В. И. *Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве*. Журнал теоретической и прикладной механики. 2022. № 3(80). С. 14–19.
4. Глухов А. А., Сторожев В. И., Шалдырван В. А. *Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве*. Журнал теоретической и прикладной механики. 2022. № 4(81). С. 15–22.
5. Сторожев В. И., Глухов А. А. *Дисперсия нормальных сдвиговых волн в функционально-градиентном трансверсально-изотропном слое*. Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. 2024. № 1. С. 58–64.

АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В РАМКАХ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ИСПАРИТЕЛЬНОЙ КОНВЕКЦИИ

О. Н. Гончарова[1,2]

[1]*Алтайский государственный университет, Барнаул*
[2]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

Изучаются установившиеся конвективные двухслойные течения жидкость – газопаровая смесь в бесконечном канале с прямоугольным поперечным сечением. Математическое моделирование течений проводится на основе решений специального вида уравнений конвекции Обербека – Буссинеска, обобщённых для учёта эффектов термодиффузии и диффузионного теплопереноса в газопаровой фазе. Построенные решения являются трёхмерным обобщением решения Остроумова – Бириха, имеют групповую природу, позволяют описывать конвекцию, возникающую в двухслойной системе под действием продольного градиента температуры и поперечно направленного поля силы тяжести, и учитывать массоперенос диффузионного типа на термокапиллярной поверхности раздела.

Разработка принципов классификации трёхмерных течений с испарением и конденсацией предполагает анализ постановок краевых задач конвекции, в частности, условий, сформулированных для функций температуры и концентрации пара на границах. Заметим, что краевые задачи формулируются в бесконечных областях, и точные решения интерпретируются как решения, описывающие конвекцию на рабочем участке протяжённого канала. В результате проведённой классификации выделяются топологически разные классы течений, различные структуры теплового поля и отличия в структуре концентрационного поля, связанные с особенностями реализации процессов испарения и конденсации в двухслойной системе.

Характеристики гидродинамических, тепловых и концентрационных полей представлены на примерах рабочих систем этанол – воздух и HFE7100 – воздух. Расчёты течений в канале выполнены для экспериментальных значений скорости прокачки газа, исходной рабочей температуры, толщин слоёв жидкости и газа, для экспериментальных и модельных значений продольного градиента температуры на поверхности раздела, формирующегося за счёт её охлаждения под действием газового потока. Проведены анализ и сравнение расчётных и экспериментальных параметров массопереноса и поверхностных динамических характеристик (термокапиллярных и сдвиговых напряжений).

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 22-11-00243, https://rscf.ru/project/22-11-00243/.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ ЗОНАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

А. А. Губайдуллин, О. Ю. Болдырева, Д. Н. Дудко

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Численно исследовано распространение волны сжатия в зонально-неоднородной трещиновато-пористой среде. Рассмотрены случаи взаимодействия волны с трещиновато-пористым слоем или ограниченной трещиновато-пористой зоной в пористой среде. Исследование проведено с использованием двухскоростной модели пористой среды и трёхскоростной модели трещиновато-пористой среды [1]. На границе раздела пористая среда – трещиновато-пористая среда использовалось условие «открытые поры». Задача рассмотрена в двумерной постановке, численное решение получено методом Мак-Кормака [2].

Особенностью распространения волн в пористых и трещиновато-пористых средах является то, что продольная волна в пористой среде имеет двухволновую структуру, а в трещиновато-пористой среде – трёхволновую. Однако при анализе проблемы взаимодействия волны с границей между пористой и трещиновато-пористой средами заслуживает внимания лишь первая мода – деформационная (быстрая) волна, другие быстро затухают.

Исследование процесса взаимодействия волны сжатия со слоем трещиновато-пористой среды показало, что характер взаимодействия волн сжатия с границей между двумя средами зависит от степени различия акустических сопротивлений этих сред. Отличие трещиновато-пористой среды от пористой вызвано наличием трещин, которые имеют, как правило, малое объёмное содержание. Различие в материале скелета с точки зрения акустической жёсткости также незначительно. В итоге отношение акустических сопротивлений трещиновато-пористой и пористой сред чаще всего оказывается немногим меньше единицы. Как следствие, отражённая от первой границы с трещиновато-пористой средой волна имеет малую амплитуду по сравнению с падающей волной. Кроме того, волна сжатия в пористой среде отражается как волна разрежения. В случае присутствия слоя трещиновато-пористой среды отражение от второй границы слоя происходит без инверсии.

Если источник возмущения является локализованным (точечным), то при анализе отражённых волн следует учесть возможность наклонного падения волн, что влияет на значение коэффициента отражения.

При изучении процесса распространения волн в пористой среде при наличии ограниченной трещиновато-пористой зоны были рассмотрены случаи, когда пористая среда имеет свободную поверхность или является неограниченной. Рассматривались ситуации, когда трещиновато-пористая зона имеет границу в форме эллипса или прямоугольника. Было изучено влияние таких неоднородностей на картину распространения возмущений давления.

Актуальной является задача о распространении волн в области со свободной поверхностью, так как при сейсморазведочных работах приёмники колебаний обычно размещаются на поверхности земли. Схематическое представление такой задачи приведено на рис. 1, здесь источник возмущения расположен вблизи свободной поверхности.

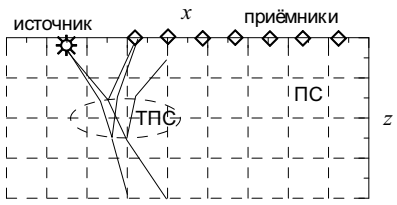


Рис. 1: Схема задачи о распространении возмущения в пористой среде с трещиновато-пористым включением

В представленных далее результатах расчётов эллиптическая трещиновато-пористая зона имеет центр с координатами $x = 4$ м, $z = 2$ м и полуоси $a_x = 0.5$ м, $a_z = 0.2$ м. Координаты и размер источника равны $x_s = 3$ м, $z_s = 0.05$ м, $r_s = 2$ см.

В качестве иллюстрации полученных результатов на рис. 2 для нескольких моментов времени показаны поля среднего полного напряжения.

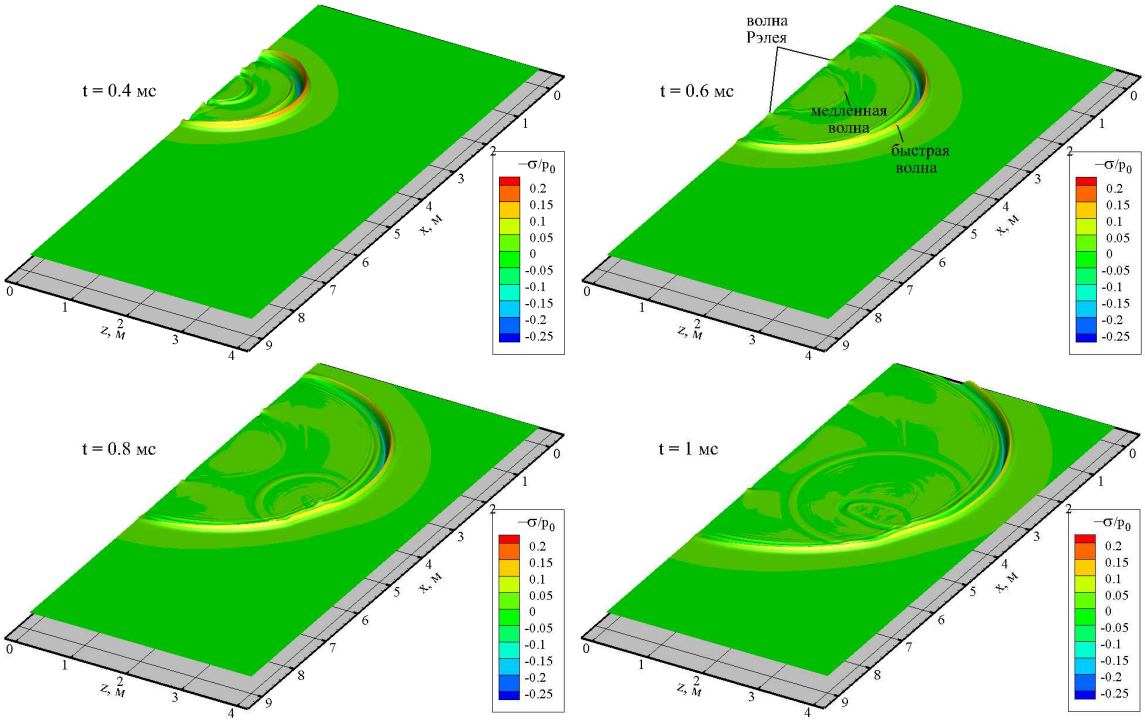


Рис. 2: Поля безразмерного полного напряжения при распространении волны сжатия в пористой среде с трещиновато-пористым включением для нескольких моментов времени; граница $z = 0$ является свободной поверхностью

Видно, что формируются быстрая и медленная волны, при этом отражённая от свободной поверхности быстрая волна почти не заметна. В отличие от случая неограниченной пористой среды образуется поверхностная волна Рэлея, скорость которой близка к скорости поперечной волны в пористой среде. Для момента времени $t = 0.6$ мс стрелками указаны продольные быстрая и медленная волны, а также поверхностная волна Рэлея. Последняя принципиально отличается от объёмных волн тем, что возмущение в ней сосредоточено лишь вблизи поверхности, что и наблюдается на рис. 2.

Для анализа влияния трещиновато-пористой зоны на процесс распространения возмущения были проведены расчёты в однородной пористой среде без трещиновато-пористой зоны. На рис. 3 показано изменение компонент скоростей частиц скелета пористой среды v_s^x, v_s^z в ряде точек на свободной поверхности $z = 0$ для пористой среды с трещиновато-пористой зоной (слева) и для однородной пористой среды (справа).

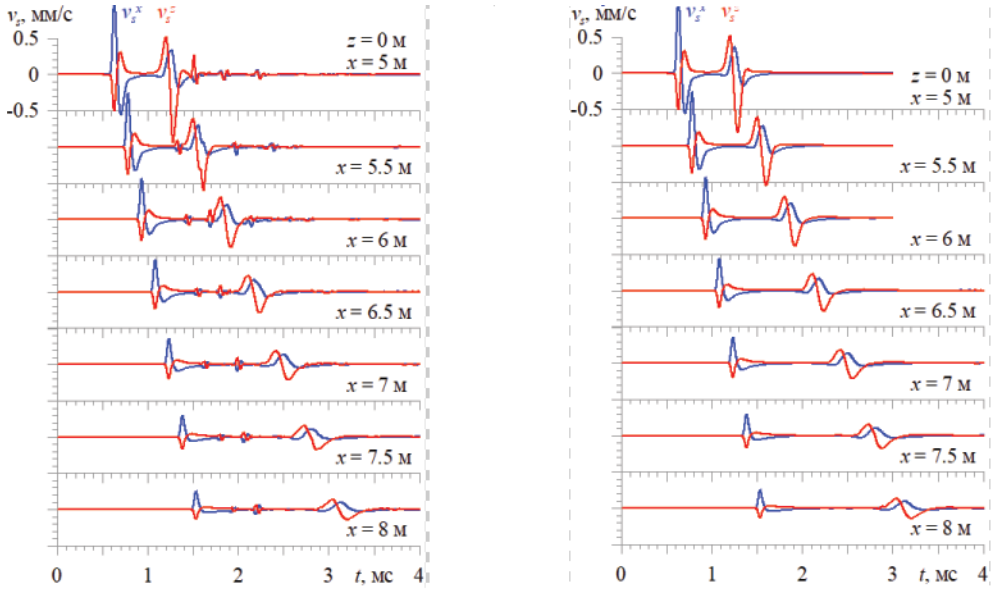


Рис. 3: Изменение компонент скоростей частиц скелета пористой среды v_s^x, v_s^z в ряде точек на свободной поверхности $z = 0$ для пористой среды с трещиновато-пористым включением (слева) и для однородной пористой среды (справа)

Для однородной пористой среды на графиках v_s^x, v_s^z (рис. 3 справа) присутствуют быстрая продольная и поверхностная волны, других волн нет. При прохождении первой, продольной волны, компоненты скорости $v_s^x(t)$, $v_s^z(t)$ изменяются одновременно. При прохождении второй, поверхностной волны, сначала изменяется v_s^z, затем при максимальном значении v_s^z начинается изменение v_s^x, т. е. движение частиц скелета происходит по эллипсу, как это и происходит в поверхностных волнах Рэлея.

В среде с трещиновато-пористой зоной кроме этих волн также хорошо заметны отражённые и переотражённые от границы с эллиптической зоной волны (рис. 3 слева). В данном расчёте временны́е интервалы между вступлениями отражённых волн для каждой из точек наблюдения составляет около 0.25–0.3 мс, что хорошо соотносится с удвоенным временем пробега продольной волной трещиновато-пористого участка (скорость быстрой волны в трещиновато-пористой среде $C_{l1} = 2900$ м/с, а оси эллипса равны 1 м и 0.4 м).

Кроме того, для обоих вариантов пористой области исследовалось влияние размеров и формы трещиновато-пористой зоны на поведение волн. Для этого сравнивались соответствующие расчётные осциллограммы, записанные на датчиках-приёмниках. Установлено, что при изменении размеров включения пропорционально изменяются временны́е интервалы между отражёнными волнами, а незначительное изменение формы включений несущественно влияет на полученный на приёмниках сигнал.

Работа выполнена в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124021500017-5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gubaidullin A. A., Boldyreva O. Yu., Dudko D. N. *Compression pulse propagation in fractured porous medium.* Lobachevskii J. Mathematics. 2023. V. 44. № 11. P. 4987–4993.
2. Gubaidullin A. A., Boldyreva O. Yu., Dudko D. N. *Approach to the Numerical Study of Wave Processes in a Layered and Fractured Porous Media in a Two-Dimensional Formulation.* Mathematics. 2023. V. 11. № 1. P. 227.

ОСОБЕННОСТИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА И ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВИБРИРУЮЩЕМ КАНАЛЕ С РАЗНОНАГРЕТЫМИ СТЕНКАМИ

А. А. Губайдуллин, А. В. Пяткова

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Рассмотрим прямоугольный канал (полость) с непроницаемыми торцами, подверженный вибрационному воздействию $A\cos(\omega t)$ с частотой ω и амплитудой A, рис. 1. Пусть длина полости L, а высота h. На стенках полости задано условие прилипания. Вертикальные стенки полости теплоизолированные, температура горизонтальных стенок постоянна. При этом температура верхней стенки T_h варьируется ($T_h > T_0$). Внутри полости находится воздух.

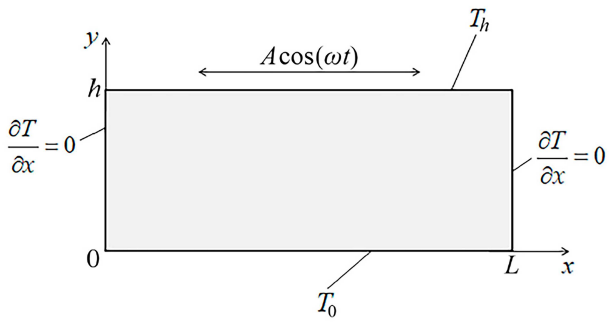


Рис. 1: Схема канала

Задача решена численно в осесимметричной постановке. Для описания процесса используется полная система уравнений Навье – Стокса, учитывающая вязкость, теплопроводность и вязкую диссипацию. Осуществлён переход в подвижную систему отсчёта, связанную с полостью. Для численного решения задачи применялась методика расчёта, описанная в [1]. Используется метод контрольного объёма, неявная численная схема по времени и смещённая равномерная расчётная сетка. Определено влияние перепада температур горизонтальных стенок, амплитуды вибрации и частоты вибрации на акустическое течение газа [2] и теплоперенос в канале.

Выявлено, что влияние увеличения температуры одной из горизонтальных стенок на акустическое течение при фиксированной частоте вибрации может проявляться поразному, в зависимости от амплитуды вибрации. В случае малой амплитуды вибрации вихри акустического течения, расположенные вблизи более холодной стенки, уменьшаются в размерах и исчезают. Вихри рэлеевского течения, расположенные вблизи более нагретой стенки, увеличиваются в размерах и заполняют почти всю область. В случае сильно выраженной нелинейности количество вихрей акустического течения, напротив, увеличивается, а средняя за период температура вблизи вертикальных стенок существенно превышает температуру более нагретой горизонтальной стенки [3].

При увеличении амплитуды вибрации происходит формирование ударных волн, амплитуду которых в некоторых случаях можно уменьшить за счёт нагрева одной из горизонтальных стенок. В случае малой амплитуды вибрации в отсутствие перепада температур

горизонтальных стенок можно показать хорошее согласование результатов с аналитическим решением, полученным в работе [4].

Увеличение нелинейности процесса за счёт увеличения амплитуды или частоты вибрации может привести к тому, что тепло будет покидать область через обе горизонтальные стенки даже при выраженном нагреве одной из них. Уменьшение нелинейности процесса приводит к равенству тепловых потоков через горизонтальные стенки.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 24-29-00394, https://rscf.ru/project/24-29-00394/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gubaidullin A. A., Pyatkova A. V. *The effects of heat transfer through the ends of a cylindrical cavity on acoustic streaming and gas temperature.* Mathematics. 2023. V. 11. P. 1840.
2. Зарембо Л. К. *Акустические течения. Мощные ультразвуковые поля.* Под ред. Л. Д. Розенберга. М. : Наука, 1968. Т. 2. С. 87–128.
3. Gubaidullin A. A., Pyatkova A. V. *Acoustic streaming and heat transfer in a rectangular channel with differently heated horizontal walls.* Lobachevskii J. Mathematics. 2024. V. 45. № 5. P. 1980–1987.
4. Hamilton M. F., Ilinskii Y. A., Zabolotskaya E. A. *Thermal effects on acoustic streaming in standing waves.* J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 114. № 6. P. 3092–3101.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ СО СТРУКТУРОЙ ТПМП НЕОВИУСА

К. В. Губарева, А. В. Ерёмин

Самарский государственный технический университет

В данной работе было проведено исследование теплопроводности в элементарных ячейках трижды периодических минимальных поверхностей Неовиуса. В исследовании использовались приближённо-аналитический метод с введением дополнительных граничных характеристик и новой искомой функции и метод конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Эти методы позволяют определять температурную функцию и плотность теплового потока без необходимости специализированного программного обеспечения и сложного вычислительного оборудования. Таким образом, исследование открывает новые возможности для анализа распределения температур в пористых материалах и определения тепловых потерь. Результаты исследования могут быть эффективно применены в разработке материалов с определёнными теплофизическими свойствами.

Введение. Создание сложных пористых структур с контролируемой геометрией и заданными механическими свойствами на различных масштабах стало возможным благодаря прогрессу в области технологий аддитивного производства [1, 2]. Особое внимание уделяется материалам и конструкциям, основанным на трижды периодических минимальных поверхностях (ТПМП), которые характеризуются регулярным повторением элементарных ячеек с нулевой средней кривизной. ТПМП-материалы представляют собой бесконечные периодические структуры без пересечений в трёхмерном пространстве. ТПМП-материалы применяются в различных областях науки, таких как физика [3], химия [4], материаловедение и биология. Эти поверхности способны делить пространство на несколько непересекающихся объёмов, обладают высокой прочностью и пористостью. Такие структуры могут быть использованы для создания каталитических поверхностей, мембранных фильтров и различного теплообменного оборудования. Учёные активно исследуют различные свойства ТПМП-структур, включая теплофизические [5] и гидродинамические характеристики материалов [6], на которых они основаны. Целью настоящей работы является исследование теплофизических свойств ТПМП-материалов. В качестве объекта исследования выбрана поверхность Неовиуса.

Постановка и метод решения задачи. Для расчёта температурного состояния пористой пластины предлагается использовать приближённо-аналитический метод, основанный на комбинировании методов введения дополнительных функций и граничных характеристик, интегрального теплового баланса. Предполагается, что функция температуры в пористой среде имеет схожее распределение с эффективной теплопроводностью сплошной среды, что позволяет применять метод гомогенизации. Основная идея заключается в усреднении теплофизических свойств материала в области исследования.

Математическая постановка рассматриваемой задачи имеет вид

$$A(1-\varphi)\frac{\partial\Theta(\xi,Fo)}{\partial Fo}=\frac{\partial\Theta^2(\xi,Fo)}{\partial\xi^2}+PoA,\quad Fo>0,\quad 0<\xi<1, \tag{1}$$

$$\Theta(\xi,0)=1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,Fo)}{\partial\xi}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Theta(1,Fo)}{\partial\xi}+\mathrm{Bi}\Theta(1,Fo)=0, \tag{4}$$

где $\Theta=(T-T_{CP})/(T_0-T_{CP})$ – безразмерная температура; $\xi=x/l$ – безразмерная координата; $Fo=(a_s\tau)/l^2$ – критерий Фурье (безразмерное время); $\mathrm{Bi}=\alpha l/\lambda$ – число Био; $A=\lambda_S/\lambda_{eff}$ – коэффициент, зависящий от характеристик пористой среды и от тепловых свойств материала каркаса; $Po=(q_V l^2)/[\lambda_{eff}A(T_0-T_{CP})]$ – критерий Померанцева (интенсивность внутренних источников теплоты).

Используя приближённо-аналитический метод, представленный в работе [7], вводим новую функцию

$$q(Fo)=\Theta(1,Fo), \tag{5}$$

$q(Fo)$ – закон изменения температуры во времени.

Решение задачи (1)–(4) отыскивается в виде полинома n-ой степени:

$$\Theta(\xi,Fo)=\sum_{i=1}^{n}b_i(Fo)\xi^{i-1}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3)–(5), получаем систему трёх алгебраических уравнений, из решения которой определяем неизвестные коэффициенты $b_i(Fo)$.

С учётом найденных коэффициентов решение задачи (1)–(4) имеет вид

$$\Theta(\xi,Fo)=\frac{(\mathrm{Bi}C_1e^K+APo)(\mathrm{Bi}\text{-}\mathrm{Bi}\xi^2+2)}{2Bi}, \tag{7}$$

где $C_1=3/(\mathrm{Bi}+3-APo/\mathrm{Bi})$ – константа интегрирования, $K=3Fo\mathrm{Bi}/A(\mathrm{Bi}+3)(\varphi-1)$, φ – пористость.

На рис. 1, 2 представлены результаты расчётов, полученные по формуле (7) при $Po=0.05; A=20; \mathrm{Bi}=25; \varphi=0.85$.

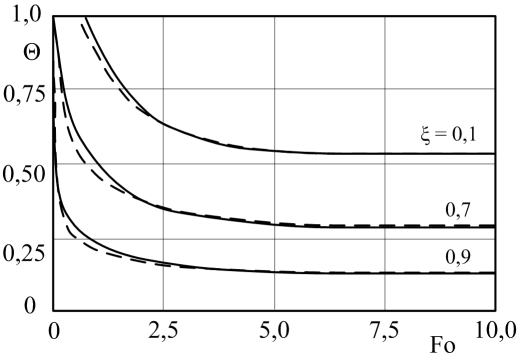


Рис. 1: Распределение безразмерной температуры в пластине по времени: ——— – расчёт по формуле (7); – – – – точное решение

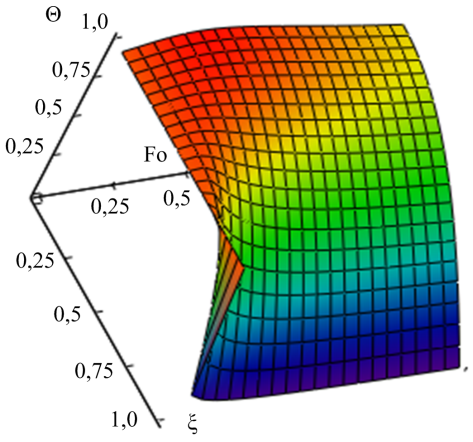


Рис. 2: Распределение температуры в пластине

Заключение. Для исследования переноса тепла через пористую стенку структуры ТПМП типа Неовиуса было найдено простое аналитическое решение, которое позволяет определять распределение температур внутри пористых материалов без использования

специализированного программного обеспечения. Также были получены выражения для расчёта температурной функции и теплового потока. Проведено сравнение результатов приближённо-аналитического метода с численным методом для верификации полученных данных, расхождение составило 5 %.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-79-10044, https://rscf.ru/project/23-79-10044/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев С. Н., Смуров И. Ю. *Перспективы развития инновационного аддитивного производства в России и за рубежом.* Инновации. 2013. № 10(180). С. 76–82.
2. Абрамов И. В. *Проблемы и перспективы цифровизации промышленных предприятий с использованием аддитивных технологи.* Вестник евразийской науки. 2023. Т. 15. № 2. С. 24–31.
3. Дьяченко С. В. [и др.] *Физико-механические свойства модельного материала с топологией трижды периодических поверхностей минимальной энергии типа гироид в форме куба.* ЖТФ. 2018. Т. 88. № 7. С. 1014–1017.
4. Шевченко В. Я. *Топологические формы будущего структурной химии новых веществ и материалов.* Физика и химия стекла. 2020. Т. 46. № 5. С. 451–463.
5. Волков Д. П., Егоров А. Г., Мироненко М. Э. *Теплофизические свойства полимерных композиционных материалов.* Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 2. С. 287–293.
6. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. *On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect.* J. King Saud University-Science. 2020. V. 32. Iss. 8. C. 3364–3371.
7. Eremin A., Gubareva K., Popov A. *Investigation of the temperature state of fuel elements with a given spatial distribution of heat sources.* AIP Conference Proceedings. 2022. V. 2456. P. 020015.

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЬДА С ДИНАМИЧЕСКИМ РАЗРУШЕНИЕМ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ЛЬДА

Е. К. Гусева[1,2], *В. П. Епифанов*[2], *В. И. Голубев*[1], *И. Б. Петров*[1]

[1]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный*
[2]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

Описание поведения льда при динамических нагрузках является значимым вопросом для решения прикладных задач Арктического региона. Большое число происходящих взаимодействий, таких как наезд ледокола на ледовое поле и столкновение дрейфующего льда с морскими сооружениями, происходит при низких скоростях, до 5 м/с. Однако в литературе подробное изучение реологии льда сосредоточено в основном на квазистатическом вдавливании [1] и высокоскоростных столкновениях [2], которые характеризуются кардинально отличным друг от друга поведением льда. При этом процесс медленного удара остаётся не до конца исследованным, что связано со сложностью изучения механизма формирования вторичной структуры льда. Реализующиеся при столкновении скорости деформации оказываются в промежуточной зоне, в которой лёд переходит от вязкого (малые скорости) к хрупкому (высокие) разрушению.

Данная работа представляет упругопластическую модель поликристаллического льда с динамическим разрушением, позволяющую качественно воспроизвести наблюдаемую в лабораторных экспериментах тонкую структуру поликристаллического льда, состоящую из гидростатического ядра (гомогенизирующий лёд) и расходящихся от него вглубь материала трещин. Для моделирования использовалась расчётная область, отражающая геометрические параметры одного из экспериментов, проведённых в Институте проблем механики РАН по методике, предложенной в работе [3]. Рассматривалась двумерная постановка задачи, аналогичная работе [4]. Ледяной диск, 286 мм в диаметре, высотой 70 мм, помещался на массивную прямоугольную плиту (400×500 мм^2) с возможностью скольжения. Над его поверхностью на расстоянии 50 мкм помещался жёсткий стальной шаровой индентор, 38 мм в диаметре, ударяющий образец с начальной скоростью 0.56 м/с.

Для описания материалов была выбрана определяющая система уравнений изотропной линейной теории упругости, сформулированная в терминах напряжений и скоростей. Во льду задавались упругие скорости 3600 м/с, 1942 м/с и плотность 917 кг/м^3, в шаре и опоре – 5700 м/с, 3100 м/с и 7800 кг/м^3. Для численного решения применялся сеточно-характеристический метод на структурированных подвижных криволинейных сетках. Данный метод позволяет точно и эффективно воспроизводить волновые процессы в объектах сложной структуры. Для расчётов была выбрана сеточно-характеристическая схема третьего порядка аппроксимации, которая монотонизировалась с помощью сеточно-характеристического критерия монотонности [5].

Во льду строилась прямоугольная сетка с шагом 1 мм, а шар делился на пять криволинейных сеток: центральный квадрат и симметричные секторы, согласованные с сетками во льду. Шаг по времени задавался равным 50 нс для выполнения условия устойчивости Куранта. Между частями шара ставилось условие полного слипания, на контакте шар–лёд и лёд–плита – проскальзывания. Нижняя и боковые стороны плиты считались неотражающими (полубесконечное пространство), остальные границы оставались свободными.

Для учёта нелинейного поведения льда в рамках расчёта применялся подход разделения по физическим процессам. В качестве упругопластической модели льда применялась

модель Прандтля – Рейса, согласно которой производится коррекция девиатора тензора напряжений для возвращения решения на поверхность текучести Мизеса (характеризуется пределом текучести k). Во льду выделялись повреждённые зоны, вызванные статическим и динамическим разрушением [6]. Во-первых, с целью воспроизведения явно выделяемых в экспериментах областей рекристаллизации льда [1] в расчётах учитывалось формирование гидростатического ядра. Его границы определялись критерием Мизеса – Шлейхера [7], в котором предел текучести линейно зависит от давления $k_0 + ap$. Внутри задавался упругий материал, в котором уменьшался в 100 раз второй параметр Ламе, а также занулялись растягивающие главные напряжения. Во-вторых, хрупкое разрушение воспроизводилось по критерию главных напряжений, согласно которому при превышении ими откольной прочности k_s в узле сетки образуется трещина (дополнительная свободная граница). При образовании нескольких трещин в узле производилась коррекция, соответствующая модели ядра.

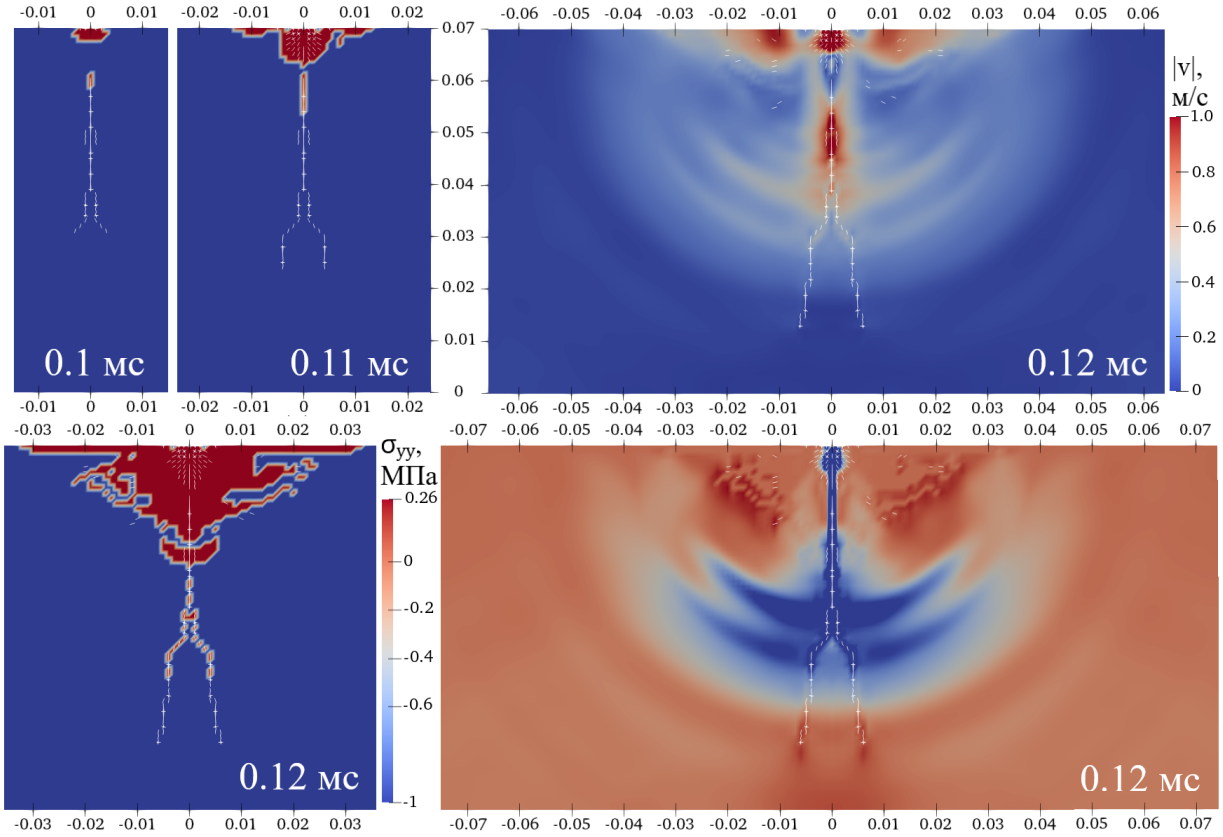


Рис. 1: Слева – рассчитанные структуры ядра (отмечены красным) и трещин (белые) в динамике. Справа – высокоамплитудная волна на волновых картинах ($|v|$) и на компоненте (σ_{yy}) тензора напряжения. Координаты указаны в метрах

В проведённых расчётах удалось воспроизвести несколько наблюдаемых в экспериментах эффектов, а также оценить влияние основных характеристик разрушения (k_0, a, k_s) на результаты. Значительное внимание стоит уделить механизмам появления и развития разрушения. На начальных этапах столкновения после распространения волны первые трещины образуются на контактирующей площадке. Оказалось, что вертикальные трещины образуются, в согласии с теорией, вблизи границы контакта, а их число растёт при

дальнейшей осадке шара с увеличением поверхности контакта. В это же время формируется ядро непосредственно под трещинами, в дальнейшем расширяясь до всей окрестности контакта. Во льду подобные слои наблюдаются в экспериментах [1, 8] при отсутствии существенного объёмного трещинообразования. Расчёты подтверждают данный факт, так как подобные структуры остаются стабильными при высоких k_0 и k_s. Однако при прохождении фронта волны в отдалении от контакта также часто начинает формироваться медианная трещина (0.1 мс на рис. 1). Её рост дополнительно стимулируется при возврате отражённой волны и продолжается вплоть до тыльной поверхности образца, иногда с разделением на две части.

В основном поведение модели регулируется параметрами k_0 и k_s, при уменьшении которых разрушенные зоны увеличиваются в размере, а коэффициент a определяет форму ядра. При задании значения a близким к 0 ядро обычно становится связной областью без внутренних разрывов с довольно гладкой поверхностью. При увеличении величины a в ядре возникают разрывы, дополнительные ответвления и отрезки, повторяющие структуры трещин (например см. 0.12 мс на рис. 1) или полностью их заменяющие. Однако слишком высокие значения a также могут уменьшить ядро в размере в связи с ростом суммарного предела упругости $k_0 + ap$.

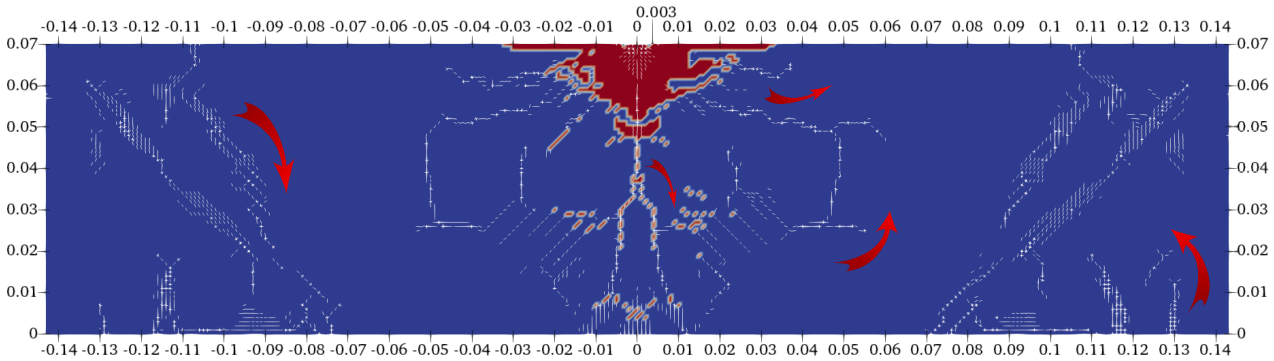


Рис. 2: Рассчитанная структура ядра (отмечен красным) и трещин (белые) в момент времени 0.23 мс. Стрелками показаны направления роста трещин. Координаты указаны в метрах

Наиболее интересное явление можно наблюдать при достаточно малых значениях k_0 и k_s (например $k_0 = k_s = 0.3$ МПа, $a = 0.1$ на рис. 1-2). В данном случае в определённые моменты времени (между 0.1 и 0.11 мс) начинается резкий экстенсивный рост трещин и ядра, генерирующий высокоамплитудное интерференционное волновое поле (справа на рис. 1). Прохождение волны вызывает дальнейшее трещинообразование в объёме материала (указано стрелками на рис. 2). Вначале формируется структура трещин в центре образца: при прямом ходе волны растут боковые трещины из ядра, а после отражения они появляются на тыльной поверхности льда. Затем многократные отклики вызывают последующее разрушение в отдалении от зоны удара. Окончательная картина разрушения образуется к моменту отскока индентора или его полной остановки на поверхности льда. При этом в материале образуется характерная площадка осадки (радиусом в 3 мм на рис. 2). Лёд, как ожидалось, не возвращается к изначальному состоянию.

В заключение отметим, что проведённые расчёты качественно воспроизводят порядок развития картины разрушения: вначале формируется ядро, от которого вглубь материала начинают распространяться трещины. Полученная связь между механизмами разрушения и волновыми процессами демонстрирует волновой метаморфизм льда, изучение которого

представляется перспективным. В качестве направления дальнейшей работы можно указать количественное исследование модели с помощью анализа деформационных кривых, а также проведение полноволновых трёхмерных расчётов.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-21-00384, https://rscf.ru/project/23-21-00384/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barrette P., Pond J., Jordaan I. *Ice damage and layer formation in small-scale indentation experiments*. Ice in the Environment: Proceedings of the 16th International Association for Hydraulic Engineering and Research (IAHR). Int. Symp. on Ice. 2002. P. 246–253.
2. Краус Е. И. [et al.] *Пробитие ледяных преград конечной толщины стальными ударниками*. ПМТФ. 2019. Т. 60. № 3. С. 146–153.
3. Епифанов В. П. *Разрушение льда при ударных взаимодействиях*. Доклады АН СССР. 1985. Т. 284. № 3. С. 599–603.
4. Guseva E. K. [et al.] *Application of elastoplastic model to the simulation of the low-speed impact on an ice plate*. In: Balandin D., Barkalov K., Meyerov I. (Eds.) MMST. 2023. CCIS. 2024. V. 1914. P. 15–27.
5. Guseva E. K., Golubev V. I., Petrov I. B. *Linear, quasi-monotonic and hybrid grid-characteristic scheme for hyperbolic equations*. Lobachevskii J. of Mathem. 2023. V. 44. № 1. P. 296–312.
6. Favorskaya A. V., Golubev V. I., Grigorievyh D. *Explanation the difference in destructed areas simulated using various failure criteria by the wave dynamics analysis*. Procedia Comput. Sci. 2018. V. 126. P. 1091–1099.
7. Коврижных А. М. *Уравнения плоского напряженного состояния при условии пластичности Мизеса-Шлейхера*. ПМТФ. 2004. Т. 45. № 6. С. 144–153.
8. Mokhtari M., Kim E., Amdahl J. *A non-linear viscoelastic material model with progressive damage based on microstructural evolution and phase transition in polycrystalline ice for design against ice impact*. Int. J. Impact Eng. 2023. V. 176. 104563.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ЗНАКОПЕРЕМЕННОМ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ГАЗА

П. Д. Данилов, Р. Н. Голых, А. В. Шалунов, В. Н. Хмелёв

Бийский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова»

Очистка газов от дымовых смесей – актуальная проблема противопожарной автоматики. На сегодняшний день системы снижения уровня задымления, реализуемые в промышленности, представляют собой системы дымоудаления и (или) системы распыления жидкости. Система на основе ультразвуковых излучателей собирает частицы в агломераты непосредственно звуковым давлением, без добавления дополнительных веществ. Однако для эффективного осаждения необходима численная модель взаимодействия частиц в звуковом поле.

Потенциальное поле скоростей обеспечивается высоким уровнем звукового давления УЗ-излучения $L_p = 180$ дБ. При размере частиц 2.5 мкм число Рейнольдса $\mathrm{Re} = 8$, что соответствует ламинарному течению с гладкими линиями тока, течение перед сферой идентично течению за сферой, что подтверждает потенциальность задачи [1].

Частицы представлены сферами, и рассматривается задача обтекания одной и двух частиц идеальной несжимаемой жидкостью, движущейся со скоростью $\boldsymbol{U}$, параллельной оси x. Для случая с одной частицей известно аналитическое решение (2), для случая с двумя сферами – направление сил взаимодействия (частицы притягиваются, если линия, соединяющая их центры, перпендикулярна $\boldsymbol{U}$).

Скорость является градиентом потенциала, то есть задача сводится к потенциальной и описывается уравнением Лапласа. Решение уравнения Лапласа для произвольной геометрии можно получить при помощи метода граничных элементов [2]. Преимущество метода в том, что значение величины рассчитывается только на границе тел, что снижает размерность задачи на 1. Ниже представлено уравнение для потенциала ψ_i для i-го полигона:

$$\frac{1}{2}\,\psi_i = \sum_{j=1}^{N} \left(\psi_j \ \text{v.p.} \iint\limits_{S_j} \frac{\partial E_{r_{0,i}}(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS - (\boldsymbol{V}_j - \boldsymbol{U}, \boldsymbol{n}_j) \ \text{v.p.} \iint\limits_{S_j} E_{r_{0,i}}(\boldsymbol{r})\, dS \right), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, переменная, по которой ведётся интегрирование, $\boldsymbol{r}_0$ – центр масс полигона, $E_{r_{0,j}}(\boldsymbol{r}) = -(4\pi\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{0,j}\|)^{-1}$ – решение уравнения $\nabla^2 E(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$, $\boldsymbol{V}_j$ – скорость j-ой частицы.

Потенциал ψ_i выражен через искомый потенциал φ_i:

$$\psi_i = \varphi_i - x \cdot U.$$

Для N полигонов получим СЛАУ из N уравнений вида (1). Итоговое решение в терминах φ получается прибавлением к столбцу $\begin{pmatrix}\psi_1 & \cdots & \psi_N\end{pmatrix}^T$ столбца значений координаты x центра масс полигонов, умноженных на $\|\boldsymbol{U}\|$.

Сферы заменяются своим приближением — геодезическим многогранником класса I с октаэдрической симметрией. В итоге получается набор из N полигонов. Коэффициенты

для уравнений потенциалов скоростей находятся по формуле (1). Вычисляемые интегралы приводятся к аналитическому или одномерному виду. Одномерные интегралы с сингулярностью вычисляются при помощи интегратора QAGS из пакета QUADPACK [3], вызываемого из SciPy. Полученная система уравнений решается при помощи метода LU-разложения, реализованного в библиотеке SciPy.

Численное решение для одной сферы сравнивается с аналитическим:

$$\varphi = xU + \frac{xUR^3}{2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\,. \tag{2}$$

Полученные значения потенциалов скоростей φ для задачи с одной сферой отличаются от аналитического решения в пределах от 0.6 % до 1.4 % (в среднем 0.7 %) при количестве полигонов сферы $N = 512$. Для задачи с двумя сферами наблюдается увеличение $\|\nabla\varphi\|$ между двумя сферами по сравнению со случаем с одной сферой. Такое изменение $\|\nabla\varphi\|$ приводит к пониженному динамическому давлению между сферами и их притяжению.

Из полученных результатов следует, что модель позволяет провести расчёт силы и выявить основные закономерности взаимодействия частиц.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 24-19-00900, https://rscf.ru/project/24-19-00900/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малюга В. С. *Численное моделирование обтекания сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости.* Прикладна гідромеханіка. 2013. № 3. С. 43–67.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов.* М. : Мир, 1987. 524 с.
3. Piessens R. [et al.] *Quadpack: A Subroutine Package for Automatic Integration.* Berlin, Heldenberg, New York, Tokyo : Springer Verlag, 1983.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

И. В. Денисова

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Большой обзор результатов по фигурам равновесия для несжимаемой жидкости дан в книге Аппелля [1]. Устойчивость различных эллипсоидальных фигур равновесия обсуждается Чандрасекхаром в [2]. Существование фигур равновесия для двухслойной несжимаемой самогравитирующей капиллярной жидкости (сплюснутых сфероидов) было получено В. А. Солонниковым в [3]. В [4] было показано существование осесимметричных фигур равновесия для двухслойной сжимаемой капиллярной жидкости. Затем удалось распространить этот метод на случай конечной массы несмешивающихся сжимаемой и несжимаемой жидкостей. Таким образом, в данной работе обсуждаем существование фигур равновесия для вращающейся двухфазной жидкости [5].

Заметим, что гравитация жидкостей не учитывается. Двухфазное тело, вращающееся с постоянной угловой скоростью, описывает, например, некоторую планету с газообразной атмосферой. Предполагаем сжимаемую жидкость баротропной, т. е. давление p^- является известной возрастающей функцией плотности ρ: $p^{-\prime}(\rho) > 0$. Пусть несжимаемая жидкость с динамической вязкостью μ^+ находится внутри сжимаемой. Сжимаемая жидкость имеет динамические вязкости μ^- и μ_1^-, причём $\mu^\pm > 0$, $2\mu^- + 3\mu_1^- \geq 0$. Кроме того, пусть $\rho = \rho(|x'|)$, $x' = (x_1, x_2, 0)$. Далее предположим, что фигуры равновесия $\mathcal{F}^+$, $\mathcal{F} \equiv \overline{\mathcal{F}^+} \cup \mathcal{F}^-$ представляют собой почти шаровые области с радиусами $R_0^\pm$ ($R_0^+ < R_0^-$) соответственно, а движение жидкостей близко к состоянию покоя, т. е. скорость $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ мала, а плотность ρ мало отличается от ступенчатой функции $\rho^\pm > 0$ (см. рис. 1). Обозначим шары $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R_0^\pm\}$ через $B_{R_0^\pm}$. Доказываем существование границ $\mathcal{G}^+$ и $\mathcal{G}^-$.

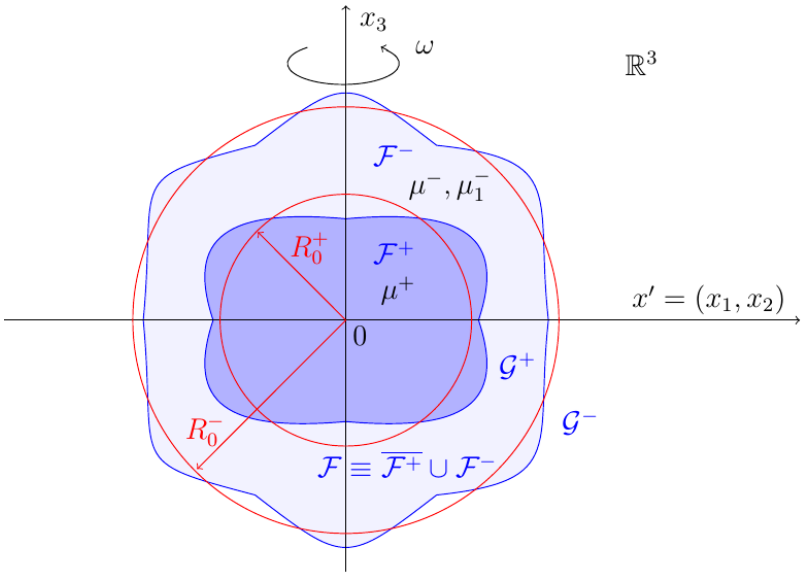


Рис. 1: Фигуры равновесия для двухфазной жидкости

Движение двухфазного жидкого тела $\mathcal{F} \equiv \overline{\mathcal{F}^+} \cup \mathcal{F}^-$, равномерно вращающегося вокруг оси x_3 с постоянной угловой скоростью ω, описывается однородными стационарными

уравнениями Навье – Стокса

$$\begin{aligned} \rho^+(\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathcal{V}}-\nabla\cdot\mathbb{T}=0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{V}}=0 \quad \text{в} \ \ \mathcal{F}^+,\\ \rho(\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathcal{V}}-\nabla\cdot\mathbb{T}=0, \qquad \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{\mathcal{V}})=0 \quad \text{в} \ \ \mathcal{F}^- \end{aligned} \tag{1}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}(\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P})\boldsymbol{n}\big|_{\mathcal{G}^-}-\sigma^-\mathcal{H}^-\boldsymbol{n}=0 \quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\ &[\boldsymbol{\mathcal{V}}]\big|_{\mathcal{G}^+}=0, \qquad [\mathbb{T}(\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P})\boldsymbol{n}]\big|_{\mathcal{G}^+}-\sigma^+\mathcal{H}^+\boldsymbol{n}=0 \quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\ &\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{на } \mathcal{G}=\mathcal{G}^+\cup\mathcal{G}^-. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь тензор напряжений задаётся по-разному в двух областях:

$$\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)=\begin{cases} \big[-p^-(\rho)+\mu_1^-\nabla\cdot\boldsymbol{v}\big]\mathbb{I}+\mu^-\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) & \text{в } \mathcal{G}^-,\\ -p^+\mathbb{I}+\mu^+\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) & \text{в } \mathcal{G}^+, \end{cases}$$

где $\big(\mathbb{S}(\boldsymbol{v})\big)_{ij}=\partial v_i/\partial x_j+\partial v_j/\partial x_i$ – удвоенный тензор скоростей деформации, $\mathbb{I}$ – единичная матрица; плотность считается равной постоянной $\rho^+>0$ в $\mathcal{F}^+$; давление сжимаемой жидкости задано известной гладкой функцией плотности $p^-(\rho)$ в $\mathcal{F}^-$; $\boldsymbol{v}_0(x)$ и $\rho_0(x)>0$ – начальные значения скорости и плотности жидкостей, $\boldsymbol{n}$ – вектор внешней нормали к объединению $\mathcal{G}$; $\mathcal{H}^\pm(x,t)$ – удвоенные средние кривизны поверхностей $\mathcal{G}^\pm$ (причём $\mathcal{H}^+<0$ в точках выпуклости $\mathcal{G}^+$ в сторону $\mathcal{F}^-$); $\sigma^-,\sigma^+>0$ – коэффициенты поверхностного натяжения на $\mathcal{G}^-$ и $\mathcal{G}^+$ соответственно. Предполагается, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ введена декартова система координат $\{x\}$. Точка означает декартово скалярное произведение. Суммирование проводится по повторяющимся индексам от 1 до 3, если они обозначены латинскими буквами, и от 1 до 2, если греческими. Векторы и векторные пространства помечаются жирным шрифтом. Запись $\nabla\cdot\mathbb{T}$ означает вектор с компонентами $(\nabla\cdot\mathbb{T})_j=\partial T_{ij}/\partial x_i$, $j=1,2,3$.

Последнее соотношение в (2) исключает перенос массы через границы жидкостей. Кроме того, пусть $|\mathcal{F}^+|=|B_{R_0^+}|\equiv 4\pi {R_0^+}^3/3$.

В покое вложенные шарообразные жидкости с равномерным распределением плотностей будут иметь кусочно-постоянное давление:

$$p(\rho^+)=\frac{2\sigma^+}{R_0^+}+\frac{2\sigma^-}{R_0^-} \quad \text{в} \ \ B_{R_0^+}, \quad p(\rho^-)=\frac{2\sigma^-}{R_0^-} \quad \text{в} \ \ B_{R_0^-}\setminus B_{R_0^+}. \tag{3}$$

Векторное поле скоростей

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(x)=\omega\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{x}\equiv\omega(-x_2,x_1,0)$$

удовлетворяет (1) вместе с градиентом функции давления

$$\nabla\mathcal{P}^+(x)=\rho^+\omega^2x'\equiv\rho^+\frac{\omega^2}{2}\nabla|x'|^2 \quad \text{в} \ \ \mathcal{F}^+, \tag{4}$$

$$\nabla\mathcal{P}^-(\rho)=\rho\omega^2x'\equiv\rho(|x'|)\frac{\omega^2}{2}\nabla|x'|^2 \quad \text{в} \ \ \mathcal{F}^-, \tag{5}$$

где $\mathbf{e}_i$ – i-ый базисный вектор, $|x'|^2=x_1^2+x_2^2$. Равенства (4), (5) эквивалентны следующим:

$$\nabla\mathcal{P}^+(x)=\rho^+\nabla\Big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2\Big), \qquad \nabla\mathcal{P}^-(\rho)=\mathcal{P}^{-'}(\rho)\nabla\Big(\frac{\omega^2}{2}\,|x'|^2\Big).$$

Пусть S_1 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $\xi = x/|x| \in S_1$. Предположим, что $\mathcal{G}^{\pm}$ задаются вращательно-симметричными функциями $R^{\pm}(\xi)$ на S_1, т. е. $R^{\pm}(\xi)$ зависят только от $|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ и ξ_3.

Подставив $\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathcal{P}$ в граничные условия (2), получим уравнения для поверхности $\mathcal{G}^-$ области $\mathcal{F}$ и для границы раздела между жидкостями $\mathcal{G}^+$:

$$\begin{aligned} \sigma^- \mathcal{H}^-(x) + \mathcal{P}(\rho) = 0, \quad x \in \mathcal{G}^-, \\ \sigma^+ \mathcal{H}^+(x) + [\mathcal{P}(\rho)]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad x \in \mathcal{G}^+, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\mathcal{H}^-$, $\mathcal{H}^+$ – удвоенные средние кривизны $\mathcal{G}^-$, $\mathcal{G}^+$ соответственно.

Предполагаем, что функция $\mathcal{P}^-(\rho)$ гладкая и её производная $\mathcal{P}^{-\prime}(\rho)$ положительна. Введём $\mathcal{Q}(\rho)$ такую, что

$$\nabla \mathcal{Q}(\rho) \equiv \frac{\mathcal{P}^{-\prime}(\rho) \nabla \rho}{\rho} = \nabla \Big(\frac{\omega^2}{2} |x'|^2 \Big). \tag{7}$$

Функция

$$\mathcal{Q}(\rho) = \int\limits_{\rho_1}^{\rho} \frac{\mathcal{P}^{-\prime}(s)}{s}\, ds, \quad \rho_1 \geq 0.$$

Поскольку

$$\mathcal{Q}'(\rho) = \frac{\mathcal{P}^{-\prime}(\rho)}{\rho} > 0,$$

то существует обратная функция $\mathcal{Q}^{-1}$ и из (7) следует, что

$$\rho = \mathcal{Q}^{-1}\Big(\frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + C^- \Big) \ \text{ в } \ \mathcal{F}^- \tag{8}$$

с произвольной константой C^-.

Подставляя ρ в уравнения (6), имеем

$$\begin{aligned} \sigma^- \mathcal{H}^-(x) + \mathcal{P}^- \Big[\mathcal{Q}^{-1} \Big(\frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + C^- \Big) \Big] = 0, \quad x \in \mathcal{G}^-, \\ \sigma^+ \mathcal{H}^+(x) + \rho^+ \Big(\frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + c^+ \Big) - \mathcal{P}^- \Big[\mathcal{Q}^{-1} \Big(\frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + C^- \Big) \Big] = 0, \quad x \in \mathcal{G}^+. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь c^+ – произвольная постоянная. Её можно найти исходя из первого равенства в (3): $\rho^+ c^+ = 2\sigma^+/R_0^+ + 2\sigma^-/R_0^-$.

Зададим массу сжимаемой жидкости, учитывая (8):

$$m^- = \int\limits_{\mathcal{F}^-} \rho(x)\, dx \equiv \int\limits_{\mathcal{F}^-} \mathcal{Q}^{-1} \Big(\frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + C^- \Big)\, dx. \tag{10}$$

Тогда получаем уравнение для определения константы C^-.

Заметим, что масса несжимаемой жидкости вычисляется по формуле

$$m^+ = \int\limits_{\mathcal{F}^+} \rho^+\, dx \equiv \frac{4\pi}{3}\, \rho^+ R_0^{+3}.$$

Ещё одним параметром задачи будем считать угловой момент β. Зададим его исходя из формулы

$$\beta \equiv \int\limits_{\cup\mathcal{F}^{\pm}} \rho(x)\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\boldsymbol{\eta}_3\,dx = \omega\rho^{+}\int\limits_{\mathcal{F}^{+}}|x'|^2\,dx + \omega\int\limits_{\mathcal{F}^{-}}\mathcal{Q}^{-1}\Big(\frac{\omega^2}{2}\,|x'|^2 + C^{-}\Big)|x'|^2\,dx, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{x}$ – i-ый вектор жёсткого вращения, $\boldsymbol{e}_i$ – i-ый базисный вектор, $i = 1, 2, 3$. При этом угловая скорость ω будет функцией от β.

Обозначим через C^s, $s \notin \mathbb{Z}$, $s > 0$, гёльдеровское пространство функций f на сфере S_1 с нормой

$$|f|_{C^s(S_1)} \equiv \max_{k=\{1,\dots,N\}}\Big(\sum_{|\boldsymbol{j}|<s}\sup_{\xi\in\zeta_k}|\mathcal{D}^{\boldsymbol{j}}f(\xi)| + \sum_{|\boldsymbol{j}|=[s]}\sup_{\xi,\bar{\xi}\in\zeta_k}|\xi-\bar{\xi}|^{-(s-[s])}|\mathcal{D}^{\boldsymbol{j}}f(\xi)-\mathcal{D}^{\boldsymbol{j}}f(\bar{\xi})|\Big),$$

где $\mathcal{D}^{\boldsymbol{j}}f$ – это $|\boldsymbol{j}|$-ая производная от f, вычисленная в локальных координатах на подобласти $\zeta_k \subset S_1$, $\bigcup_{k=1}^{N}\zeta_k = S_1$. Под $\tilde{C}^s(S_1)$ будем подразумевать подпространство $C^s(S_1)$, состоящее из вращательно-симметричных функций (т. е. функций, зависящих только от $|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ и ξ_3), которые чётны относительно ξ_3.

Сформулируем основную теорему.

Теорема. *Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ и $\mathcal{P}^{-}(\rho) \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}_+)$ – положительная возрастающая функция такая, что для неё выполняется второе равенство в* (3), $\mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. *Предположим также, что данные задачи* (1), (2) *подчиняются условию*

$$\frac{2\sigma^{-}(R_0^{-3} - R_0^{+3})}{3\rho^{-}R_0^{-4}} - \mathcal{P}^{-'}(\rho^{-}) \neq 0.$$

Тогда для произвольного β, удовлетворяющего оценке $|\beta| < \varepsilon$, при достаточно малом ε существует единственное решение $(R^{\pm}, \omega, C^{-}) \in \tilde{C}^{2+\alpha}(S_1) \times \tilde{C}^{2+\alpha}(S_1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ системы (9)–(11) *и выполняется неравенство*

$$\sum_{\pm}|R^{\pm} - R_0^{\pm}|_{C^{2+\alpha}(S_1)} + |\mathcal{Q}^{-1}(C^{-}) - \rho^{-}| + |\omega| < c|\beta|.$$

Доказательство проводится с помощью теоремы о неявной функции. Вычитая массу шарообразного слоя m^{-} из (10), представим (9)–(11) в виде нелинейного векторного уравнения

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi}) = 0, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{\Phi}_1^{\pm}, \boldsymbol{\Phi}_2, \boldsymbol{\Phi}_3^{-})$, $\boldsymbol{\varphi} \equiv (r^{\pm}, \omega, \lambda^{-})$, $r^{\pm} \equiv R^{\pm} - R_0^{\pm}$, $\lambda^{-} \equiv \mathcal{Q}^{-1}(C^{-}) - \rho^{-}$.

Анализ задачи (12) базируется на её линеаризации:

$$\boldsymbol{\Phi}'(0)\boldsymbol{\varphi} + \psi(\boldsymbol{\varphi}) = 0, \tag{13}$$

$\boldsymbol{\Phi}'(0) = (\boldsymbol{\Phi}_1^{\pm\prime}, \boldsymbol{\Phi}_2', \boldsymbol{\Phi}_3^{-\prime})(0)$ – производная Фреше от $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{\Phi}'(0)\boldsymbol{\varphi} \equiv (\psi_1^{\pm}, \psi_2, \psi_3^{-})$ – нелинейный остаток. Обращая $\boldsymbol{\Phi}'(0)$, записываем уравнение (13) в виде

$$\boldsymbol{\varphi} + \mathcal{A}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varphi}) = 0, \quad \mathcal{A} = \boldsymbol{\Phi}'(0)^{-1}.$$

Завершает доказательство тот факт, что $\mathcal{A}\boldsymbol{\psi}$ – сжимающий оператор. Ведь в этом случае теорема о неподвижной точке гарантирует существование $\boldsymbol{\varphi}$.

Таким образом, если функция давления задаётся гладкой растущей функцией плотности сжимаемой жидкости, а данные задачи удовлетворяют некоторому условию, то для двухфазной жидкости при малом угловом моменте существуют осесимметричные фигуры равновесия, близкие к вложенным шарам.

Дальнейшая цель — доказать глобальную разрешимость по времени нелинейной нестационарной двухфазной задачи с вращением при малых данных и малом отклонении формы тела от вложенных шаров. Аналогичная задача без вращения была рассмотрена в [6]. Следующий этап – доказательство стремления глобального решения нестационарной задачи к стационарному решению $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathcal{P})$ и изучение устойчивости полученных равновесных фигур. Аналогичный анализ был проведён для двухкомпонентной несжимаемой жидкости в [7].

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ИПМаш РАН (тема № 124040800009-8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппелль П. *Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости.* Л.-М. : ОНТИ, 1936. 375 с.
2. Чандрасекхар С. *Эллипсоидальные фигуры равновесия.* М. : Мир, 1973. 288 с.
3. Солонников В. А. *Задача о нестационарном движении двух вязких несжимаемых жидкостей.* Проблемы мат. анализа. 2006. Т. 34. С. 103–121.
4. Denisova I. V., Solonnikov V. A. *Equilibrium Figures for a Rotating Compressible Capillary Two-Layer Liquid.* SI: Mathematical Problems in Fluid Mechanics, Mathematics. 2024. V. 12. Iss. 1. P. 1–15.
5. Денисова И. В. *Существование фигур равновесия вращающейся капиллярной двухфазной жидкости.* Алгебра и анализ. 2024. Т. 36. № 3. С. 62–80.
6. Solonnikov V. A. *L_2–theory for two viscous fluids of different types*: *compressible and incompressible.* Алгебра и анализ. 2020. Т. 32. № 1. С. 121–186.
7. Denisova I. V., Solonnikov V. A. *Rotation problem for a two-phase drop.* J. Mathem. Fluid Mech. 2022. V. 24. Iss. 2. P. 45–70.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛЕВИТАЦИИ КАПЛИ НАД ГЛАДКОЙ ИЛИ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗА СЧЁТ ИЗБЫТОЧНОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ПАРООБРАЗОВАНИИ

В. А. Дёмин, Ф. В. Дёмин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Поведение капельных объектов до сих пор является актуальным предметом изучения теплофизики по причине наличия многочисленных приложений. С горением диспергированных объёмов топлива и просто испарением капель приходится сталкиваться в теплоэнергетике, авиастроении, космической промышленности, машиностроении и многих других отраслях науки и техники. Тепловые процессы и массоперенос в системах капель сильно зависят от взаимодействия капель с окружающей средой, в частности, от контакта с твёрдыми границами резервуаров или поверхностями тел, рядом с которыми находится капля. Границы могут быть гладкими, но могут иметь некоторую шероховатость. В работе [1] изучалось горение капель на гладких и текстурированных металлических поверхностях, что существенно влияет на теплотехнические свойства системы.

Будем рассматривать каплю жидкости, неподвижно лежащую на поверхности. При приближении к критической точке и при условии, что парообразование на границе раздела принимает достаточно интенсивное значение, в промежутке между каплей и подложкой образуется тонкий слой пара, который создает избыточное давление, и появляется подъёмная сила (рис. 1). Иными словами, между каплей и подложкой появляется стационарная прослойка пара в связи с тем, что нагрев капли увеличивается и становится настолько сильным, вследствие чего пар не успевает покинуть занимаемое пространство из-под капли, а избыточное давление увеличивается за счёт поступающего пара и приводит каплю в подвешенное состояние. В результате того, что капля отрывается от твёрдой поверхности, происходит кризис теплопередачи. Слой пара, образовавшийся под каплей, обладает значительно меньшим значением теплопроводности, чем жидкость. В литературе этот эффект называется кризисом теплопередачи.

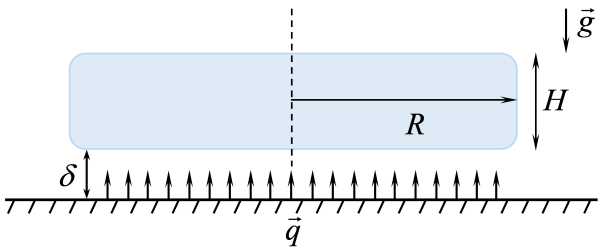


Рис. 1: Левитация капли за счёт избыточного давления пара под ней; R – радиус капли, H – высота, δ – высота, на которой парит капля, q – тепловой поток

Проведём описание капли в подвешенном состоянии в стационарных условиях. В этом случае капля за счёт интенсивного парообразования находится на некотором расстоянии от поверхности [1, 2]. Рассмотрим давление под каплей, которое состоит из двух частей:

парциального давления воздуха p_0 и пара p'. Условие равновесия будет проистекать из равенства сил тяжести и избыточного давления:

$$mg = \frac{4}{3}\,\pi abc\rho_{\text{w}} g = p'\pi R^2. \tag{1}$$

Будем предполагать, что капля под действием силы тяжести принимает форму двухосного эллипсоида, полуоси которого $a = b = R$, а $2c = H$, ρ_{w} – плотность воды. В дальнейшем получаем давление пара под поверхностью капли, нужное для уравновешивания силы тяжести:

$$p' = \frac{2}{3}\,H\rho_{\text{w}} g. \tag{2}$$

Следующим шагом нужно получить выражение для высоты левитации δ капли. С помощью закона Герца – Кнудсена можно определить формулу для плотности потока пара J для испарения с поверхности жидкости, в котором, по определению, плотностью потока является масса вещества, переносимая через единицу площади за единицу времени:

$$J = \frac{1}{S}\frac{dm}{dt}\,. \tag{3}$$

Будем рассматривать dm как массу, переносимую с нижней поверхности капли площадью S за время dt. В устойчивых стационарных условиях количество пара, получаемое в процессе испарения на нижней поверхности капли, равно выходящему из-под неё за единицу времени. Пар уходит через боковую поверхность ободка площадью $2\pi R\delta$, где δ – высота, а $2\pi R$ – его длина. Скорость будем представлять в виде расхода некоторого флюида в результате просачивания пара через воздух, как пористую среду, под действием сформировавшегося градиента давления. Для связывания скорости истечения пара с градиентом давления применяется обобщённый закон Дарси. Значение динамической вязкости будем оценивать из законов молекулярно-кинетической теории. Для простоты при выходе пара из-под капли у вектора скорости имеется только одна радиальная компонента. Тогда закон Дарси для радиальной компоненты скорости даёт

$$v_r = -\frac{\kappa}{\eta}\frac{dp'}{dr}\,. \tag{4}$$

Здесь κ – проницаемость воздуха, η – динамическая вязкость пара. Домножив оба равенства на площадь ободка, находим

$$2\pi R\delta\frac{dr}{dt} = -2\pi R\delta\frac{\kappa}{\eta}\frac{dp'}{dr}\,. \tag{5}$$

Слева получаем объём газа, проходящий через боковую границу цилиндра высотой δ за единицу времени. Далее это соотношение будем рассматривать в контексте сравнения модулей входящих туда величин. Умножим левую и правую часть уравнения (5) на плотность пара:

$$\rho_{\text{v}}\frac{dV}{dt} = 2\pi R\delta\rho_{\text{v}}\frac{\kappa}{\eta}\frac{dp'}{dr}, \tag{6}$$

найдём выражение для переноса массы пара за единицу времени

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi R\delta\rho_{\text{v}}\frac{\kappa}{\eta}\frac{dp'}{dr}\,. \tag{7}$$

Подставляя (7) в определение (3), получим равенство

$$J = \frac{2\pi\kappa R\delta\rho_{\text{v}}}{\eta S}\frac{dp'}{dr}\,. \tag{8}$$

Поток пара, исходящий с поверхности жидкости, зависит однозначно от её температуры и описывается законом Герца – Кнудсена. Поэтому в нашем случае J – это параметр задачи, являющийся функцией температуры и зависящий также от характеристик сред: испаряющейся жидкости и окружающего газа. Отсюда найдём искомую высоту левитации капли:

$$\delta = \frac{J\eta S}{2\pi\kappa R\rho_{\text{v}}}\frac{dp'}{dr}\,. \tag{9}$$

Получаем, что толщина паровой прослойки δ прямо пропорциональна плотности исходящего потока пара J и обратно пропорциональна толщине исходной капли H. Формула (9) не позволяет напрямую вычислить искомую величину δ. Дело в том, что плотность потока пара с поверхности жидкости сильно зависит от плотности несущего газа, в который происходит испарение, и концентрации пара в приповерхностном слое, в то время как распределение паров воды под каплей зависит от высоты, на которой находится капля. В результате получим фильтрацию водяного пара через несущий газ, роль которого будет играть воздух. В рассматриваемых условиях будем предполагать, что помимо диффузионного присутствует дополнительный конвективный механизм переноса. Тогда общее уравнение транспорта примеси и несущего газа, как сплошной среды, с учётом этого фактора записывается в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)C = D\Delta C, \tag{10}$$

где $\vec{V}$ – макроскопическая (массовая) скорость физически малого элемента газа, C – массовая концентрация. Для получения поля давления нужно вычислить распределение концентрации водяного пара [4].

Система является самосогласованной в том смысле, что чем сильнее происходит парообразование, тем капля должна находиться выше, что отражается на самом распределении давления. Система оказывает ответное влияние на процесс испарения, т. е. в системе имеется обратная связь. Формируется простая итерационная задача, которая включает четыре этапа: 1) задание δ (начальной высоты); 2) вычисление методом конечных разностей поля давления под каплей; 3) вычисление плотности потока J с поверхности капли и производной от давления на открытой границе расчётной области; 4) определение нового значения δ для имеющихся J и dp'/dr. А именно, фактически находятся корни неявной функциональной зависимости (9) относительно δ. Корни вычисляются простейшим и надёжным методом половинного деления.

Расчёт поля давления (второй этап) проводится путём решения эволюционного уравнения (10) с наложением стандартных граничных условий. Численное моделирование производилось методом конечных разностей в соответствии с явной схемой [5]. Сам стационарный режим испарения был найден методом установления потока, в котором использовалась разностная схема первого порядка точности по времени с шагом «вперёд». Диффузионное слагаемое в уравнении расписывалось в соответствии с формулами второго порядка точности. Конвективное слагаемое (квадратичное по градиенту давления) было аппроксимировано конечными разностями первого порядка точности «против потока».

Уравнение (10), замкнутое законом Дарси, в терминах конечных разностей имеет вид

$$\frac{p_{ij}^{n+1}-p_{ij}^{n}}{\tau}=D_c\left[\left(\frac{p_{i+1j}^{n}-p_{ij}^{n}}{h_r}\right)^2+\left(\frac{p_{ij+1}^{n}-p_{ij-1}^{n}}{2h_z}\right)^2\right]+$$
$$+D\left(\frac{p_{i+1j}^{n}-2p_{ij}^{n}+p_{i-1j}^{n}}{h_r^2}+\frac{1}{r}\frac{p_{i+1j}^{n}-p_{ij-1}^{n}}{h_r}+\frac{p_{ij+1}^{n}-2p_{ij}^{n}+p_{ij-1}^{n}}{h_z^2}\right). \tag{11}$$

Иными словами, уравнение (10) переформулировано в терминах давления. На верхней границе необходимо знать значение потока пара, здесь имеет место эффективное граничное условие в виде давления насыщения p_H при данной температуре:

$$z=H: \quad p'=p_H. \tag{12}$$

На оси симметрии ставится стандартное условие равенства нулю производной по радиальной координате

$$r=0: \quad \frac{\partial p'}{\partial r}=0, \tag{13}$$

что автоматически отсеивает решения с сингулярностью на оси симметрии.

На нижней горизонтальной границе (ввиду того, что она твёрдая) ставится условие непротекания $v_z=0$. Так как для описания фильтрации пара через воздух используется закон Дарси (4), то этого оказывается достаточно, чтобы корректно определить давление на нижней границе:

$$z=0: \quad \frac{\partial p'}{\partial z}=0. \tag{14}$$

На правой вертикальной границе имеет место ненулевая скорость вытекания пара. Для простоты положим на выходе из-под капли давление, равное атмосферному, тогда для избыточного давления p' получаем

$$r=R: \quad p'=0. \tag{15}$$

Таким образом, приведён обоснованный набор граничных условий (12)–(15) для уравнения параболического типа с нелинейностью типа квадрата градиента избыточного давления. Из соображений устойчивости расчётной схемы был выбран шаг по времени в соответствии с оценочной формулой [5] (критерий Куранта). Расчётное количество узлов в схеме по осям координат выбиралось равным $N_1=141$ (по радиальной координате) и $N_2=35$ (вдоль аксиальной координаты).

Результаты, полученные при численном моделировании, и их обсуждение. При моделировании было установлено, что выравнивание давления под поверхностью капли происходит за малый промежуток времени и составляет порядка 0.1 мс. Режим испарения успевает выйти на стационарный уровень, и его интенсивность характеризуется плотностью потока пара J (рис. 2).

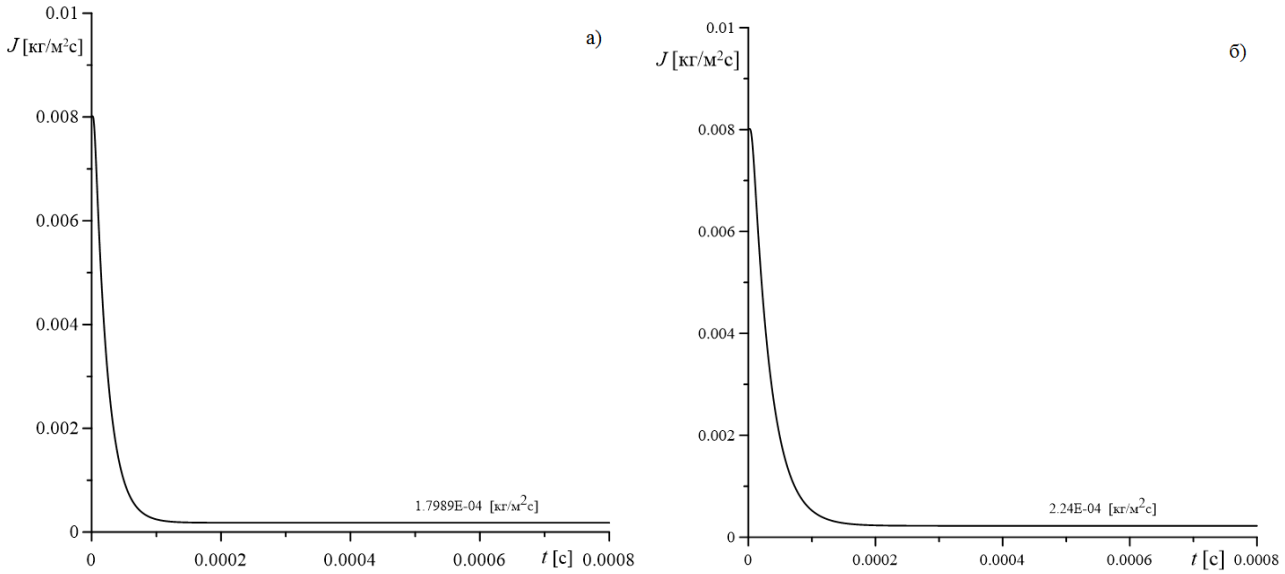


Рис. 2: Плотность потока пара под каплей при различных D_C: а) $0.53 \cdot 10^{-9}$ м^2/Па·с, б) $0.63 \cdot 10^{-9}$ м^2/Па·с

Значения параметров при проведении численного моделирования: радиус капли $R = 1.36 \cdot 10^{-3}$ м, коэффициент диффузии $D = 4.9 \cdot 10^{-5}$ м^2/с. В ходе расчёта была получена высота, на которой должна левитировать капля, $\delta = 6 \cdot 10^{-5}$ м. Полученное распределение давления пара под поверхностью капли представлено на рис. 3.

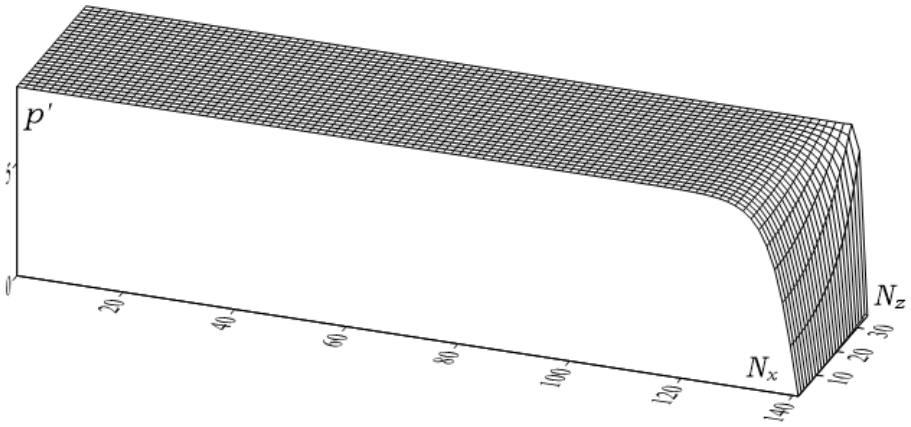


Рис. 3: Поле давления под поверхностью капли для $D_C = 0.53 \cdot 10^{-9}$ м^2/Па·с

Из этого рисунка видно, как пар практически равномерно занимает пространство под каплей и заполняет весь объём. Само поле давления снижается до атмосферного прямо непосредственно на границе капли. Также присутствует количественная разница давлений между каплей и поверхностью подложки. Из-за истечения пара с нижней поверхности капли давление там чуть больше, чем у подложки.

Обратим внимание, что данная физико-математическая модель будет справедлива только при испарении капли для температур немного ниже точки кипения. Модель «взрывного» парообразования в результате фазового перехода первого рода здесь не рассматривается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феоктистов Д. В. [и др.] *Повышение энергоэффективности систем охлаждения энергонасыщенного оборудования путем смещения кризиса теплообмена второго рода в область более высоких температур.* Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2023. Т. 334. № 4. С. 72–88.
2. Ajaev V. S., Kabov O. A. *Levitation and self-organization of droplets.* Annual Review of Fluid Mechanics. 2021. V. 53. P. 203-225.
3. Vakarelski I. U. [et al.] *Stabilization of Leidenfrost vapour layer by textured superhydrophobic surfaces.* Nature. 2012. V. 489. P. 274–77.
4. Демин В. А., Демина Т. В., Марышев Б. С. *Физико-математическая модель переноса газообразного кремния в ходе высокотемпературного силицирования углеродных композитных материалов.* Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 3. С. 48–55.
5. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М. : Наука, 1989.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРОВ КРЕМНИЯ В РЕТОРТЕ В ХОДЕ СИЛИЦИРОВАНИЯ ПОРИСТЫХ УГЛЕРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. А. Дёмин[1], *Т. В. Дёмина*[1,2]

[1]*Пермский государственный национальный исследовательский университет*
[2]*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

Парожидкофазный метод высокотемпературного силицирования углеродных материалов широко применяется для получения кремний-углеродных композиционных материалов. Одной из актуальных проблем является организация процесса доставки паров кремния в реторте от зеркала расплава к изделию. В работе [1] показано, что этот процесс может быть успешно описан модифицированным уравнением нелинейной диффузии вида

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D_c(\nabla C)^2 = D\Delta C, \tag{1}$$

где C – массовая концентрация паров кремния в несущем газе, роль которого играет аргон, D – коэффициент диффузии атомов газообразного кремния в аргоне, D_c – параметр конвективного транспорта, имеющий такую же размерность, как коэффициент диффузии. Параметр D_c выражается через материальные константы задачи следующим образом:

$$D_c = \frac{\kappa RT\rho_k}{\eta\mu_k}\,. \tag{2}$$

Здесь κ – проницаемость аргона, R – универсальная газовая постоянная, T – температура, ρ_k, μ_k – плотность и молярная масса кремния соответственно, η – динамическая вязкость паров кремния. При условии, что все величины заданы в системе СИ, параметр D_c имеет размерность м^2/с. С математической точки зрения уравнение (1) представляет собой нелинейное уравнение в частных производных второго порядка, которое в предельном случае $D_c = 0$ переходит в классическое уравнение диффузии. Ранее в [1] было найдено одномерное аналитическое решение задачи в плоской постановке, а в [2] – различные двумерные нестационарные решения этого уравнения для типичных условий технологического процесса. В частности, для системы с цилиндрической симметрией, когда источник паров кремния и изделие представляют собой коаксиальные цилиндрические оболочки, уравнение (1) имеет суперлогарифмическое аналитическое решение для распределения паров кремния в пространстве между изделием и окружающим его цилиндрическим источником:

$$C(r) = \psi \ln\left|\left[\mathrm{e}^{C_H/\psi}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) - \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)\right] \Big/ \ln\frac{R_2}{R_1}\right|. \tag{3}$$

Здесь $C(r)$ – массовая концентрация паров кремния в реторте в зависимости от радиальной координаты, R_2, R_1 – радиусы цилиндрического зеркала расплава и изделия соответственно, C_H – концентрация насыщения паров кремния, параметр ψ определяет отношение коэффициента диффузии к конвективному параметру: $\psi = D/D_c$. Решение (3) удовлетворяет однородным граничным условия типа Дирихле и показывает, что пары кремния заполняют практически всё пространство между изделием и поверхностью расплава, за исключением тонкого пограничного слоя вблизи изделия, на котором идёт поглощение кремния.

В статьях [1, 2] всегда подчёркивалось, что уравнение (1) может быть применено к решению трёхмерных задач, близких по постановке к практическим. Данная работа восполняет этот пробел. Рассмотрим задачу переноса паров кремния в реторте в трёхмерной постановке. Геометрия задачи (реторта в форме прямоугольного параллелепипеда) представлена на рис. 1.

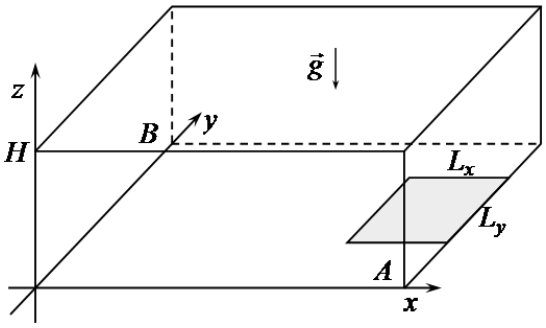


Рис. 1: Пространство реторты, зеркало расплава и система координат

Объёмные габариты реторты составляют $A = B = 0.6$ м, $H = 0.4$ м; площадь зеркала расплава равна $S = L_x \times L_y$. Вся система находится выше точки плавления кремния ($T = 1800 \div 1900\ K$). С поверхности расплава (серая область на рис. 1) идёт интенсивное испарение. Предполагается, что левая вертикальная граница, отвечающая условию $x = 0$, полностью поглощает кремний, в то время как все остальные границы являются непроницаемыми для пара. Условие поглощения кремния моделирует процесс силицирования изделия.

Задача решается методом конечных разностей в соответствии с явной схемой. При аппроксимации пространственных производных использовалась гибридная разностная схема с центральными и односторонними разностями. Для простоты использовалась прямоугольная равномерная сетка 101:101:51. Под зеркало расплава выделялся 21:21 узел.

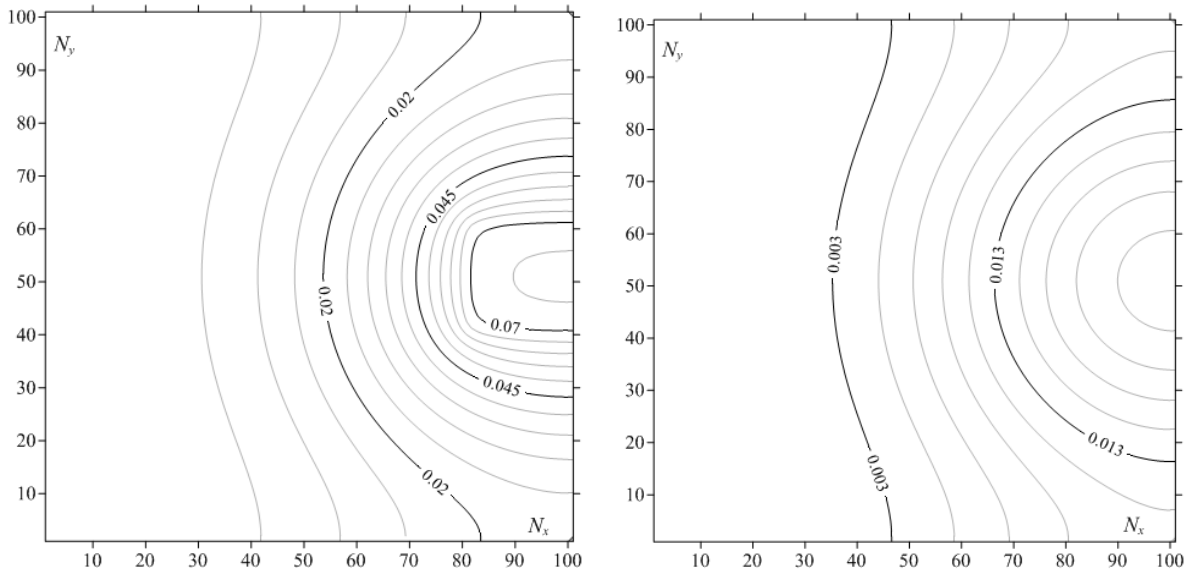


Рис. 2: Поля концентрации в горизонтальном сечении на высоте $z = 1.6$ см (слева) и при $z = 23$ см (справа), демонстрирующие трёхмерное продвижение концентрационного фронта от зеркала расплава к изделию

Численное моделирование показало, что за время порядка $\tau = 1$ с в реторте устанавливается стационарное распределение, при котором пары кремния ожидаемо заполняют практически весь объём реторты, за исключением тонкого слоя вблизи изделия, на поверхности которого имеет место их полное поглощение. Это время приблизительно соответствует расчётам [1, 2] в одномерной и двумерной постановках. Профили концентрации в горизонтальном сечении на разной высоте приведены на рис. 2 для момента времени $\tau = 0.03$ с при $D = 0.7$ м^2/с, $D_c = 22.1$ м^2/с.

Расчёты показывают, что за весьма короткое время на поверхности изделия формируется крутой профиль концентрации паров кремния, который отвечает за возникновение интенсивного потока массы внутрь образца. Расчёт этого потока для конкретных параметров изделия позволяет количественно предсказывать время его полного силицирования.

Работа выполнена в рамках бюджетной темы № 124021600038-9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демин В. А., Демина Т. В., Марышев Б. С. *Физико-математическая модель переноса газообразного кремния в ходе высокотемпературного силицирования углеродных композитных материалов.* Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 3. С. 48–55.
2. Агеева М. В., Демин В. А., Демина Т. В. *Физико-математическая модель доставки паров кремния в ходе высокотемпературного силицирования пористых углеродных материалов.* Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. 2024. № 18(3). С. 49–61.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ИСТОЧНИКИ В ПОРШНЕВОЙ МОДЕЛИ О ДЛИННЫХ ВОЛНАХ НА ВОДЕ, ПОРОЖДЁННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ СМЕЩЕНИЯМИ В УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

С. Ю. Доброхотов[1], *Х. Х. Ильясов*[1], *О. Л. Толстова*[2]

[1]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*
[2]*Московский государственный строительный университет*

В рамках поршневой модели распространение длинных волн в бассейне с переменным дном $D(x)$, например волн цунами, описывается задачей Коши для двумерного волнового уравнения превышения свободной поверхности $\eta(x_1, x_2, t)$ со скоростью $c(x_1, x_2) = \sqrt{gD(x)}$, где g – ускорение свободного падения. При этом начальные условия задаются в виде $\eta|_{t=0} = \eta_0(x_1, x_2)$, $\partial\eta/\partial t|_{t=0} = 0$. В предположении о достаточно медленном изменении функции D и локализованности функции источника η_0 в работах С. Ю. Доброхотова, В. Е. Назайкинского, С. Я. Секерж-Зеньковича, Б. Тироцци, А. И. Шафаревича и др. (см. обзор [1]) были получены эффективные асимптотические формулы, связывающие, в частности, локальную структуру профиля распространяющейся волны с преобразованием Фурье от функции η_0. Для некоторых специальных источников соответствующие функции профиля имеют простую форму и выражаются через элементарные функции, что позволяет сравнительно легко анализировать некоторые характеристики распространяющейся волны, например локальную амплитуду, диаграмму направленности и т. д. С другой стороны, в недавних работах С. Ю. Доброхотова, О. Л. Толстовой, С. Я. Секерж-Зеньковича и Х. Х. Ильясова в рамках модели Подъяпольского (см. [2]) были получены формулы для профилей распространяющихся волн в слое жидкости над упругим основанием, порождённых пространственно-локализованными источниками в упругом основании. Эти формулы получены в предположении, что граница между слоем жидкости и упругим основанием – горизонтальная плоскость. Оказалось, что при достаточно разумных предположениях эти формулы удаётся сильно упростить, представив их в виде элементарных функций и показать, что, во-первых, спустя некоторое время порождаемые волны описываются волновым уравнением (с постоянной скоростью), во-вторых, легко увидеть зависимость порождаемых волн от глубины залегания и размеров подземного источника, направления смещений в нём, глубины слоя жидкости и др. Основное соображение в этом докладе состоит в выборе полученных таким образом источников в исследовании распространения длинных волн в рамках поршневой модели для бассейна с переменным дном, что позволяет учесть влияние характеристик подземного источника на параметры длинных волн, распространяющихся над переменным дном, включая процесс их набега на берег.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 24-11-00213, https://rscf.ru/project/24-11-00213/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И. *Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем*

дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений. УМН. 2021. Т. 76. № 5(461). С. 3–80.

2. Доброхотов С. Ю., Ильясов Х. Х., Толстова О. Л. *Простые решения линейной задачи о возбуждении длинных волн на поверхности жидкости источником в упругом основании.* МТТ. 2020. № 4. С. 126–139.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СУЛЬФИДНО-ОКСИДНОЙ КОРРОЗИИ ЖАРОПРОЧНОГО СПЛАВА ПРИ ДЕЙСТВИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Д. С. Дудин, И. Э. Келлер

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Введение. Жаропрочные сплавы подвергаются оксидно-сульфидной коррозии в агрессивной среде при повышенных температурах в ходе сгорания топлива. Это приводит к образованию хрупкого коррозионного поверхностного слоя и пористого подслоя, истощённого легирующими элементами, что значительно снижает прочностные характеристики материалов. В результате критически важные компоненты авиадвигателей, такие как лопатки и диски турбины высокого давления и вентилятора, подвержены риску разрушения [1, 2]. Прочностные испытания в условиях агрессивной среды являются дорогостоящими и требуют значительных временны́х затрат. Поэтому важным становится использование математических моделей для изучения коррозионных процессов. Они позволяют прогнозировать поведение материалов в условиях эксплуатации, а значит, делают возможным оптимизацию геометрических параметров деталей и позволяют разрабатывать меры для повышения ресурса.

В ходе коррозии компоненты материала движутся навстречу агрессивным компонентам внешней среды (взаимно диффундируют) и химически реагируют друг с другом, образуя оксидные и сульфидные фазы. Этот процесс сопровождается изменениями микроструктуры и формированием поверхностных остаточных напряжений, ускоряющих коррозию. Математическая модель должна учитывать все эти особенности. Также важно, чтобы модель имела минимальное количество идентифицируемых физико-механических параметров, что сделает возможным её применение в инженерных расчётах.

Для этой цели формулируется связанная модель, описывающая взаимную диффузию компонентов и химические реакции под воздействием напряжений, учитывающая специфику сульфидно-оксидной коррозии жаропрочного сплава.

Модель сульфидно-оксидной коррозии. Основываясь на работах [3–5], предлагается наиболее простой механизм сульфидно-оксидной коррозии жаропрочной стали, изображённый на рис. 1. На первом этапе молекулярный кислород проникает в металл и химически реагирует с ионами Fe и Cr, движущимися навстречу кислороду (рис. 1, а). После достижения критической толщины коррозионного слоя молекулярная сера проникает в повреждённый поверхностный слой и доходит до границы металл–оксид, где начинает реагировать с Cr и проникать вглубь металла, стимулируя взаимную диффузию и развитие сульфидного подслоя (рис. 1, б). Продолжается наращивание оксидных слоёв вместе с окислением сульфида хрома, что освобождает серу для дальнейшего проникновения вглубь металла, из-за чего присутствие серы в оксидных слоях не наблюдается (рис. 1, в). В модели учитываются процессы окисления железа и хрома, сульфидирование хрома и окисление сульфида хрома

$$4\mathrm{Fe} + 3\mathrm{O_2} \to 2\mathrm{Fe_2O_3}, \quad 4\mathrm{Cr} + 3\mathrm{O_2} \to 2\mathrm{Cr_2O_3},$$
$$4\mathrm{Cr} + 3\mathrm{S_2} \to 2\mathrm{Cr_2S_3}, \quad 2\mathrm{Cr_2S_3} + 3\mathrm{O_2} \to 2\mathrm{Cr_2O_3} + 3\mathrm{S_2}$$

в ходе взаимной диффузии реагентов Fe, Cr, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{S_2}$. Продукты химических реакций $\mathrm{Fe_2O_3}$, $\mathrm{Cr_2O_3}$, $\mathrm{Cr_2S_3}$ полагаются диффузионно неподвижными.

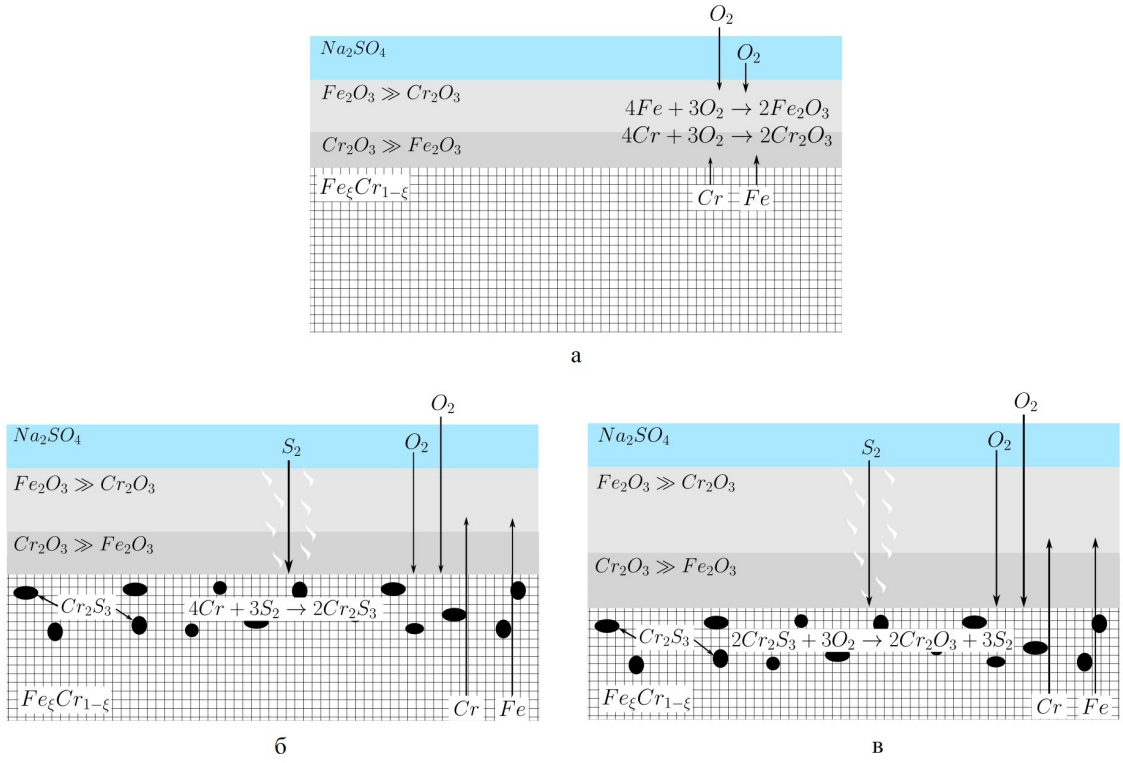


Рис. 1: Механизм сульфидно-оксидной коррозии жаропрочной стали: а) формирование защитной оксидной плёнки, б) проникновение серы через дефектную структуру и образование сульфидных частиц, в) оксидация сульфидов с увеличением толщины оксидного слоя

Химический механизм учтён в формулировке связанной модели процессов взаимной диффузии, химических реакций и упругого деформирования. Модель позволяет описывать эволюцию слоистой структуры корродирующего поверхностного слоя и исследовать влияние напряжений на скорость его распространения. Для описания связанных процессов взаимной диффузии и деформирования принята необходимая гипотеза связи между конвективной скоростью и скоростью диффузионной системы отсчёта, что позволило рассматривать взаимную диффузию в рамках маркерного подхода, содержащего больше информации о диффузионных процессах по сравнению с материальным [6]. Через удовлетворение второго закона термодинамики диффузионные потоки и скорости протекания химических реакций оказались зависимыми от напряжений, что наряду с гипотезой связи скоростей обеспечивает связность уравнений диффузии и механики.

Модель применяется для решения одномерной задачи распространения фронта корродирующего вещества в нагруженном полупространстве. Задача решается численно с помощью средств программного продукта *COMSOL Multiphysics*. Проникновение агрессивных веществ вызвало упругий отклик материала, что благодаря связности модели повлияло на скорость взаимной диффузии компонентов и химических реакций. Потенциально модель может быть дополнена балансовыми уравнениями, характеризующими эволюцию пор в сульфидном подслое и деградацию прочностных свойств оксидного слоя со временем, для описания наблюдаемых в экспериментах [7] микроструктурных изменений.

Заключение. Предложена модель связанных процессов взаимной диффузии, химических реакций и упругих деформаций многокомпонентной сплошной среды, описывающая

сульфидно-оксидную коррозию жаропрочного сплава при действии напряжений. Модель учитывает четыре основные реакции: окисление железа и хрома, сульфидирование хрома и окисление сульфида хрома. Последняя реакция обеспечивает дальнейшее распространение оксидного слоя и обеспечивает отсутствие серы в нём, что соответствует эксперименту. Использование подхода классической необратимой термодинамики позволило получить физические уравнения для диффузионных потоков и скоростей протекания химических реакций, которые зависят от напряжённого состояния в материале. Описание взаимной диффузии в деформируемой среде проводилось с помощью комбинированного подхода, предполагающего совмещение маркерного описания диффузии с материальным описанием деформаций. Предлагаемый подход обладает преимуществами перед существующими. Поставлена одномерная задача коррозии полупространства, решаемая численными методами, с помощью которой показано существенное влияние напряжений на скорость и глубину проникновения коррозионного слоя.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-15-2024-535 от 23.04.2024).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sabri K., Si-Chaib M. O., Gaceb M. *Assessment of the degraded high-pressure blades in a land-based gas turbine.* J. Fail. Anal. Prev. 2021. Т. 21. № 2. С. 689–704.
2. Давыдов М. Н., Гишваров А. С., Рахимов А. Х. *Моделирование долговечности лопаток турбин в условиях коррозионно активной среды.* Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20. № 1. С. 71–80.
3. Lee W. H., Lin R. Y. *Oxidation, sulfidation and hot corrosion of intermetallic compound Fe_3Al at 605 °C and 800 °C.* Mathem. Chem. Phys. 1999. Т. 58. С. 231–242.
4. Sun H., Liu J. *Hot corrosion of Fe-Cr-Ni multi-principal element alloys in Na_2SO_4+25$NaCl$ mixture salts at 700–900 °C.* Intermetallics. 2024. Т. 166. С. 108203.
5. Ning Z. [et al.] *Effects of imposed stresses on high temperature corrosion behaviour of T91.* Corros. Sci. 2021. V. 189. P. 109595.
6. Дудин Д. С., Келлер И. Э. *Обзор подходов к формулировке связанных уравнений взаимной диффузии в вязкоупругом теле.* Хим. физ. мезоскопия. 2022. Т. 24. № 3. С. 296–311.
7. Пойлов В. З. [и др.] *Высокотемпературная газовая коррозия никелевого сплава.* Материаловедение. 2021. Т. 3. С. 42–46.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ВДОЛЬ ГРАНИЦ КЛАССИЧЕСКИХ И ОБОБЩЁННЫХ КОНТИНУУМОВ

В. И. Ерофеев[1], *А. М. Антонов*[2]

[1]*Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФБНУ «ФИЦ Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова–Грехова РАН», Нижний Новгород*
[2]*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*

В 1885 г. английский учёный Джон Уильям Стретт (лорд Рэлей) теоретически показал, что вдоль плоской границы твёрдого упругого полупространства с вакуумом или достаточно разрежённой средой (например с воздухом) могут распространяться волны, амплитуда которых быстро спадает с глубиной [1]. Эти волны, названные поверхностными волнами Рэлея, в зависимости от частотного диапазона имеют разную прикладную направленность.

Практически сразу стало очевидно, что волны Рэлея в низкочастотном диапазоне (1–100 Гц) являются основным типом волн, наблюдающихся при землетрясениях. Поэтому они подробно изучаются в сейсмологии вот уже без малого 140 лет [2].

Основные закономерности распространения рэлеевских волн следующие: отсутствие дисперсии, т. е. скорость волны не зависит от её частоты и является постоянной для каждого материала; эта скорость достигает 0,87–0,96 от скорости объёмной сдвиговой волны; вектор перемещений имеет продольную и поперечную составляющие, при этом поперечная составляющая всегда превосходит продольную [3].

В цикле работ В. В. Крылова [4–10], удостоенном медали Рэлея в 2000 г. (присуждаемой Акустическим институтом Великобритании и часто называемой Нобелевской премией по акустике), посвящённом изучению упругих колебаний земли, порождённых поездами и автотранспортными средствами, был теоретически предсказан очень высокий уровень земных вибраций, генерируемых высокоскоростными железнодорожными составами, движущимися со скоростью выше, чем скорость поверхностных волн Рэлея в грунте. Теория Крылова была экспериментально подтверждена в 1997–1998 гг. (при его непосредственном участии) на новой высокоскоростной линии в Швеции (Гётеборг – Мальмё), где на некоторых участках трассы скорость волн Рэлея была всего 45 м/с, и скорости движения поездов в 160 км/час было достаточно, чтобы наблюдать эффект. Обнаруженный эффект стал называться «грунтовым вибрационным ударом» (по аналогии с известным звуковым ударом от сверхзвукового самолета), а источники генерации стали именовать «транс-рэлеевскими поездами» [11].

Заметим, что о существовании критических скоростей движения нагрузок по рельсовым направляющим, при превышении которых в направляющих генерируются изгибные волны, говорилось ещё в первой половине 1980-х годов в работах А. И. Весницкого и его школы [12–17], а также в работе Г. Г. Денисова, В. В. Новикова и Е. К. Кугушевой [18]. Однако вычисленные тогда критические скорости показали практическую недостижимость эффекта генерации транспортным средством изгибных волн в направляющих. Нагрузке оказалось легче преодолеть скорость волны Рэлея в грунте, находящемся под рельсовой направляющей, а сама направляющая при этом выступила, наряду с системой шпал и балластом, посредником между источником генерации волн и средой, в которой эти волны возникли.

В настоящее время задачи об устойчивости движения высокоскоростных объектов по рельсовым направляющим, задачи генерации изгибных и изгибно-крутильных волн в рельсовых направляющих признаны актуальными, и результаты их решения служат методическим и расчётным сопровождением при постановке экспериментов по высокоскоростному разгону (или торможению) полезной нагрузки на ракетных треках: работы С. И. Герасимова, В. И. Ерофеева, В. Г. Камчатного, Е. Е. Лисенковой и других [19–25]; работы С. А. Астахова, В. И. Бирюкова, А. В. Катаева и других [26–32].

С 1950-х годов широкое применение нашли рэлеевские волны ультразвукового диапазона (частоты порядка 106 Гц). При их помощи можно контролировать состояние поверхностного слоя образца (выявление поверхностных и околоповерхностных дефектов в образцах из металла, стекла, пластмассы и других материалов – ультразвуковая поверхностная дефектоскопия). Влияние свойств поверхностного слоя образца на скорость и затухание рэлеевских волн позволяет использовать последнее для определения остаточных напряжений поверхностного слоя металла, термических и механических свойств поверхностного слоя образца [33, 34].

С начала 1970-х годов рэлеевские волны с частотами 107–1010 Гц широко применяются в миниатюрных твёрдотельных устройствах по обработке информации (ультразвуковые линии задержки, полосовые фильтры, ответвители сигналов, фазовращатели и т. д.). На стыке ультра- и гиперзвуковой акустики, с одной стороны, и электроники твёрдого тела, с другой стороны, возникла отрасль знаний, именуемая акустоэлектроникой [35, 36]. На закономерностях акустоэлектроники базируется такая важная индустрия, как микроэлектроника на поверхностных акустических волнах (ПАВ) [37–40].

В механике деформируемого твёрдого тела, наряду с моделью классического континуума, широко применяются модели обобщённых континуумов [41–60]. К числу наиболее известных обобщённых (неклассических) континуумов принадлежат микрополярная среда Коссера и градиентно-упругая среда.

При работе с микрополярной средой следует различать предложенные братьями Эженом и Франсуа Коссера в 1909 году общую модель континуума, каждая точка которого обладает тремя трансляционными и тремя вращательными степенями свободы [61], её частный случай – модель микрополярной среды со стеснённым вращением частиц [62], а также редуцированную модель микрополярной среды, предложенную Л. Шварцем, Д. Джонсоном и С. Фенгом в 1984 г. [63–66].

Модель градиентно-упругой среды тоже появилась в начале 20-го века и связана с именами Лёру (1911, 1913) [67, 68] и Джеремилло (1929) [69].

Поверхностные волны Рэлея в рамках модели континуума Коссера изучались в работе А. Е. Лялина, В. А. Пирожкова, Р. Д. Степанова [70]; в цикле работ М. А. Кулеша, В. П. Матвеенко, И. Н. Шардакова [71–73]. В рамках градиентно-упругой модели они практически не изучались. Исключение составляет работа П. Ф. Сабодаша, И. Г. Филиппова [74], в которой на основании проведённых исследований утверждается, что скорость поверхностной волны в градиентно-упругой среде может превосходить скорость объёмной сдвиговой волны, что представляется невероятным с точки зрения канонов классического континуума.

Цикл работ А. М. Антонова, В. И. Ерофеева и других [75–82] посвящён изучению генерации волн Рэлея источниками, движущимися вдоль границ неклассических упругих полупространств, а также выявлению особенностей проявления дисперсии и затухания таких волн.

В [75, 76, 79, 81] в рамках математической модели градиентно-упругого континуума, т. е.

среды, напряжённо-деформированное состояние которой описывается тензором деформаций, вторыми градиентами вектора перемещений, несимметричным тензором напряжений и тензором моментных напряжений, рассмотрена задача о генерации возмущений источником, движущимся с постоянной скоростью вдоль границы полупространства. В результате аналитических исследований показано, что источник, движущийся с постоянной дозвуковой скоростью вдоль границы градиентно-упругого полупространства, будет генерировать поверхностные упругие волны. Такие волны, в отличие от классических поверхностных волн Рэлея, обладают дисперсией. Амплитуды перемещений изменяются в зависимости от величины нагрузки движущегося источника, а также его скорости, и неограниченно возрастают при приближении скорости источника к скорости сдвиговой волны. При движении нормальной нагрузки со сверхзвуковыми скоростями вслед за источником возмущений образуется коническая поверхность (конус Маха), ограничивающая область, в которой сосредоточены возмущения от невозмущённой области упругого полупространства. Поверхность конуса Маха является огибающей системы волн, порождённых нормальной нагрузкой. Замечено, что при увеличении скорости источника возмущений угол между образующими конуса и его осью уменьшается. При этом поперечная составляющая вектора перемещения превосходит продольную только в околоповерхностном слое полупространства, что является отличительной особенностью распространения волн от движущегося источника на больших скоростях.

В [78, 80, 82] выявлены особенности распространения поверхностных волн Рэлея вдоль свободной границы полупространства среды Коссера (редуцированная модель), заключающиеся в том, что поверхностная волна в этом случае обладает дисперсией, в плоскости «фазовая скорость – частота» для таких волн имеются две дисперсионных ветки: нижняя («акустическая») и верхняя («оптическая»). С увеличением частоты фазовая скорость волны, относящейся к нижней дисперсионной ветке, убывает. Фазовая скорость волны, относящейся к верхней дисперсионной ветке, возрастает с увеличением частоты. Фазовая скорость поверхностной волны во всём частотном диапазоне превосходит фазовую скорость объёмной сдвиговой волны. Рассчитаны напряжения и перемещения, возникающие в зоне распространения поверхностной волны.

В [71–73] для изотропного упругого полупространства с повреждённостью его материала сформулирована самосогласованная задача, включающая в себя динамическое уравнение теории упругости и кинетическое уравнение накопления повреждений в материале среды. Эта система уравнений с граничными условиями, выражающими отсутствие напряжений на границе полупространства, сводится к комплексному дисперсионному уравнению. Поверхностная волна, бегущая вдоль границы повреждённого полупространства, затухает в направлении распространения, а низкочастотные возмущения обладают частотно-зависимой диссипацией и дисперсией. Показано, что дисперсия имеет аномальный характер. Установлено, что с уменьшением значения коэффициента повреждённости в области высоких частот значение фазовой скорости растёт, а групповой скорости – падает. На очень низких частотах обе скорости растут при снижении коэффициента повреждённости.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 20-19-00613, https://rscf.ru/project/20-19-00613/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh. *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.* Proceedings of the London Mathematical Society. 1885. V. s1–17. Iss. 1. P. 4–11.
2. Aki K., Richards P. G. *Quantitative seismology: theory and methods.* 2-nd edition. University Science Books. 2002.
3. Викторов. И. А. *Звуковые поверхностные волны в твердых телах.* М. : Наука, 1981.
4. Krylov V. V. *On the theory of railway-induced ground vibrations.* J. de Physique IV. 1994. V. 4. Iss. C5. P. 769–772.
5. Krylov V. V., Ferguson C. C. *Calculation of low-frequency ground vibrations from railway trains.* Applied Acoustics. 1994. V. 42. P. 199–213.
6. Krylov V. V. *Generation of ground vibrations by superfast trains.* Applied Acoustics. 1995. V. 44. P. 149–164.
7. Krylov V. V. *Vibrational impact of high-speed trains: effect of track dynamics.* J. Acoustical Society of America. 1996. V. 101. Iss. 6. P. 3121–3134.
8. Krylov V. V. *Spectra of low-frequency ground vibrations generated by high-speed trains on layered ground.* J. Frequency Noise, Vibration and Active Control. 1997. V. 16. Iss. 4. P. 257–270.
9. Krylov V. V. *Effect of track properties on ground vibrations generated by high-speed trains.* Acustica-Acta Acustica. 1998. V. 84. Iss. 1. P. 78–90.
10. Krylov V. V. *Ground vibration boom from high-speed trains.* J. Frequency Noise, Vibration and Active Control. 1999. V. 18. Iss. 4. P. 207–218.
11. Krylov V. V. (Eds.) *Noise and vibration from high speed trains.* London: Thomas Telford Publishing. 2001.
12. Весницкий А. И. [и др.] *Излучение упругих волн в одномерных системах с равномерно движущимися закреплениями и нагрузками.* Горький : Препринт № 160 НИРФИ, 1982.
13. Весницкий А. И., Крысов С. В. *Возбуждение колебаний в движущихся упругих элементах конструкций.* Машиноведение. 1983. № 1. С. 16–17.
14. Крысов С. В., Сьянов С. А. *Излучение упругих волн в одномерных системах движущимся источником.* ПМТФ. 1983. № 1. С. 149–153.
15. Крысов С. В., Устинова Т. В., Уткин Г. А. *К вопросу о движении нагрузки вдоль балки на упругом основании.* Проблемы машиностроения. Киев : Наукова думка, 1985. № 23. С. 28–32.
16. Сьянов С. А. *Вынужденные колебания экипажа, движущегося вдоль упругой направляющей.* Проблемы машиностроения. Киев : Наукова думка, 1985. № 23. С. 12–14.
17. Весницкий А. И. *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками.* М. : Физматлит, 2001.
18. Денисов Г. Г., Новиков В. В., Кугушева Е. К. *К задаче об устойчивости одномерных безграничных упругих систем.* ПММ. 1985. Т. 49. № 6. С. 164–168.
19. Бутова С. В. [и др.] *Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека.* Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 1. С. 3–8.
20. Герасимов С. И. [и др.] *Оценка резонансоопасных гармоник при колебаниях упругой направляющей с движущимся по ней двухопорным объектом.* Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. № 4. С. 412–424.

21. Герасимов С. И., Ерофеев В. И. *Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека.* Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 3. С. 25–27.
22. Герасимов С. И. [и др.] *Постановка испытаний топливных упаковочных комплектов на ракетном треке.* Глобальная ядерная безопасность. 2017. Т. 3. № 24. С. 66–74.
23. Ерофеев В. И., Колесов Д. А., Лисенкова Е. Е. *Движение двухопорного экипажа по направляющей ракетного трека.* Вестник научно-технического развития. 2017. Т. 11. № 123. С. 18–23.
24. Герасимов С. И. [и др.] *Условие на скользящем контакте в анализе устойчивости движения ступени на ракетном треке.* Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 3. С. 21–27.
25. Герасимов С. И. [и др.] *Динамика деформируемых систем, несущих движущиеся нагрузки (обзор публикаций и диссертационных исследований).* Вестник научно-технического развития. 2021. Т. 1. № 160. С. 25–47.
26. Астахов С. А., Бирюков В. И., Катаев А. В. *К вопросу об эффективности гидродинамического торможения при высокоскоростных испытаниях на ракетно-рельсовом треке.* Сибирский аэрокосмический журнал. 2022. Т. 23. № 4. С. 641–656.
27. Астахов С. А., Бирюков В. И., Катаев А. В. *Оценка эффективности различных методов торможения сохраняемого оборудования на ограниченной длине при высокоскоростных трековых испытаниях изделий авиационной и ракетной техники.* Вестник Московского авиационного института. 2022. Т. 29. № 2. С. 20–34.
28. Астахов С. А., Бирюков В. И., Катаев А. В. *Экспериментальное определение проводимости вибраций элементами конструкции ракетной каретки при высокоскоростных трековых испытаниях авиационной техники.* Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24. № 1. С. 44–63.
29. Астахов С. А., Бирюков В. И., Боровиков Д. А. *Алгоритм моделирования вибрационных воздействий при трековых испытаниях авиационной и ракетной техники* Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24. № 2. С. 291–308.
30. Астахов С. А. [и др.] *Моделирование аэродинамического взаимодействия при трековых испытаниях изделий авиационной техники.* Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2023. № 72. С. 5–20.
31. Астахов С. А., Бирюков В. И., Катаев А. В. *Методика определения характеристик вибропрочности конструкции при высокоскоростных трековых испытаниях авиационной техники.* Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2023. № 72. С. 75–90.
32. Астахов С. А., Бирюков В. И., Тимушев С. Ф. *Акустико-вихревой механизм возбуждения вибраций элементах конструкции каретки при трековых испытаниях изделий авиационной техники.* Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2023. № 73. С. 74–87.
33. *Неразрушающий контроль: Справочник в 7 т.* Под ред. академика РАН В. В.Клюева. Т. 3: Ультразвуковой контроль. И. Н. Ермолов, Ю. В. Ланге. М. : Машиностроение, 2004.
34. Углов А. Л., Ерофеев В. И., Смирнов А. Н. *Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации.* Под ред. академика РАН Ф. М. Митенкова. М. : Наука, 2009.

35. Гуляев В. А. *Акустоэлектроника (исторический обзор).* Успехи физических наук. 2005. № 8. С. 887–895.
36. Алексеев С. Г. [и др.] *Некоторые тенденции развития акустоэлектроники сверхвысоких частот.* Успехи физических наук. 2005.№ 8. С. 895–899.
37. Синицына Т. В. [и др.] *Фильтры с высокой входной мощностью для радиотехнических систем: фильтр на ПАВ на частоту 216 МГц.* Теория и техника радиосвязи. 2015. № 3. С. 28–39.
38. Никитов С. А. [и др.] *Фильтры на ПАВ с высокой входной мощностью для систем связи, радиолокационной и телекоммуникационной аппаратуры на номинальную частоту 2170 МГц.* Радиотехника и электроника 2016. Т. 61. № 4. С. 389–394.
39. Синицына Т. В. [и др.] *СВЧ фильтры с высокой входной мощностью для систем и аппаратуры передачи и обработки информации.* Труды НИИР. 2016. № 1. С. 26–31.
40. Прапорщиков В., Орлов В. *Фильтры на ПАВ. Краткий обзор и методы расчета.* СВЧ-электроника. 2020. № 3. С. 40–47.
41. Maugin G. A., Metrikine A. V. (Eds.) *Mechanics of generalized continua: on hundred years after the cosserats.* Advances in Mathematics and Mechanics. Berlin : Springer, 2010. V. 21.
42. Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (Eds.) *Mechanics of generalized continua.* Advanced Structured Matherials. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag. 2011. V. 7.
43. Altenbach H., Forest S., Krivtsov A. (Eds.) *Generalized continua as models with multi-scale effects or under multi-field actions.* Advanced Structured Matherials. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag. 2013. V. 22.
44. Altenbach H., Eremeyev V. A. (Eds.) *Generalized continua – from the theory to engineering applications.* Wien : Springer, 2013.
45. Bagdoev A. G., Erofeyev V. I., Shekoyan A. V. *Wave dynamics of generalized continua.* Advanced Structured Matherials. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag. 2016. V. 24.
46. Altenbach H., Forest S. (Eds.) *Generalized continua as models for classical and advanced materials.* Advanced Structured Matherials. Switzerland, Springer-Verlag. 2016. V. 42.
47. Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics.* Advanced Structured Matherials. Singapore : Springer, 2017. V. 51.
48. Dell'Isola F., Eremeyev V., Porubov A. (Eds.) *Advanced in mechanics of microstructured media and structures.* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2018. V. 87.
49. Altenbach H. [et al.] (Eds.) *Generalized models and non-classical approaches in complex materials.* Advanced Structured Materials. Springer International Publishing AG. Cham : Springer, 2018. V. 90.
50. Altenbach H. [et al.] (Eds.) *Dynamical processes in generalized continua and structures.* Advanced Structured Materials. Springer Nature Switzerland AG. Cham : Springer, 2019. V. 103.
51. Sumbatyan M. (Eds.) *Wave dynamics, mechanics and physics of microstructured metamaterials.* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2019. V. 109.
52. Altenbach H., Muller W., Abali B. (Eds.) *Higher gradient materials and related generalized continua.* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2019. V. 120.
53. Abali B., Giorgio I. (Eds.) *Developments and novel approaches in nonlinear solid body mechanics.* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2020. V. 130.
54. Dell'Isola F., Igumnov L. (Eds.) *Dynamics, strength of materials and durability in multiscale mechanics.* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2021. V. 137.

55. Abramian A. K., Andrianov I. V., Gaiko V. A. (Eds.) *Nonlinear dynamics of discrete and continuoussystems.* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2021. V. 139.
56. Altenbach H., Eremeyev V. A., Igumnov L. A. (Eds.) *Multiscale solid mechanics.* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2021. V. 141.
57. Erofeev V. I., Pavlov I. S. *Structural modeling of metamaterials.* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2021. V. 144.
58. Altenbach H., Amabili M., Mikhlin Yu. V. (Eds.) *Nonlinear mechanics of complex structures.* Advanced Structured Matherials. Cham : Springer, 2021. V. 157.
59. Giorgio I. [et al.] (Eds.) *Theoretical analyses, computations, and experiments of multiscale materials.* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2022. V. 175.
60. Altenbach H. [et al.] (Eds.) *Sixty shades of generalized continua.* Advanced Structured Matherials. Cham : Springer, 2023. V. 170.
61. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables.* Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909.
62. Nowacki W. *Theory of asymmetric elasticity.* Pergamon Press. 1986.
63. Schwartz L. M., Jonson D. L., Feng S. *Vibrational models in granular materials.* Physical Review Letters. 1984. V. 52. № 10. P. 831–834.
64. Grekova E. F. *Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains.* Mathem. Mech. Solids. 2016. V. 21. № 1. P. 73–93.
65. Grekova E. F. *Waves in elastic reduced Cosserat medium with anisotropy in the term coupling rotational and translational strains or in the dynamic term.* Advanced Structured Materials. 2018. V. 87. P. 143–156.
66. Grekova E. F. *Reduced enhanced elastic continua as acoustic metamaterials.* Advanced Structured Materials. 2019. V. 103. P. 253–268.
67. Le Roux J. *Etude geometrique de la flexion, dans les deformations infinitesimaleg d'nn milien continu.* Ann. Ecole Norm. Super. 1911. V. 28. P. 523–579.
68. Le Roux J. *Recherchesg sur la geometrie beg deformatios finies.* Ann. Ecole Norm. Super. 1913. V. 30. P. 193–245.
69. Jaramillo T. J. *A generalization of the energy function of elasticity theory.* Dissertation. Departamrnt of Mathematics. University of Chicago. 1929.
70. Лялин А. Е., Пирожков В. А., Степанов Р. Д. *О распространении поверхностных волн в среде Коссера.* Акустический журнал. 1982. Т. 28. № 6. С. 838–840.
71. Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н. *Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера.* ПМТФ. 2005. Т. 46. № 4. С. 116–124.
72. Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н. *О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера.* Акустический журнал. 2006. Т. 52. № 2. С. 227–235.
73. Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н. *Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера.* Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 4. С. 100–113.
74. Сабодаш П. Ф., Филиппов И. Г. *О воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство с учетом моментных напряжений.* Прочность и пластичность. М. : Наука, 1971. С. 317–321.
75. Антонов А. М., Ерофеев В. И. *Волна Рэлея на границе градиентно-упругого полу-*

пространства. Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. 2018. Т. 79. № 4. С. 59–72.

76. Антонов А. М., Ерофеев В. И., Шекоян А. В. *Генерация возмущений сосредоточенным источником, движущимся с постоянной дозвуковой скоростью вдоль границы градиентно-упругого полупространства.* Проблемы прочности и пластичности. 2018. Т. 80. № 4. С. 438–455.
77. Антонов А. М., Ерофеев В. И., Леонтьева А. В. *Влияние поврежденности материала на распространение волны Рэлея вдоль границы полупространства.* Вычислительная механика сплошных сред. 2019. Т. 12. № 3. С. 293–300.
78. Антонов А. М., Ерофеев В. И. *Распространение волны Рэлея вдоль границы полупространства, описываемого упрощенной моделью Коссера.* Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81. № 3. С. 333–344.
79. Antonov A. M., Erofeev V. I., Malkhanov A. O. *Excitation of waves by a high-speed source moving along the border gradient-elastic half-space.* IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. V. 971.
80. Antonov A. M., Erofeev V. I., Leonteva A. V. *Influence of damage on the Rayleigh wave propagation along half-space boundary.* J. Appl. Mech. Techn. Phys. 2020. V. 61. № 7. P. 1174–1181.
81. Antonov A. M. [et al.] *Excitation of the waves with a focused source, moving along the border of gradient-elastic half-space* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2021. V. 137. P. 17–40.
82. Erofeev V. [et al.] *Cosserat half-space (reduced model) and half-space of damaged materials.* Advanced Structured Materials. Cham : Springer, 2023. V. 170. P. 171–190.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТОКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ВНЕШНЕЙ НАБЕГАЮЩЕЙ НЕРАСЧЁТНОЙ СТРУЁЙ

А. А. Жилин[1,2], *А. В. Примаков*[1]

[1]*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

[2]*Сибирский государственный университет водного транспорта, Новосибирск*

Задача взаимодействия струи с цилиндрической полостью была сформулирована в середине прошлого века [1]. Проведённое экспериментальное исследование показало нагрев поверхности резонирующей полости и газа возле глухого торца. В последующих экспериментах разных авторов [2–4] данное явление было неоднократно подтверждено. Данные исследования могут быть разбиты на несколько классов задач. Первый класс задач связан с изучением изменения давления в форкамере или коэффициента нерасчётности струи, истекающей из конического сопла. Второй – обусловлен прогревом стенок резонирующей полости рабочим газом и наличием или отсутствием теплоизоляции на наружной поверхности резонатора. Третий определяется установкой резонирующей полости непосредственно в рабочий поток, который обтекает наружную поверхность резонатора или отводится в сторону. Данные задачи вызывают большой прикладной интерес для проблемы, связанной с сушкой пористых материалов [5–7] и изменением свойств материалов, подвергнутых высокоинтенсивному акустоконвективному воздействию [8, 9]. Источником высокоинтенсивных колебаний является свисток Гартмана [10, 11]. Данная работа направлена на изучение процесса нагрева газа внутри тракта цилиндрической полости резонатора. Анализируются два варианта распределения температуры на внутренней поверхности резонатора: первый – с постоянной температурой, а второй – с теплоизолированной стенкой, действующей биканальной экспериментальной установки [12]. Особенностью данного исследования является изучение распределения газодинамических параметров потока в поперечном сечении вдоль тракта резонирующей полости.

Исследование выполнено численно в полной трёхмерной нестационарной постановке с помощью программного комплекса Ansys Fluent. Для математического моделирования привлекаются осреднённые по Фавру уравнения Навье – Стокса, дополненные $k - \varepsilon$ моделью турбулентности [13]. Замыкание осуществлялось с помощью уравнения состояния Менделеева – Клапейрона для идеального газа. Данная вычислительная технология была предложена в работах [14, 15], обобщена для работы в Ansys Fluent [16, 17] и верифицирована экспериментальными данными в [18–21]. В начальный момент времени течение газа в канале отсутствует, а все газодинамические параметры в тракте биканальной системы соответствуют нормальным условиям: давление 1 атм., температура 20 °C. Во все последующие моменты времени давление в форкамере полагается равным 6 атм. Для изотермической задачи температура стенки в тракте биканальной системы задавалась постоянной равной 293 К. Вариант с теплоизолированной стенкой реализуется с помощью задания теплового потока, равного нулю. В дальнейшем все результаты расчётов представляются в градусах по шкале Кельвина.

Газодинамическое течение в резонирующей полости свистка Гартмана состоит из двух фаз. Первая фаза связана с заполнением резонирующей полости струёй сжатого газа,

в результате по резонатору движется волна сжатия, отражается от закрытого торца и отражённая волна движется в обратном направлении, формируя за собой равновесное состояние с максимальной температурой и давлением. Вторая фаза обусловлена процессом истечения газа из резонирующей полости, при этом внутрь резонатора движется волна разрежения, отражается от жёсткой стенки и устремляется к открытому краю резонатора, формируя за собой область с пониженным давлением и температурой. Проведён анализ профилей температур вдоль тракта резонатора для каждой фазы и варианта.

Профиль температуры для первой фазы в изотермическом случае относительно оси резонатора имеет симметричный вид. В окрестности торца профиль имеет вид параболы с максимальной температурой на оси симметрии в 500 K. При удалении от торца профиль становится M-образного вида с максимумом в 452 K вблизи стенки резонатора и минимумом на оси в 448 K. Дальнейшее удаление от торца резонатора приводит к перестроению профиля температуры, он характеризуется тремя максимумами: одним в центре 389 K и два возле стенки по 387 K, а также двумя минимумами по 385 K. Перемещение вдоль резонатора ближе к открытому торцу приводит к переходу профиля к M-образному виду с максимумами возле стенки по 364 K и минимумом на оси 344 K. В середине резонатора профиль температуры является практически прямой линией, соответствующей 332 K, отклонения составляют менее одного градуса. Дальнейшее перемещение к открытому торцу приводит к нарушению симметрии в профиле температур, но амплитуда возрастает от 2-3 градусов возле середины резонатора до 10-15 градусов возле открытого торца резонатора. У границы открытого торца резонатора температура является немонотонной с тремя минимумами: два в 287 K по краям и одним в 290 K по центру, а также двумя максимумами в 294 K.

В адиабатическом случае профиль температуры для первой фазы не является симметричным относительно оси резонатора, при этом значения температур в характерных сечениях имеют более высокие значения. В области торца резонатора профиль температуры имеет немонотонный характер, значения температуры от 780 до 802 K. С удалением от торца профиль становится более гладким, а изменение температуры находится в интервале от 700 до 760 K. В двух последующих сечениях профиль температур имеет линейный вид, на одном краю стенки температура равна 473 K, на втором 627 K, для последующего сечения температура изменяется от 366 до 532 K. Профиль температуры в середине резонатора является практически прямой линией (температура 336 K), при этом отклонения не превышают один градус. Продвигаясь к открытому торцу колебания на профиле температуры постепенно возрастают. В окрестности открытого торца температура линейно изменяется от 284 до 297 K.

Для адиабатического приближения в фазе разгрузки профиль температур в поперечном сечении резонатора также является немонотонным, при этом значения температур изменяются от 570 до 600 K. Таким образом, температура по сравнению с фазой сжатия уменьшилась на 200 K. Стоит отметить, что понижение давления и температуры у жёсткой границы продолжается до прихода волны сжатия, т. е. практически до середины фазы сжатия. В следующем сечении от торца резонатора профиль также является немонотонным, но температура практически сопоставима с предыдущим сечением и принимает значения от 550 до 590 K. Удаляясь от закрытого торца резонатора, профиль температур имеет линейный вид с перепадом по сечениям: 440-550, 380-515, 310-460, 280-425, 275-380 и 270-350. Во время фазы истечения практически равномерное распределение температуры по сечению резонатора возле глухого торца обусловлено медленным движением газа и большим перепадом температур в результате сильного ускорения потока при приближении

к открытой кромке резонатора. Аналогичная картина наблюдается и в случае изотермического приближения, но с более низкими значениями температуры в соответствующих сечениях.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда и Правительства Новосибирской области, проект № 23-29-10118, https://rscf.ru/project/23-29-10118/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sprenger H. *Uber thermische effekte in reseonanzrohren.* Mitt. Inst. Aerodyn. Zurich. 1954. № 21. P. 18–35.
2. Елисеев Ю. Б., Черкез А. Я. *Об эффекте повышения температуры торможения при обтекании газом глубоких полостей.* Известия АН СССР. МЖГ. 1971. № 3. С. 8–18.
3. Kadaba P. V., Bondarenko V. L., Arkharov A. M. *Thermal characteristics of a Hartmann-Sprenger tube.* Int. J. Refrigeration. 1990. V. 13. № 5. P. 309–316.
4. Жилин А. А. *Экспериментальное исследование параметров газодинамического течения в канале АКСУ с глубоким цилиндрическим резонатором в присутствии и без исследуемого образца.* Челябинский физико-математический журнал. 2024. Т. 9. № 2. С. 222–231.
5. Жилин А. А. *Изучение процессов пропитки и сушки пористых материалов.* Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4-3. С. 777–778.
6. Zhilin A. A. *Dynamics of acoustic-convective drying of sunflower cake.* AIP Conference Proceedings. 2017. V. 1893. P. 030138.
7. Zhilin A. A., Fedorov A. V. *Acoustic-convective drying of aerated cellular concrete.* AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1939. P. 020014.
8. Zhilin A. A. *Properties of water under intense acoustic loading.* AIP Conference Proceedings. 2023. V. 2504. P. 030115.
9. Жилин А. А. *Влияние высокоинтенсивных акустических волн на водородный показатель воды.* Инженерно-физический журнал. 2024. Т. 97. № 5. С. 1393-1401.
10. Борисов Ю. Г. *Газоструйные излучатели звука Гартмановского типа. Физика и техника мощного ультразвука. Кн. 1: Источники мощного ультразвука.* Под ред. Л. Д. Розенберга. М. : Наука, 1967. С. 7–110.
11. Глазнев В. Н., Коробейников Ю. Г. *Эффект Гартмана. Область существования и частоты колебаний.* ПМТФ. 2001. Т. 42. № 4. С. 62–67.
12. Zhilin A. A., Golubev E. A. *Experimental study of the amplitude-frequency characteristics in a two-channel system.* AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1939. P. 020016.
13. Жилин А. А., Примаков А. В. *Численное исследование влияния геометрии биканальной системы на область существования эффекта Гартмана.* Теплофизика и аэромеханика. 2023. Т. 30. № 3. С. 427–440.
14. Федоров А. В. [и др.] *Физическое и математическое моделирование акусто-конвективной сушки риса.* Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83. № 1. С. 64–73.
15. Федорченко И. А., Федоров А. В. *Математическое моделирование акустических и газодинамических процессов в канале установки акусто-конвективной сушки.* Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86. № 4. С. 685–688.
16. Kravchenko A. S., Zhilin A. A., Fedorova N. N. *Mathematical modeling of flow in the working part of an acousto-convective drying system.* AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1939. P. 020018.

17. Kravchenko A. S., Zhilin A. A. *Mathematical modeling of the generation of acoustic waves in a two-channel system.* J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1268. P. 012037.
18. Primakov A. V., Zhilin A. A. *Gas-dynamic studying of the two-channel system flow using numerical simulation methods.* AIP Conference Proceedings. 2020. V. 2288. P. 030060.
19. Жилин А. А., Примаков А. В. *Численное исследование тепловых эффектов в акусто-конвективном потоке биканальной системы.* Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т. 2. № 1. С. 79–89.
20. Primakov A. V., Zhilin A. A. *Effect of resonant cavity edge thickness on flow acoustic-convective characteristics in the multi-channel tract.* AIP Conference Proceedings. 2023. V. 2504. P. 030101.
21. Примаков А. В., Жилин А. А. *Исследование влияния цилиндрической резонирующей полости на ближнее акустическое поле струи в биканальной системе.* Челябинский физико-математический журнал. 2024. Т. 9. № 2. С. 277–286.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ДЛЯ РАСЧЁТОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ НАНОПОРЫ С ИОННЫМ РАСТВОРОМ МЕТОДАМИ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

О. А. Золотов[1], *В. Е. Зализняк*[1], *О. П. Золотова*[2]

[1]*Сибирский федеральный университет, Красноярск*
[2]*Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва, Красноярск*

Нанопоры представляют собой искусственно созданные поры размером несколько нанометров. Их изучение имеет важное прикладное значение [1, 2]. С помощью искусственных нанопор можно имитировать некоторые функции биологических (естественных). Также они эффективно используются в области нанофлюидики [3]. Среди приложений можно выделить проблему опреснения, разделение ионов [4], создание сенсоров для биологических веществ, секвенирование ДНК и РНК [5].

В зависимости от технологии изготовления [6] нанопоры могут иметь различные геометрические формы. С точки зрения приложений особенно интересны проводящие нанопоры [7–9], позволяющие в принципе легко управлять процессами их взаимодействия с ионами раствора путём изменения потенциала.

Модель проводящей нанопоры в ионном растворе. Будем рассматривать раствор как набор кластеров, каждый из которых состоит из иона и его сольватной оболочки, движущийся как целое в непрерывной среде основного вещества раствора. Проводящую нанопору представим в виде проводящего цилиндра в теле диэлектрической мембраны. Тогда на кластер действуют следующие силы:

- электростатическое взаимодействие с проводящей нанопорой,
- электростатическое взаимодействие с другими кластерами,
- взаимодействие с диэлектрическим материалом мембраны,
- взаимодействие сольватных оболочек друг с другом,
- макроскопическое взаимодействие с раствором (сила вязкого трения),
- микроскопическое взаимодействие с раствором (участие в молекулярном движении).

Заметим, что последние два пункта отвечают, по сути, броуновскому движению кластеров: действительно, в подавляющем большинстве случаев масса кластера больше массы молекулы основного вещества раствора (величины масс различаются меньше чем на порядок), и учёт их молекулярного движения представляется необходимым. В этом случае требуемые вычислительные ресурсы могут быть существенно сокращены. Для этого представим остальные вклады взаимодействия ионов с молекулами растворителя как взаимосвязь с непрерывной вязкой диэлектрической средой.

Для моделирования взаимодействия кластера с проводящей нанопорой используем подход, предложенный в [10], в котором электрическое поле проводящей нанопоры представляется полем распределённых по его поверхности точечных фиктивных зарядов, величины которых находим из вариационного принципа. Кроме того, в рамках моделей молекулярной динамики необходимо аккуратно учесть взаимное влияние близко расположенных ионов разных знаков, иначе их пары склонны к образованию ассоциатов, движущихся как единое целое. Рассмотрим подробнее перечисленные процессы.

Энергия взаимодействия иона с проводящей нанопорой. Электростатической моделью проводящей нанопоры будут распределённые по её поверхности точечные фиктивные заряды Q_j, $j = 1, ..., M$ [10]. Обозначив их положение $\vec{R}_j$, для энергии взаимодействия имеем

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{l_1=1}^{M}\sum_{1,\, l_1\neq l_2}^{M}\frac{Q_{l_1}Q_{l_2}}{|\vec{R}_{l_1}-\vec{R}_{l_2}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\frac{q_iQ_l}{|\vec{r}_i-\vec{R}_l|},$$

где $q_i, \vec{r}_i$ – заряды и положения ионов, $i = 1, ..., N$, ε – диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 – диэлектрическая постоянная. С помощью M-мерного вектора $\vec{Q} = (Q_1, .., Q_M)$ рассматриваемую энергию можно записать как $U = \vec{Q}\hat{A}\vec{Q} + \vec{a}\vec{Q}$, где для матрицы $\hat{A}$ и вектора $\vec{a}$ имеем:

$$\hat{A}_{l_1l_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{R}_{l_1}-\vec{R}_{l_2}|}\,\delta_{l_1l_2}, \qquad \vec{a}_l = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}_i-\vec{R}_l|}\,.$$

Минимизируя электростатическую энергию системы по величинам фиктивных зарядов, получим: $\vec{Q} = \hat{A}^{-1}\vec{a}$. В работе [10] исследованы некоторые свойства $\hat{A}$, в частности, доказана невырожденность.

Энергия электростатического взаимодействия с другими кластерами. Рассматриваемая энергия – это электростатическая энергия взаимодействия точечных зарядов в диэлектрической среде:

$$U_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{1,\, k\neq i}^{N}\frac{q_iq_k}{|\vec{r}_i-\vec{r}_k|}$$

с учётом используемых обозначений.

Энергия взаимодействия иона с диэлектриком мембраны. Считая, что ион-молекулярное взаимодействие описывается законом Леннарда – Джонса, для энергии взаимодействия ионов с плоской поверхностью мембраны получим:

$$U(\vec{r}_i, \vec{L}_i) = \int \beta_i{}^*\left[\left(\frac{d_i}{|\vec{r}_i-\vec{L}_i|}\right)^{12} - \left(\frac{d_i}{|\vec{r}_i-\vec{L}_i|}\right)^{6}\right]dS_{\vec{L}_i} =$$

$$= \pi\beta_i{}^* d_i{}^2\left[\frac{1}{5}\left(\frac{d_i}{|\vec{r}_i-\vec{L}_i|}\right)^{10} - \frac{1}{2}\left(\frac{d_i}{|\vec{r}_i-\vec{L}_i|}\right)^{4}\right],$$

где $\beta_i{}^*$ и d_i – зависящие от вида иона и материала мембраны постоянные взаимодействия, $\vec{L}_i$ – перпендикуляр от точки положения иона к поверхности мембраны, $\vec{r}_i$ – координаты ионов.

Энергия взаимодействия сольватных оболочек друг с другом. При приближении ионов их сольватные оболочки начинают перекрываться, и дальнейшее сближение ионов потребует разрушения этих оболочек, на что тратится энергия. Представим сольватные оболочки в виде шаров, в которых равномерно распределена энергия взаимодействия иона с оболочкой и вычитаем энергию конусов, образующих перекрытие (чтобы произвести перекрытие сольватных оболочек, необходимо удалить молекулы сольватной оболочки из области между ионами). Поскольку размер молекулы раствора сравним с размером сольватной оболочки, то аппроксимируем эту область двумя конусами с вершинами

в центрах шаров. Несложные выкладки приводят к следующему результату:

$$U = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + \left(\beta_1 \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{4R_1} + \beta_2 \frac{{R_1}^2 - {R_2}^2}{4R_2}\right)\frac{1}{l} - \left(\frac{\beta_1}{4R_1} + \frac{\beta_2}{4R_2}\right) l,$$

где β_1, β_2 – энергии взаимодействия ионов и их сольватных оболочек, R_1, R_2 – радиусы сольватных оболочек, l – расстояние между ионами. Из полученного выражения видно, что при достаточно малых l энергия разрушения сольватных оболочек по модулю может превысить энергию электростатического взаимодействия между ионами, и возникнет отталкивание ионов разных знаков.

Окончательное выражение для силы, действующей на кластер. Складывая все полученные выражения для различных видов потенциальной энергии кластера и вычисляя градиент, получаем окончательное выражение для действующей на ион суммарной силы (кроме силы вязкого трения):

$$\vec{F_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{1,\,k\neq i}^{N} \frac{q_i q_k}{|\vec{r_i} - \vec{r_k}|^2}\frac{(\vec{r_i} - \vec{r_k})}{|\vec{r_i} - \vec{r_k}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{l=1}^{M}\frac{q_i Q_l(\vec{r_i} - \vec{R_l})}{|\vec{r_i} - \vec{R_l}|^3} +$$

$$+ \sum_{1,\,k\neq i}^{N}\begin{cases} 0, & |\vec{r_i} - \vec{r_k}| \geq d_i + d_k \\ \dfrac{\vec{r_i} - \vec{r_k}}{|\vec{r_i} - \vec{r_k}|}\left(\left(\dfrac{\beta_k}{4d_k} - \dfrac{\beta_i}{4d_i}\right)\dfrac{{d_i}^2 - {d_k}^2}{|\vec{r_i} - \vec{r_k}|^2} + \dfrac{\beta_i}{4d_i} + \dfrac{\beta_k}{4d_k}\right), & |\vec{r_i} - \vec{r_k}| < d_i + d_k \end{cases} +$$

$$+ 2\pi\beta_i\left(\frac{\rho_0}{\mu_0}\right)^{2/3}(\vec{r_i} - \vec{L_i})\left[\left(\frac{d_i}{|\vec{r_i} - \vec{L_i}|}\right)^{12} - \left(\frac{d_i}{|\vec{r_i} - \vec{L_i}|}\right)^{6}\right],$$

где ρ_0 – плотность диэлектрика мембраны, μ_0 – молярная масса молекул мембраны.

Макроскопическое взаимодействие с раствором (сила вязкого трения). Будем считать, что под действием описанных сил кластер движется без ускорения, тогда скорость его установившегося движения равна $\nu_i \vec{F_i}(\vec{r_i})/q_i$, где ν_i – подвижность иона (экспериментально измеряемый коэффициент пропорциональности между скоростью иона и напряжённостью электрического поля).

Микроскопическое взаимодействие с раствором (участие в молекулярном движении). На каждом шаге по времени к скорости кластера будем добавлять случайный вектор скорости, плотность распределения каждой независимой компоненты которого

$$f(v) = \sqrt{\frac{m_i}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{m_i v^2}{2kT}\right) \quad -$$

распределение Максвелла. Здесь v – компонента скорости, m_i – масса кластера, k и T – постоянная Больцмана и температура соответственно.

Таким образом, в основных чертах построена вычислительная схема для расчётов взаимодействия проводящей нанопоры с ионным раствором методами молекулярной динамики.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1429).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dekker C. *Solid-state nanopores Nature.* Nanotechnology. 2007. № 2. С. 209–215.
2. Venkatesan B. M., Bashir R. *Nanopore sensors for nucleic acid analysis Nature.* Nanotechnology. 2011. № 10. С. 615–624.
3. Daiguji H. *Ion transport in nanofluidic channels.* Chem. Soc. Rev. 2010. V. 39. № 3. С. 901–911.
4. Majd S. [et al.] *Applications of biological pores in nanomedicine, sensing, and nanoelectronics.* Curr. Opin. Biotechnol. 2010. V. 21. № 4. С. 439–476.
5. Singer A. [et al.] *Electronic barcoding of a viral gene at the single-molecule level.* Nano Lett. 2012. V. 12. № 3. С. 1722–1728.
6. Zhang Y. [et al.] *Fabrication of nanochannels.* Materials. 2015. V. 8. № 9. С. 6277–6308.
7. Kasi J. K. [et al.] *Synthesis of carbon nanotube and carbon nanofiber in nanopore of anodic aluminum oxide template by chemical vapor deposition at atmospheric pressure.* Advanced Materials Research. 2012. V. 557-559. С. 544–549.
8. Choi W. [et al.] *Diameter-dependent ion transport through the interior of isolated single-walled carbon nanotubes.* Nature Commun. 2013. V. 4. С. 2397.
9. Simunin M. M. [et al.] *Structures based on graphitized nanotubulenes with a common electrode in a matrix of porous anodic alumina for the purpose of forming electrically switchable membranes.* Technical Physics Letters. 2015. V. 41. № 11. С. 1047–1050.
10. Zolotov O. A., Zalizniak V. E. *Simple mathematical model of conducting nanopore.* J. Siberian Federal Universitet. Mathematics and Physics. 2018. V. 11. № 4. С. 505–512.

АНАЛИЗ КОНВЕКТИВНЫХ РЕЖИМОВ В СЛОЕ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ, ОБДУВАЕМОМ ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ

И. Е. Зубров

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Работа посвящена исследованию характеристик двухфазных течений в системе жидкость – газ с границей раздела, допускающей перенос массы за счёт испарения/конденсации, в рамках двумерной задачи. Для описания конвективных режимов, возникающих при совместном действии силы плавучести, термокапиллярного эффекта и прокачки газа, используется двусторонняя модель на основе уравнений Обербека – Буссинеска [1]. Система уравнений термоконцентрационной конвекции имеет частично-инвариантное решение ранга 1 дефекта 3 [1]

$$\begin{aligned} &u_j = u_j(y), \quad v_j = 0, \quad T_j = T_j(x,y) = (a_1^j + a_2^j y)x + \vartheta_j(y), \\ &p_j = p_j(x,y), \quad C = C(x,y) = (b_1 + b_2 y)x + \varphi(y), \end{aligned} \tag{1}$$

которое может быть эффективно использовано для апробации постановок задач, различающихся граничными условиями для функций температуры T_j и паросодержания C и замыкающими соотношениями. В (1) индекс j указывает на функции и параметры, связанные с жидкой ($j = 1$) и газовой ($j = 2$) фазами. Точное решение позволяет определить значения поверхностного температурного градиента A и массовой скорости испарения M, которые могут быть измерены в экспериментах.

В настоящей работе точное решение используется для вычисления ряда количественных характеристик в рамках различных постановок краевых задач. При формулировке соответствующих задач рассматриваются граничные условия первого и второго рода для функций T_j и C, а в качестве дополнительного используется условие замкнутости потока в жидком слое. Это соотношение моделирует экспериментальную конфигурацию, в которой жидкость, помещённая в протяжённую горизонтальную кювету, обдувается ламинарным потоком газа [2]. Верификация решения проводится на основе сравнения расчётных данных, полученных с помощью решения (1), с данными экспериментов [2]. В рамках рассмотренных постановок задач решение корректно предсказывает поведение скорости испарения при изменении параметров задачи. Дополнительно анализируются причины количественных расхождений расчётных и измеренных значений массовой скорости испарения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. *Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions.* Microgravity Sci. Technol. 2020. V. 32(2). P. 139-154.
2. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Люлин Ю. В. *Теоретическое и экспериментальное исследование течений с испарением на темрокапиллярной границе раздела: особенности моделирования, анализ характеристик.* Многофазные системы. 2023. V. 18(3). С. 97–99.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПОСРЕДСТВОМ МИКРОПОЛЯРНОГО КОНТИНУУМА

Е. А. Иванова[1,2]

[1]*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*
[2]*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

Хорошо известно, что до начала XX века все физические процессы описывались с помощью механических моделей. В основе этих моделей лежало представление об эфире как о субстанции, занимающей всё свободное пространство, способной проникать в материальные тела, наделяя их дополнительными физическими свойствами. Это представление подразумевает, что эфир обеспечивает взаимодействия материальных тел, находящихся на расстоянии друг от друга. В частности, учёные XIX века считали, что электромагнитные процессы как в вакууме, так и в веществе, происходят в эфире. В XIX веке механические модели играли важную роль для построения физических теорий поскольку они были промежуточным звеном между пониманием учёными природы физических процессов и математическим описанием этих процессов [1]. Используя концепцию эфира, учёные XIX века (Вольта, Ампер, Пуассон, Эрстед, Юнг, Френель, Стокс, Навье, Коши, Грин, Стретт, Нейман, Вебер, Гаусс, Риман, Томсон, Максвелл, Гельмгольц, Кирхгоф, Фицджеральд и др.) по сути разделяли процесс построения новой теории на два этапа. На первом этапе они создавали механическую модель, соответствующую их интуитивному пониманию природы физического процесса. На втором этапе они выводили дифференциальные уравнения этой механической модели. На рубеже XX–XXI веков интерес к механическим моделям физических процессов начал возрождаться. За последние 30 лет было опубликовано большое количество обзорных статей. Кроме того, во второй половине XX века и в XXI веке возобновились исследования, направленные на создание механических моделей физических процессов.

Первым учёным, который создал модели физических процессов на основе сплошных сред с вращательными степенями свободы, был П. А. Жилин. В 1996 году он прочитал лекцию «Реальность и механика» на XXIII Летней школе «Нелинейные колебания в механических системах» (Санкт-Петербург, Россия), где показал, что на основе континуума, обладающего только вращательными степенями свободы, можно получить уравнение Шрёдингера и уравнение Клейна – Гордона. В 2000 году П. А. Жилин прочитал лекцию «Основные направления развития механики в XXI веке» на XXVIII Летней школе–конференции «Актуальные проблемы механики» (Санкт-Петербург, Россия), где представил модель континуума, обладающего только вращательными степенями свободы, как модель электромагнитного поля в вакууме. Обе лекции были опубликованы в [2,3]. В 2005 году П. А. Жилин создал нелинейную теорию электромагнитного поля, которая была опубликована в [4,5]. Краткое описание вышеуказанных работ Жилина можно найти в [6]; биография и краткое изложение научных результатов П. А. Жилина приведены в [7–9]. Модель, представленная ниже, является продолжением и развитием работ П. А. Жилина.

Рассматривается линейная теория континуума Коссера специального типа, обладающего только вращательными степенями свободы. Для тензора моментных напряжений используется определяющее уравнение как в случае упругого континуума. Главной

особенностью нашей модели является то, что дифференциальное уравнение, связывающее тензор угловой деформации с вектором угловой скорости, содержит источниковый член [10]. Благодаря специальному выбору определяющего уравнения для источникового члена, получается модель континуума, обладающего свойствами вязкоупругого континуума. Рассматривая такой континуум, связываем основные переменные, характеризующие его напряжённо-деформированное состояние, с величинами, характеризующими электродинамические и термодинамические процессы [11–13]. Сравнивая полученные уравнения с уравнениями Максвелла и гиперболическим уравнением теплопроводности, идентифицируем параметры модели. В результате приходим к обобщению уравнений Максвелла для проводников. Эти уравнения можно свести к трёхмерному телеграфному уравнению для вектора электрического поля. Это телеграфное уравнение учитывает не только скин-эффект, описанный во многих литературных источниках по электродинамике, но и так называемый статический скин-эффект, наблюдаемый в ряде экспериментов [14,15]. Кроме того, предлагаемая модель учитывает преобразование электрической энергии в тепловую за счёт джоулева тепла и позволяет получить уравнение баланса энтропии. В отличие от классической электродинамики, которая содержит *два* взаимно ортогональных вектора (вектор электрического поля и вектор магнитной индукции), предлагаемая теория содержит *три* взаимно ортогональных вектора: вектор электрического поля, вектор магнитной индукции и градиент температуры. Это согласуется с экспериментальными фактами, обнаруженными Эттингсгаузеном и Нернстом (эффект Эттингсгаузена и эффект Нернста – Эттингсгаузена).

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-11-00363, https://rscf.ru/project/23-11-00363/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Whittaker E. *A history of the theories of aether and electricity. The classical theories.* Thomas Nelson and Sons Ltd. London etc. 1910.
2. Жилин П. А. *Актуальные проблемы механики.* С.-Пб. : ИПМ РАН, 2006. Т. 1.
3. Zhilin P. A. *Advanced problems in mechanics.* St. Petersburg : Institute for Problems in Mechanical Engineering, 2006. V. 2.
4. Жилин П. А. *Рациональная механика сплошных сред.* С.-Пб. : Издательство политехнического университета, 2012.
5. Zhilin P. A. *Modeling of the electromagnetic field based on rational mechanics approach.* Z. Angew. Mathem. Mech. 2023. V. 103(4). e202302004.
6. Müller W. H., Rickert W., Vilchevskaya E. N. *Thence the moment of momentum.* Z. Angew. Mathem. Mech. 2020. V. 100(5). e202000117.
7. Altenbach H. [et al.] *In memory of Pavel Andreevich Zhilin (1942–2005).* Z. Angew. Mathem. Mech. 2007. V. 87(2). P. 79–80.
8. Altenbach H. [et al.] *On the contributions of Pavel Andreevich Zhilin to mechanics.* Tech. Mech. 2009. V. 29(2). P. 115–134.
9. Altenbach H., Ivanova E. A. *Zhilin Pavel Andreevich.* In: Altenbach H., Öchsner A. (Eds.) Encyclopedia of Continuum Mechanics. Berlin : Springer, 2020.
10. Ivanova E. A., Jatar Montaño L. E. *A new approach to solving the solid mechanics problems with matter supply.* Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2021. V. 33(4). P. 1829–1855.

11. Ivanova E. A. *Modeling of thermal and electrical conductivities by means of a viscoelastic Cosserat continuum.* Continuum Mechanics and Thermodyn. 2022. V. 34(2). P. 555–586.
12. Ivanova E. A. *A new approach to modeling of thermal and electrical conductivities by means of the Cosserat continuum.* Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2022. V. 34(5). P. 1313–1342.
13. Ivanova E. A. *Thermo-electrodynamics of conductive media based on the nonlinear viscoelastic cosserat continuum of a special type.* Acta Mechanica. 2023. V. 234(12). P. 6205–6249.
14. Panchenko O. A., Lutsishin P. P. *Static skin effect in tungsten.* J. Exp. Theor. Phys. 1969. V. 30(5). P. 841–844.
15. Suzuki M., Tanuma S. *The static skin effect in bismuth.* J. Phys. Soc. Jpn. 1978. V. 44(5). P. 1539–1546.

ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВИБРАЦИЙ НА ФОРМУ КАПЛИ НА ТВЁРДОЙ ПОДЛОЖКЕ

А. О. Иванцов[1], *Т. П. Любимова*[1,2], *О. А. Хлыбов*[1]

[1]*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*
[2]*Пермский государственный национальный исследовательский университет*

Изучено поведение капли жидкости, помещённой на осциллирующую твёрдую подложку. Вибрации нормальны к плоскости подложки. Амплитуда колебаний предполагается малой по сравнению с радиусом капли, а частоты вибраций могут быть настолько высоки, что в капле возникает звуковая волна, длина которой сравнима с размерами капли. Жидкость окружает газовая среда, плотность которой мала. Влиянием силы тяжести пренебрегается.

Рассмотрены задачи о собственных и вынужденных колебаниях полусферической осесимметричной капли. Определены частоты собственных объёмных колебаний. Получено решение задачи о вынужденных колебаниях сжимаемой капли в виде ряда по полиномам Лежандра с учётом поверхностного натяжения жидкости. Изучены резонансы акустической моды колебаний капли. Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях капли в пределе слабосжимаемой жидкости. Показано, что рост амплитуды колебаний с увеличением частоты вибраций происходит по квадратичному закону.

Сформулирован вариационный принцип для сред, в которых важна сжимаемость жидкости: с течением времени функционал энергии уменьшается и достигает минимума в состоянии квазиравновесия, в котором среднее движение отсутствует.

Изучено влияние вибраций на квазиравновесную форму капли при малом значении вибрационного параметра, равного отношению вибрационного давления к капиллярному. Предполагалось, что поверхность капли в отсутствие вибраций является полусферической. Под воздействием вибраций высота капли уменьшается, а площадь основания увеличивается. При этом деформация поверхности меняется пропорционально вибрационному параметру.

При конечных значениях вибрационного параметра квазиравновесная форма может значительно отличаться от сферической. В этом случае пульсационная задача решалась численно методом граничных элементов. Для определения средней формы капли при конечных значениях вибрационного параметра использовался вариационный принцип. Полученные результаты хорошо согласуются с решением в пределе малых значений вибрационного параметра. При увеличении вибрационного параметра средний контактный угол уменьшается, площадь основания увеличивается, а высота уменьшается.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 24-11-00269, https://rscf.ru/project/24-11-00269/.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

А. Л. Казаков

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск

Введение. Математическое описание ряда тепловых [1], диффузионных и фильтрационных процессов [2] в механике сплошных сред сводится к следующему нелинейному эволюционному параболическому уравнению:

$$U_t = \Delta\Psi_1(U) + \Psi_2(U), \tag{1}$$

где t – время, Δ – лапласиан по пространственным переменным $x_1, x_2, ..., x_n$; U – искомая функция. В случае степенных функций $\Psi_1(U), \Psi_2(U)$ и при наличии пространственной симметрии уравнение (1) посредством стандартной замены переменных может быть приведено к виду

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \gamma u_\rho^2 + \frac{\nu u u_\rho}{\rho} + \alpha u^\beta. \tag{2}$$

Здесь $u(t, \rho)$ – новая искомая функция, $\rho = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ – пространственная переменная; α, β, γ – константы; $\nu = n-1$. Наиболее естественными случаями являются $\nu = 0$ (плоская симметрия), $\nu = 1$ (цилиндрическая или круговая симметрия) и $\nu = 2$ (сферическая симметрия), при прочих значениях ν физический смысл уравнения менее очевиден, хотя с математической точки зрения для рассмотрения (2) при $\nu \neq 0, 1, 2$ каких-либо препятствий нет. В российской литературе (2) именуют уравнением нелинейной теплопроводности [1], а в зарубежной – «the porous medium equation» [2].

Постановка задачи. Содержанием настоящего исследования является поиск и изучение нетривиальных точных решений [3] уравнения (2), удовлетворяющих условию

$$u|_{\rho=a(t)} = 0, \tag{3}$$

построение которых сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных (ОДУ) уравнений второго порядка.

Задача (2), (3), как легко видеть, во-первых, при $\beta > 0$ имеет тривиальное решение $u \equiv 0$, во-вторых, не может быть разрешена относительно старшей производной, т. е. имеет особенность, которая препятствует использованию стандартных методов исследования.

Основной результат. Выполним в уравнении (2) замену зависимых и независимых переменных

$$u(t, \rho) = \varphi(t)\psi(\rho)v(t, z), \quad z = \ln\frac{\rho}{a(t)}, \tag{4}$$

где v – новая искомая функции; t, z – независимые переменные, а $\varphi(t)$ и $\psi(\rho)$ – вспомогательные функции, подлежащие определению. Можно убедиться, что при $\rho \neq 0$ замена (4) является невырожденной.

После подстановки (4) в (2) и выполнения тождественных алгебраических преобразований получим следующее равенство:

$$vv_{zz} + \gamma v_z^2 + \left[\frac{2\rho\psi'(\rho)}{\psi(\rho)}\,(2+2\gamma) - 1 + \nu\right] vv_z + \left[\frac{\rho^2\psi''(\rho)}{\psi(\rho)} + \frac{\gamma\rho^2[\psi'(\rho)]^2}{\psi^2(\rho)} + \frac{\nu\rho\psi'(\rho)}{\psi(\rho)}\right] v^2 +$$

$$+\frac{a'(t)\rho^2}{\varphi(t)a(t)\psi(\rho)}\,v_z - \frac{\varphi'(t)\rho^2}{\varphi^2(t)\psi(\rho)}\,v - \frac{\rho^2}{\varphi(t)\psi(\rho)}\,v_t + \alpha\rho^2\varphi^{\beta-2}(t)\psi^{\beta-2}(\rho)v^\beta = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим вопрос о том, когда (5) становится ОДУ относительно $v(z)$. Можно видеть, что выбор $\psi(\rho) = \rho^2$ является однозначным (с точностью до постоянного множителя), а выбор $\varphi(t)$ зависит от значений α и β, причём подобрать подходящую функцию возможно только в некоторых частных случаях.

Теорема. *Пусть* $\psi(\rho) = \rho^2$. *Уравнение* (5) *является ОДУ в следующих случаях:*

1. *Если* $\beta = 1$, *тогда* $\varphi = const = C_1$, *а* $a(t) = C_2 e^{C_1 t}$. *Здесь* α *может быть любым, в том числе нулем.*

2. *Если* $\alpha = 0$, $\varphi \neq const$, *тогда* $a(t) = (C_3 t + C_4)^\eta$, *а* $\varphi(t) = \eta/(t + C_*)$. *Здесь* $C_* = C_4/C_3$, $\eta \neq 0$ *— действительное число.*

Получающиеся в обоих случаях ОДУ можно записать совместно в виде

$$vv'' + \gamma(v')^2 + (3 + 4\gamma + \nu)\,vv' + v' + (2 + 4\gamma + 2\nu)\,v^2 + \mu v = 0, \tag{6}$$

где μ принимает значения α или $1/\eta$. При этом условие (3) переходит в

$$v|_{z=0} = 0. \tag{7}$$

Результаты исследования задачи (6), (7) будут представлены в докладе. Частично они получены ранее и опубликованы в работе [4], а частично – являются новыми и будут предъявлены впервые.

Заключение. Проблема нахождения точных решений нелинейных уравнений математической физики представляет значительный интерес с точки зрения развития как «чистой» математики, так и методов математического моделирования, поскольку эти решения позволяют находить и исследовать нетривиальные физические эффекты и являются хорошим инструментом для тестирования численных методик. Полученные результаты вносят вклад в развитие данного раздела теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с переносом результатов на случай систем [5], которые, как правило, доставляют более точное и адекватное описание рассматриваемых физических процессов [6].

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121041300058-1, Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. [и др.] *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.* М. : Наука, 1987.
2. Vazquez J. L. *The porous medium equation: mathematical theory.* Oxford : Clarendon Press, 2007.
3. Казаков А. Л., Орлов С. С. *О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности.* Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 112–123.
4. Казаков А. Л. *Решения с нулевым фронтом для квазилинейного параболического уравнения теплопроводности.* Труды ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30. № 2. С. 86–102.

5. Kazakov A., Kuznetsov P., Lempert A. *Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type.* Symmetry. 2020. V. 12. № 6. P. 999.
6. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Овчарова А. С. *Моделирование конвекции в двухфазной системе в условиях диффузионного испарения в замкнутой области* ПМТФ. 2023. Т. 64. № 4. С. 14–26.

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ПАДЕ

П. И. Кириллов, В. П. Шапеев

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Предложен новый численный алгоритм решения методом коллокации и наименьших квадратов (КНК) одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$u(x)g(x) = \int_a^b K(x,s)u(s)\,ds + f(x), \quad x \in [a,b], \tag{1}$$

где $u(x)$ – искомая функция, λ, $K(x,s)$, $f(x)$ – заданные числовой параметр, ядро и свободный член соответственно. На n частичных отрезках, на которые разбивается отрезок $[a,b]$, приближённое численное решение (1) ищется в виде сплайна из кусков аппроксимаций Паде $[L/M]_i$. В i-той ячейке, $i = 1,\ldots,n$, аппроксимант имеет вид

$$[L/M]_i = \frac{N_{Li}(x)}{D_{Mi}(x)}\,, \tag{2}$$

где

$$N_{Li}(x) = N_{i0} + N_{i1}x + ... + N_{iL}x^L,$$
$$D_{Mi}(x) = 1 + D_{i1}x + ... + D_{iM}x^M.$$

После подстановки $[L/M]_i$ в (1) и умножения его на знаменатель правой части (2) относительно искомых коэффициентов получается приближённое линейное соотношение. Коллокациями данного соотношения в узлах сетки на $[a,b]$ выписывается переопределённая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): в каждой ячейке сетки число точек коллокации берётся в l раз больше числа неизвестных коэффициентов аппроксиманта $[L/M]_i$. Значения аппроксимантов Паде под знаком интеграла берутся с предыдущей итерации. Затем интеграл в каждой точке коллокации подсчитывается приближённо с помощью квадратурной формулы Гаусса одним из двух способов: либо по всей расчётной области, либо аддитивно по отрезкам разбиения области. Далее интеграл переносится в левую часть приближённого соотношения с обратным знаком. Полученная СЛАУ относительно искомых коэффициентов решается прямым методом путём QR-декомпозиции её матрицы применением метода Гивенса.

В численных экспериментах получены высокоточные решения различных уравнений (1), опубликованных другими авторами, и исследовано влияние показателя переопределённости СЛАУ на точность численного решения. В таблицах 1–3 представлены некоторые результаты численных экспериментов при применении изложенного метода к решению примеров из работ [1,2]. Численные решения, полученные методом КНК, значительно точнее результатов, достигнутых в данных работах. Значения погрешностей между точным и приближённым решением задач приведены в равномерной норме. Для подсчёта

Таблица 1: Результаты численного решения методом КНК при $l = 2$ примера № 3.9 из [1], точность его решения порядка 10^{-6}.

Разбиение	Погрешность (при $L = 4, M = 5$)	Погрешность (при $L = 5, M = 6$)
$n = 20$	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$2.35 \cdot 10^{-10}$
$n = 21$	$6.45 \cdot 10^{-11}$	$3.42 \cdot 10^{-11}$
$n = 23$	$1.38 \cdot 10^{-10}$	$9.11 \cdot 10^{-13}$

Таблица 2: Результаты численного решения методом КНК при $l = 2$ примера № 3 из [2], точность его решения порядка 10^{-8}.

Разбиение	Погрешность (при $L = 4, M = 5$)	Погрешность (при $L = 5, M = 6$)
$n = 1$	$2 \cdot 10^{-11}$	$1.33 \cdot 10^{-14}$
$n = 2$	$2.93 \cdot 10^{-14}$	$3.55 \cdot 10^{-15}$
$n = 3$	$4.44 \cdot 10^{-15}$	$4.44 \cdot 10^{-15}$

Таблица 3: Результаты численного решения методом КНК при $l = 2$ примера № 4 из [2], точность его решения порядка 10^{-3}.

Разбиение	Погрешность (при $L = 5, M = 6$)	Погрешность (при $L = 6, M = 7$)
$n = 1$	$1.99 \cdot 10^{-15}$	$8.88 \cdot 10^{-16}$
$n = 2$	$1.55 \cdot 10^{-15}$	$1.77 \cdot 10^{-15}$
$n = 3$	$1.33 \cdot 10^{-15}$	$1.99 \cdot 10^{-15}$

величины погрешности в области бралось значительное количество точек, расположенных в ней равномерно.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-21-00499, https://rscf.ru/project/23-21-00499/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.* Справочное пособие. Киев : Наукова Думка, 1986. 358 с.
2. Ahmed Flayih Jaber, Adil M. H. R. Al-rammahi. *Orthogonal basis to solve linear fredholm integral equations via Galerkin method.* IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. V. 928. 042016.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОБОЛОЧКИ НА ОСНОВЕ ТРЁХПОЛЬНОГО МКЭ

Ю. В. Клочков[1], *А. П. Николаев*[1], *О. В. Вахнина*[1], *М. Ю. Клочков*[2]

[1]*Волгоградский государственный аграрный университет*
[2]*Волгоградский государственный технический университет*

Разработан алгоритм метода, основанного на использовании трёхпольного четырёхугольного конечного элемента, являющегося фрагментом срединной поверхности оболочки. Узловыми неизвестными приняты приращения: кинематических величин (перемещений и их производных), деформационных величин (деформаций и искривлений срединной поверхности) и силовых величин (усилий и моментов). Аппроксимация кинематических величин осуществляется с использованием бикубических функций формы, а величин силовых и деформационных – билинейных функций. Для учёта физической нелинейности использованы определяющие уравнения теории пластического течения и её вариант. Конечный элемент сформирован на основе нелинейного функционала Лагранжа с дополняющим условием равенства нулю действительной работы приращений внутренних усилий на разности приращений деформационных величин, определяемых геометрическими соотношениями и с использованием аппроксимирующих выражений.

Трёхпольные конечно-элементные алгоритмы в расчётах физически-нелинейных процессов деформирования оболочек использованы в [1, 2], где в качестве узловых неизвестных принимались перемещения, напряжения и пластические множители.

В настоящей работе для четырёхугольного конечного элемента с узлами i, j, k, l, являющегося фрагментом срединной поверхности оболочки, использованы следующие узловые неизвестные на шаге нагружения [3]:

$$\underset{1\times36}{\{\Delta v_y^s\}^T} = \left\{ \underset{1\times12}{\{\Delta v_y^{1s}\}^T} \; \underset{1\times12}{\{\Delta v_y^{2s}\}^T} \; \underset{1\times12}{\{\Delta v_y^{s}\}^T} \right\}; \quad \underset{1\times36}{\{\Delta v_y^g\}^T} = \left\{ \underset{1\times12}{\{\Delta v_y^{1g}\}^T} \; \underset{1\times12}{\{\Delta v_y^{2g}\}^T} \; \underset{1\times12}{\{\Delta v_y^{g}\}^T} \right\};$$

$$\underset{1\times24}{\{\Delta E_y\}^T} = \left\{ \underset{1\times6}{\{\Delta E_y^i\}^T} \; \underset{1\times6}{\{\Delta E_y^j\}^T} \; \underset{1\times6}{\{\Delta E_y^k\}^T} \; \underset{1\times6}{\{\Delta E_y^l\}^T} \right\}; \qquad (1)$$

$$\underset{1\times24}{\{\Delta s_y\}^T} = \left\{ \underset{1\times6}{\{\Delta s_y^i\}^T} \; \underset{1\times6}{\{\Delta s_y^j\}^T} \; \underset{1\times6}{\{\Delta s_y^k\}^T} \; \underset{1\times6}{\{\Delta s_y^l\}^T} \right\},$$

где составляющими кинематических узловых неизвестных в локальной $\{\Delta v_y^s\}$ и глобальной $\{\Delta v_y^g\}$ системах координат являются приращения перемещений и их производные;

$$\underset{1\times6}{\{\Delta \varepsilon_y^\lambda\}^T} = \left\{ \Delta\varepsilon_{11}^\lambda \;\; \Delta\varepsilon_{22}^\lambda \;\; 2\Delta\varepsilon_{12}^\lambda \;\; \Delta\kappa_{11}^\lambda \;\; \Delta\kappa_{22}^\lambda \;\; 2\Delta\kappa_{12}^\lambda \right\} -$$

строка приращений деформаций и искривлений срединной поверхности в узловой точке λ ($\lambda = i, j, k, l$);

$$\underset{1\times6}{\{\Delta s_y^\lambda\}^T} = \left\{ \Delta N^{11\lambda} \, \Delta N^{22\lambda} \, \Delta N^{12\lambda} \, \Delta M^{11\lambda} \, \Delta M^{22\lambda} \, \Delta M^{12\lambda} \right\} -$$

строка приращений усилий и моментов в узловой точке λ.

Определяющие уравнения упруго-пластически деформируемого тела принимались в матричном виде

$$\underset{3\times1}{\{\Delta\sigma\}} = \underset{3\times3}{[C_\alpha]}\,\underset{3\times1}{\{\Delta\varepsilon^\zeta\}}, \tag{2}$$

где $\underset{3\times1}{\{\Delta\sigma\}} = \{\Delta\sigma^{11}\ \Delta\sigma^{22}\ \Delta\sigma^{12}\}$ – строка контравариантных компонент тензора напряжений в произвольной точке оболочки; $\underset{3\times1}{\{\Delta\varepsilon^\zeta\}}^T = \left\{\Delta\varepsilon^\zeta_{11}\ \Delta\varepsilon^\zeta_{22}\ 2\Delta\varepsilon^\zeta_{12}\right\}$ – строка ковариантных компонент тензора деформаций; при $\alpha = 1$ матрица $\underset{3\times3}{[C_1]}$ определялась на основе соотношений теории пластического течения; при $\alpha = 2$ матрица $[C_2]$ определялась на основе гипотезы о пропорциональности компонент тензора приращений пластических деформаций компонентам девиатора приращений напряжений с коэффициентом пропорциональности, являющимся функцией касательного модуля диаграммы деформирования.

С использованием соотношений (2) на основе гипотезы Кирхгофа – Лява формируются соотношения между силовыми и деформационными величинами в производной точке срединной поверхности оболочки:

$$\underset{6\times1}{\{\Delta s\}} = \underset{6\times6}{[h_\alpha]}\,\underset{6\times1}{\{\Delta\varepsilon\}}\,. \tag{3}$$

Для получения соотношений между искомыми полями конечного элемента использовался нелинейный функционал Лагранжа с условием

$$\begin{aligned}\Pi_{LU} = \int\limits_\sigma \left[\underset{6\times1}{\{s\}}^T + \frac{1}{2}\,\underset{6\times1}{\{\Delta s\}}\right]\underset{6\times1}{\{\Delta\varepsilon\}}\,dF - \\ - \int\limits_F \underset{1\times3}{\{\Delta u\}}^T\left[\underset{3\times1}{\{\Delta q\}} + \frac{1}{2}\,\underset{3\times1}{\{\Delta q\}}\right]dF + \frac{1}{2}\int\limits_F \underset{1\times3}{\{\Delta s\}}\left[\underset{3\times1}{\{\Delta\varepsilon^y\}} - \underset{3\times1}{\{\Delta\varepsilon^a\}}\right]dF,\end{aligned} \tag{4}$$

где последнее выражение означает условие равенства нулю действительной работы приращений внутренних усилий на разности приращений деформаций и искривлений, определяемых геометрическими зависимостями и аппроксимирующими выражениями. Для конечно-элементной реализации функционала (4) использовались следующие аппроксимации искомых величин.

Для кинематических величин применялись бикубические функции и определялись матричные соотношения

$$\begin{gathered}\underset{3\times1}{\{\Delta u\}} = \underset{3\times36}{[A]}\,\underset{36\times1}{\{\Delta u_y\}}, \\ \underset{6\times1}{\{\Delta\varepsilon^g_\zeta\}} = \underset{6\times3}{[L]}\,\underset{3\times1}{\{\Delta u\}} = \underset{6\times3}{[L]}\,\underset{3\times36}{[A]}\,\underset{36\times1}{\{\Delta u_y\}} = \underset{6\times36}{[B]}\,\underset{36\times1}{\{\Delta u_y\}}\,.\end{gathered} \tag{5}$$

Для силовых и деформированных искомых величин использовались билинейные соотношения

$$\underset{6\times1}{\{\Delta s\}} = \underset{6\times24}{[H]}\,\underset{24\times1}{\{\Delta s_y\}}, \qquad \underset{6\times1}{\{\Delta\varepsilon^a\}} = \underset{6\times24}{[H]}\,\underset{24\times1}{\{\Delta\varepsilon_y\}}\,. \tag{6}$$

С учётом (5) и (6) функционал (4) записывается выражением

$$\begin{aligned}\Pi_{LU} = \{\Delta u_y^g\}^T \underset{1\times36}{} \underset{36\times36}{[\tau]^T} \int\limits_F \underset{36\times6}{[B]^T} \underset{6\times1}{\{s\}}\, dF + \frac{1}{2}\,\underset{1\times24}{\{\Delta\varepsilon_y\}^T} \int\limits_F \underset{24\times6}{[H]^T} \underset{6\times6}{[h_\alpha]} \underset{6\times24}{[H]}\, dF\, \underset{24\times1}{\{\Delta\varepsilon_y\}} - \\ - \underset{1\times36}{\{\Delta u_y^g\}^T} \underset{36\times36}{[\tau]^T} \int\limits_F \underset{36\times3}{[A]^T} \underset{3\times1}{\{q\}}\, dF - \frac{1}{2}\,\underset{1\times36}{\{\Delta u_y^g\}^T} \underset{36\times36}{[\tau]^T} \int\limits_F \underset{36\times3}{[A]^T} \underset{3\times1}{\{\Delta q\}}\, dF + \\ + \underset{1\times24}{\{\Delta s_y\}^T} \frac{1}{2} \int\limits_F \underset{24\times6}{[H]^T} \underset{6\times6}{[B]}\, dF\, \underset{36\times36}{[\tau]^T} \underset{36\times1}{\{\Delta u_y^g\}} - \underset{1\times24}{\{\Delta\varepsilon_y\}^T} \frac{1}{2} \int\limits_F \underset{24\times6}{[H]^T} \underset{6\times24}{[H]}\, dF\, \underset{24\times1}{\{\Delta s_y\}}\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Минимизация функционала (7) по узловым неизвестным приводит к матричным уравнениям

$$\frac{\partial\Pi_{LU}}{\partial\{\Delta\varepsilon_y\}^T} \equiv \underset{24\times24}{[a]}\ \underset{24\times1}{\{\Delta\varepsilon_y\}} - \underset{24\times24}{[d]}\ \underset{24\times1}{\{\Delta s_y\}} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\Pi_{LU}}{\partial\{\Delta s_y\}^T} \equiv \underset{24\times36}{[b]}\ \underset{36\times1}{\{\Delta u_y\}} - \underset{24\times24}{[d]^T}\ \underset{24\times1}{\{\Delta\varepsilon_y\}} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Pi_{LU}}{\partial\{\Delta u_y^g\}^T} \equiv \underset{36\times24}{[b]^T}\ \underset{24\times1}{\{\Delta s_y\}} - \underset{36\times1}{\{f_{\Delta q}\}} + \underset{36\times1}{\{R\}} = 0, \tag{10}$$

где

$$\underset{24\times24}{[a]} = \int\limits_F \underset{24\times6}{[H]^T} \underset{6\times6}{[h_\alpha]} \underset{6\times24}{[H]}\, dF, \quad \underset{24\times24}{[d]} = \frac{1}{2} \int\limits_F \underset{24\times6}{[H]^T} \underset{6\times24}{[H]}\, dF,$$

$$\underset{24\times36}{[b]} = \frac{1}{2} \int\limits_F \underset{24\times6}{[H]^T} \underset{6\times36}{[B]}\, dF\ \underset{36\times36}{[\tau]}\,, \quad \underset{36\times1}{\{f_{\Delta q}\}} = \underset{36\times36}{[\tau]} \int\limits_F \underset{36\times3}{[A]^T} \underset{3\times1}{\{\Delta q\}}\, dF,$$

$$\underset{36\times1}{[R]} = -\ \underset{36\times36}{[\tau]} \int\limits_F \underset{36\times3}{[A]^T} \underset{3\times1}{\{q\}}\, dF + \underset{36\times36}{[\tau]} \int\limits_V \underset{36\times6}{[B]} \underset{6\times24}{\{S\}}\, dV.$$

Из систем (8) и (9) получаются соотношения

$$\underset{24\times1}{\{\Delta\varepsilon_y\}} = \underset{24\times24}{[d]^{-1}}\ \underset{24\times36}{[b]}\ \underset{36\times1}{\{\Delta u_y^g\}}, \quad \underset{24\times1}{\{\Delta s_y\}} = \underset{24\times24}{[d]^{-1}}\ \underset{24\times24}{[a]}\ \underset{24\times1}{\{\Delta\varepsilon_y\}}\,. \tag{11}$$

При учёте (11) из системы (10) определяется матрица жёсткости элемента

$$\underset{36\times36}{[K]}\ \underset{36\times1}{\{\Delta u_y^g\}} = \underset{36\times1}{\{f_{\Delta q}\}} - \underset{36\times1}{\{R\}}, \tag{12}$$

где $\underset{36\times36}{[K]} = \underset{36\times24}{[b]^T}\ \underset{24\times24}{\left[d^T\right]^{-1}}\ \underset{24\times24}{[a]}\ \underset{24\times24}{[d]^{-1}}\ \underset{24\times36}{[b]}$ – матрица жёсткости конечного элемента, с использованием которой формируется матрица жёсткости оболочки.

После определения кинематических узловых неизвестных оболочки определяются по (11) деформационные и силовые узловые неизвестные.

Разработанный алгоритм показал значительное повышение точности показателей напряжённо-деформированного состояния оболочки при относительно редкой сетке дискретизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Liguori F. S., Madeo A., Garcea G. *A mixed finite-element formulation for the elasto-plastic analysis of shell structures.* Materials Research Proceedings. 2023. V. 26. P. 227–232.
2. Liguori F. S., Madeo A., Garcea G. *A dual decomposition of the closest point projection in incremental elasto-plasticity using a mixed shell finite element.* Numerical Methods in Engineering. 2022. V. 123. Iss. 24. P. 6243-6266.
3. Klochkov Yu. V. [et al.] *Three field FEM for analysis of thin elastic shells.* Magazine of Civil Engineering. 2024. V. 17. Iss. 3. Art. 12710.

О ПОСТРОЕНИИ СВЯЗАННЫХ И ДВУХУРОВНЕВЫХ МОДЕЛЕЙ СИНТЕЗА КОМПОЗИТОВ

А. Г. Князева, О. Н. Крюкова, М. А. Анисимова, Ю. А. Чумаков

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Под связанными моделями, как правило, понимают такие модели, в которых учитывается взаимное влияние разных физических полей. При моделировании синтеза новых материалов интерес представляет исследование напряжений и деформаций, сопутствующих синтезу и влияющих совместно с внешней нагрузкой на кинетические закономерности фазообразования по разным каналам. В соответствии с классической термодинамикой необратимых процессов взаимосвязь явлений учитывается при построении определяющих соотношений и уравнений состояния, число которых увеличивается с повышением сложности термодинамических систем. Для системы, состояние которой определяется температурой, деформациями и концентрациями компонентов, в качестве уравнений состояния можем рассматривать дифференциальные соотношения, следующие из одного из вариантов уравнения Гиббса [1]. Например, для свободной энергии Гельмгольца $f = f\left(T, \varepsilon_{ij}, C_k\right)$ имеем систему уравнений состояния

$$ds = C_{\varepsilon,C_k} dT + \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T,C_k} d\varepsilon_{ij} + \sum_{k=1}^{n} s_k dC_k,$$

$$d\Sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{T_{\alpha\beta},C_k} dT + C_{ij\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon_{ij},C_\alpha,\alpha\neq k} dC_k, \qquad (1)$$

$$dg_k = -s_k dT + \left(\frac{\partial g_k}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T,C_\alpha} d\varepsilon_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{C_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial C_k}\right) dC_\alpha,$$

где T – температура, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, s – энтропия, C_k и g_k – концентрации компонентов и их химические потенциалы, Σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Кирхгофа. Коэффициенты при дифференциалах описывают прямые и перекрёстные эффекты, причём

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T,C_k} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij},C_k}\right] = -\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}\right] = -\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial T},$$

$$\left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial C_k}\right)_{T,\varepsilon_{ij},C_\alpha,\alpha\neq k} = \frac{\partial}{\partial C_k}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T,C_k} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left[\frac{\partial f}{\partial C_k}\right] = \frac{\partial g_k}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

и т. д.

Двух- и многоуровневое моделирование предполагают анализ явлений на разных пространственных масштабах. При синтезе новых материалов это относится к разным явлениям: моделирование физико-химических процессов в масштабе всего образца, в окрестности одиночных частиц или групп частиц, вблизи дефектов структуры, на атомном или молекулярном масштабе. В этом случае можно говорить о связанности явлений на каждом из масштабных уровней, а также о связанности разных масштабов в рамках одной модели. Определяющие соотношения и связь между масштабными уровнями в моделях синтеза

новых материалов, также как и в многоуровневых моделях теории пластичности [2–4], должны быть основаны на физически непротиворечивых принципах. Соотношения вида (1) имеют место на каждом масштабе. При разделении масштабов по физическим процессам полагаем, что одни процессы имеют место на масштабном уровне всего образца, а другие – на микроуровне, под которым понимаем масштабный уровень условных мезоячеек [5, 6]. Например, вторые из соотношений (1) для макроуровня представляем в виде

$$d\Sigma_{ij} = d{\Sigma_{ij}}^{T} + C_{ij\alpha\beta}d\varepsilon_{\alpha\beta} + d{\Sigma_{ij}}^{Ch} \equiv d{\Sigma_{ij}}^{macro} + d{\Sigma_{ij}}^{Ch}, \tag{2}$$

а для мезо- (микро) уровня имеем соотношения

$$d{\Sigma_{ij}}^{meso} = C_{ij\alpha\beta}d{\varepsilon_{\alpha\beta}}^{meso} + \sum_{k=1}^{n} B_{ij}^{(k)}\, dC_k, \tag{3}$$

причём

$${\Sigma_{ij}}^{Ch} = \left\langle {\Sigma_{ij}}^{meso} \right\rangle .$$

Изменение состава на уровне реакционных ячеек после осреднения даёт средний состав макрообразца – объёмные доли фаз. Тепловые эффекты диффузионно-контролируемых реакций учитываются при расчёте поля температуры в макрозадаче. А собственно задачи для условных реакционных ячеек решаются при температуре, следующей из макрозадачи, и т. д. Таким образом, масштабные уровни оказываются полностью связанными.

Заметим, что в двухуровневой модели общего вида каждая величина мезоуровня фактически является функцией шести координат – трёх координат макрозадачи и трёх координат мезозадачи, что приводит к вычислительным проблемам. Именно поэтому мезоячейка с реальной структурой, содержащая необходимое число элементов структуры, заменяется эквивалентной условной мезоячейкой, эффективные свойства которой отождествляются со средними свойствами «реальной» мезоячейки. Примеры связанных моделей синтеза композитов первого типа представлены в [7, 8].

Примеры двухуровневых одно- и двумерных моделей разного типа без учёта напряжённо-деформированного состояния образца опубликованы в [9–11].

Учёт напряжённо-деформированного состояния позволяет проанализировать механизмы формирования напряжений в процессе на разных масштабных уровнях, выделить напряжения, связанные с неоднородным полем температуры и с изменением состава. Первые относим к напряжениям первого рода, вторые – к напряжениям второго рода. Дополнительный «бонус» такого разделения масштабов – возможность оценки эффективных свойств синтезируемых композитов.

В работе будут представлены расчёты эволюции состава, температуры, сопутствующих напряжений и деформаций эффективных упругих модулей в рамках двухуровневых моделей синтеза композитов на подложке из нестехиометрических смесей порошков TiO_2–Al, Fe_2O_3–Ti–Al, CuO–Al. Анализ показывает, что в случае реакционных ячеек сферической формы тензор напряжений химической природы после перехода в систему координат макрозадачи имеет три ненулевых компоненты. Величины напряжения и кинетика фазообразования для разных систем различны. Процесс синтеза в целом оказывается неоднородным и нестационарным. Для заданного начального состава порошковой смеси и принятой редуцированной схемы превращений состав продукта синтеза может быть неравновесным.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 22-11-00100, https://rscf.ru/project/22-11-00100/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Князева А. Г. *Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях.* Томск : Изд-во «Иван Федоров», 2014.
2. Trusov P. V., Volegov P. S., Yanz A. Y. *Two-scale models of polycrystals: Macroscale motion decomposition.* Phys. Mesomech. 2014. № 17. P. 116–122.
3. Trusov P. V. *Classical and multi-level constitutive models for describing the behavior of metals and alloys: problems and prospects (as a matter for discussion).* Mech. Solids. 2014. № 56. P. 55–64.
4. Gribov D. S., Trusov P. V. *Three-level dislocation-based model for describing the deformation of polycrystals: structure, implementation algorithm, examples for studying nonproportional cyclic loading.* Phys. Mesomech. 2022. № 25. P. 557–567.
5. Knyazeva A. G., Anisimova M. A. *New phase growth in the vicinity of a spherical particle interacting with a matrix with regard mechanical stresses induced by diffusion.* Int. Communications in Heat and Mass Transfer. 2023. № 142. P. 106641.
6. Anisimova M. A., Knyazeva A. G. *Model of the phase composition evolution in a metal melt of a particle made of composite powder.* High Temperature Material Processes. 2023. V. 27. № 3. P. 1–8.
7. Knyazeva A. G., Kryukova O. N. *Coupled model of controlled synthesis, of a composite on a substrate.* Lobachevskii J. Mathem. Special issue: Actual Problems of Calculus Mathematics and Informatics. 2022. V. 47. № 7. P. 1640–1655.
8. Князева А. Г. *Термомеханическая связанная модель синтеза покрытия на подложке.* Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2024. № 1. P. 58–74.
9. Kryukova O. N., Knyazeva A. G. *Two-level model controlled synthesis of a composite on a substrate.* Multiscale Science and Engineering. 2023. № 5. P. 10–22.
10. Knyazeva A. G., Anisimova M. A. *Two-level model of composite synthesis on a substrate from a powder mixture of TiO_2 and Al. 1. Model description and simple examples.* Nanoscience and Technology: Int. J. 2023. V. 14. № 3. P. 73–102.
11. Anisimova M. A., Knyazeva A. G., Chumakov Yu. A. *Two-level model of composite synthesis on a substrate from a powder mixture of TiO_2 and Al. 2. Structure of the reaction zone in a two-level model of coating synthesis.* Nanoscience and Technology: Int. J. 2024. V. 15. № 3. P. 77–97.

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ПОТОКА НА ДВИЖЕНИЕ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

П. Н. Конон, С. С. Нестерович

Белорусский государственный университет, Минск

Влияние внешнего потока на движение слоя вязкой жидкости на вращающемся цилиндре рассматривается в практической задаче – обработке сельскохозяйственных культур пестицидами, распыляющимися либо покрывающими цилиндрический вращающийся вал на медленно движущемся роботе.

В [1] изучено развитие возмущений в тонком слое на умеренно вращающемся цилиндре, в [2] проведено исследование для нетонкого слоя в поле сил инерции. В работе [3] исследовано влияние ламинарного потока воздуха на устойчивость тонкой плёнки на закрученном цилиндре.

Рассматриваются длинные волны вдоль оси цилиндра, и исследуется плоская задача. Предполагается, что внешний поток является потенциальным, скорость натекания U является малой величиной, и вихреобразование за цилиндром при обтекании не рассматривается. Предполагается, что плёнка тонкая. Учитывается влияние гравитации, поверхностного натяжения и центробежных сил.

На рис. 1 показана схема обтекания цилиндра радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω, и оси неподвижной полярной системы координат.

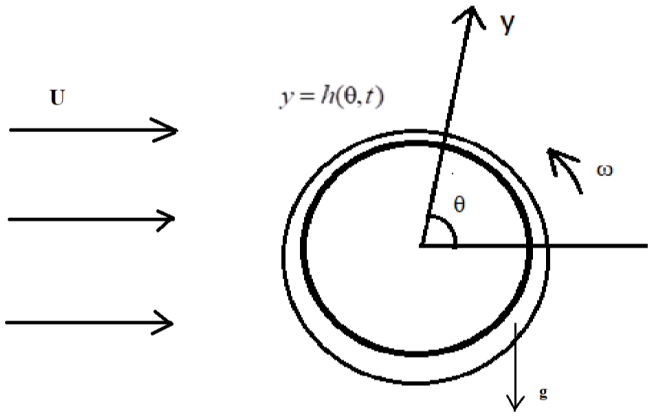


Рис. 1: Схематичное плоское обтекание слоя на вращающемся цилиндре газовым потоком

Уравнение эволюции плёнки толщиной $\delta(\theta,t) = h(\theta,t) - 1$ с учётом сил гравитации и поверхностного натяжения на внешней поверхности вращающегося цилиндра в приближении Стокса имеет вид [1]

$$\begin{gathered}\delta_t + \delta_\theta - \frac{1}{3}\left(k(\theta)\delta^3\right)_\theta = 0,\\ k(\theta) = \mathrm{Re}\,\mathrm{Fr}^{-1}\cos\theta + \mathrm{Re}\;p_\theta, \quad p_\theta = -\mathrm{We}^{-1}(\delta_\theta + \delta_{\theta\theta\theta}).\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь p – давление в плёнке на её границе, нижний индекс обозначает частную производную. Числа Рейнольдса, Фруда и Вебера соответственно равны

$$\mathrm{Re} = \frac{R^2\omega}{\nu}, \quad \mathrm{Fr}^{-1} = \frac{g}{R\omega^2}, \quad We^{-1} = \frac{\sigma}{\rho R^3\omega^2}, \tag{2}$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести.

При обтекании внешним потоком давление на границе плёнки изменится. Определим его в размерном виде. Давление идеальной среды p_c у поверхности плёнки определяется интегралом Бернулли:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_s} = \frac{v^2}{2} + \frac{p_c}{\rho_s}, \tag{3}$$

где v – скорость потока на поверхности слоя, p_0 – давление потока воздуха вдали от цилиндра, ρ_s – плотность воздуха.

Давление p на границе плёнки и внешнее p_c связаны формулой Лапласа

$$p - p_c = \left(\frac{1}{R} - \frac{\delta}{R^2} - \frac{\delta_{\theta\theta}}{R^2}\right)\sigma. \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) находим

$$p = p_0 + \sigma\left(\frac{1}{R} - \frac{\delta}{R^2} - \frac{\delta_{\theta\theta}}{R^2}\right) + \frac{\rho_s}{2}\left(U^2 - v^2\right). \tag{5}$$

Величину скорости потока на поверхности плёнки, учитывая её тонкость, получим как известный результат потенциального обтекания цилиндра радиуса R потоком идеальной жидкости с циркуляцией Γ [4]. В итоге определяем давление на поверхности плёнки:

$$p = p_0 + \sigma\left(\frac{1}{R} - \frac{\delta}{R^2} - \frac{\delta_{\theta\theta}}{R^2}\right) + \frac{\rho_s}{2}\left[U^2 - \left(\omega R - 2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Разделив (6) на $\rho\omega^2 R^2$, получаем его безразмерный вид:

$$p - p_0 = \mathrm{We}^{-1}\left(1 - \delta - \delta_{\theta\theta}\right) + \frac{\overline{J}}{2}\left[\overline{U}^2 - (1 - 2\overline{U}\sin\theta + \overline{\Gamma})^2\right]. \tag{7}$$

Тогда величина $k(\theta)$ в формуле (1) примет вид

$$k(\theta) = \mathrm{Re}\,\mathrm{Fr}^{-1}\cos\theta - \mathrm{ReWe}^{-1}\left(\delta_\theta + \delta_{\theta\theta\theta}\right) + 2\mathrm{Re}_1\cos\theta(1 - 2\overline{U}\sin\theta + \overline{\Gamma}). \tag{8}$$

В формулах (7), (8) использованы следующие обозначения:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{RU}{\mu}\rho_s, \quad \overline{J} = \frac{\rho_s}{\rho}, \quad \overline{U} = \frac{U}{\omega R}, \quad \overline{\Gamma} = \frac{\Gamma}{2\pi\omega R^2}. \tag{9}$$

В итоге приходим к уравнению эволюции тонкого слоя на вращающемся цилиндре с учётом его обтекания внешним потенциальным потоком и с учётом циркуляции:

$$\delta_t + \delta_\theta = \frac{1}{3}\left\{\delta^3\left[\mathrm{ReFr}^{-1}\cos\theta - \mathrm{ReWe}^{-1}\left(\delta_\theta + \delta_{\theta\theta\theta}\right) + 2\mathrm{Re}_1\cos\theta(1 - 2\overline{U}\sin\theta + \overline{\Gamma})\right]\right\}_\theta. \tag{10}$$

Уравнение (10) содержит 5 безразмерных параметров: произведения ReFr^{-1}, ReWe^{-1}, а также измененное число Рейнольдса Re_1, безразмерную скорость $\overline{U}$ набегающего потока и безразмерную циркуляцию $\overline{\Gamma}$. Будем отыскивать решения уравнения (10) в виде тригонометрического ряда:

$$\delta(t) = \delta_0 + \sum_{k=1}^{K} [\delta_{k0}(t) \cos k\theta + \delta_{k1}(t) \sin k\theta]. \tag{11}$$

Для моделирования нелинейного развития возмущений проведены численные расчёты с членами разложения ряда Фурье до 4-го порядка включительно. Подставим это разложение в уравнение (10) и, собрав компоненты разложения при одинаковых тригонометрических функциях, получаем систему дифференциальных уравнений для определения $\delta_{k0}(t)$, $\delta_{k1}(t)$, k=1,...,4, как задачу Коши, которая решается численно методом Рунге – Кутты. Предполагается, что в начальный момент слой имеет постоянную толщину.

В результате проанализировано влияние различных параметров на форму поверхности тонкого слоя на вращающемся цилиндре, обтекаемом медленным потоком газа. На рис. 2 изображено развитие возмущений при увеличении величины скорости набегающего потока. Входные величины имеют следующие значения: $R = 0,05$ м; $\omega = 6,28$ рад/с; $\nu = 0.000001$ м^2/с; $\rho_s = 1,3$ кг/м^3; $\rho = 1000$ кг/м^3; Г=0,314 м^2/с. Безразмерные критерии равны: $\mathrm{ReFr}^{-1} = 156103$; $\mathrm{ReWe}^{-1} = 4,64102$; $\mathrm{Re}_1 = 65$. Предположим, что начальная толщина плёнки равна 0,002. На рис. 2 изображены эволюции возмущений в плёнке воды в четыре разных момента времени $t = \pi/4; \pi/2; \pi; 3\pi/2$ при четырёх значениях скорости набегающего потока $U = 0; 1; 5; 10$ м/с.

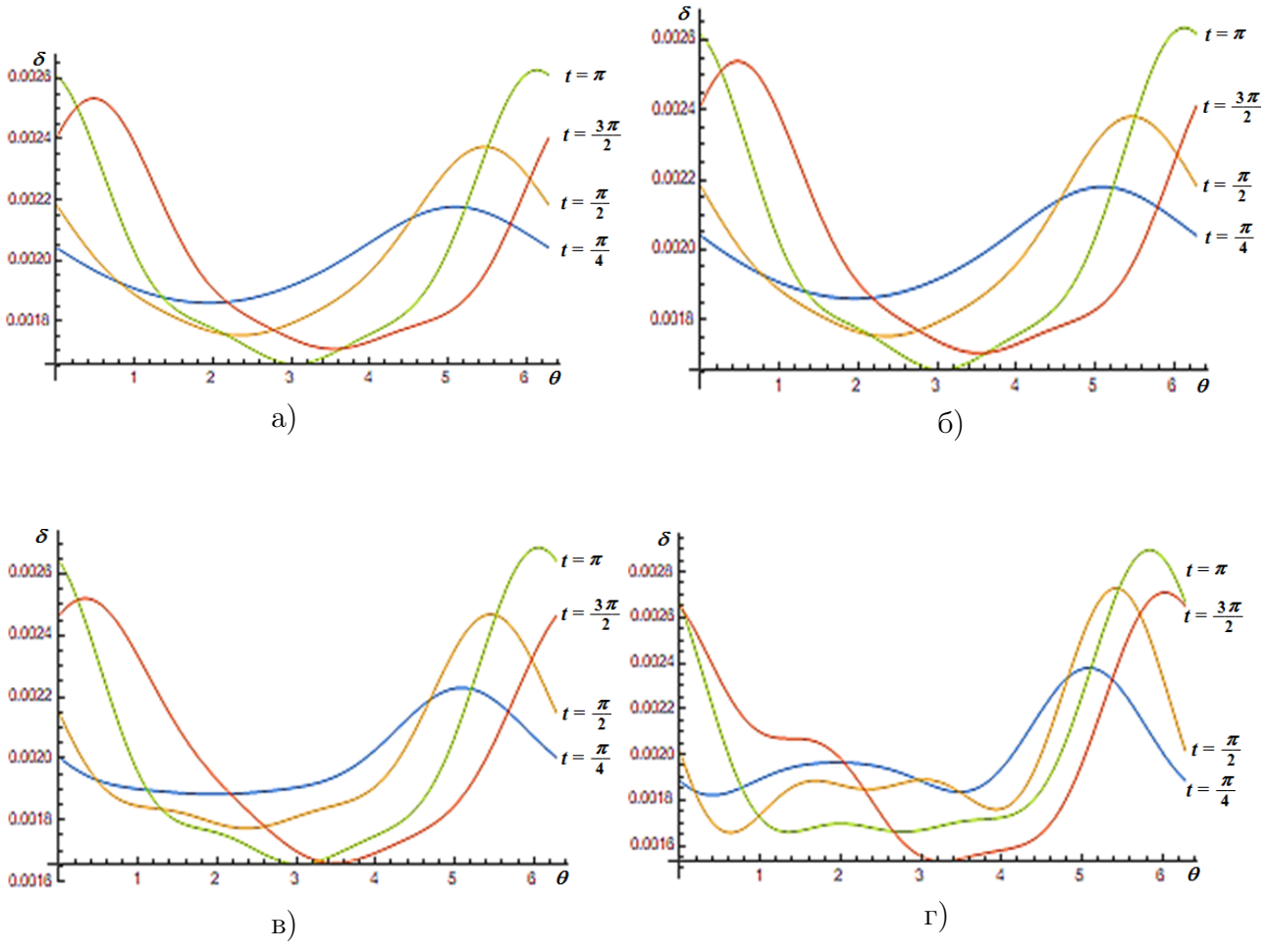


Рис. 2: Развитие возмущений при а) $U = 0$ м/с, б) $U = 1$ м/с, в) $U = 5$ м/с, г) $U = 10$ м/с

С ростом скорости набегающего потока происходит увеличение амплитуды возмущений и появляются новые экстремумы поверхности. Максимальное значение свободной поверхности во всех случаях наблюдается на тыловой части цилиндра, а минимальное – в передней части обтекаемой цилиндрической поверхности.

Проведены численные исследования при разных угловых скоростях вращения цилиндра. При малых угловых скоростях влияние силы тяжести более существенно и слой возмущается, возможно его протекание. При некотором увеличении угловой скорости наблюдается баланс сил тяжести, поверхностного натяжения, центробежных сил. Возмущения в слое меньше, он может стабилизироваться.

Работа выполнена в рамках задания 2.11 «Волновые течения капиллярных струй, слоёв, плёнок в центробежных, постоянных и переменных температурных полях и их применение в технологических процессах» ГПНИ Беларуси «Энергетические и ядерные процессы и технологии».

ЛИТЕРАТУРА

1. Pukhnachev V. V. *Motion of a liquid film on the surface of a rotating cylinder in a gravitational field.* J. Appl. Mech. Techn. Phys. V. 16. № 3. 1977. P. 344–351.
2. Yepikhin V., Konon P. and Shkadov V. *Perturbed motion of a viscous fluid layer on the surface of a rotation cylinder.* J. Engin. Phys. Thermophys. 1994. № 66(6). P. 615–621.
3. Newell H., Viljoen H. *Stability analysis of a thin film on a rotating cylinder with low airflow.* Phys. Fluids. 2019. № 31. 034106.
4. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа.* М. : Наука, 1970.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРНЫХ РАСТВОРОВ

А. Н. Кулагина, А. И. Кадыйров

Институт энергетики и перспективных технологий ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

В связи с широким применением водных растворов на основе полиакриламида и ксантана в нефтяной промышленности заказчиком предъявляются определённые требования к готовому раствору. Одним из способов контроля качества является прохождение реологических испытаний, которые в основном состоят в построении зависимостей динамических модулей (модули упругости и потерь) от угловой частоты при различных температурах. При данном виде теста жидкость подвергается сдвиговым осцилляциям в объёме, ограниченном или между двумя дисками, или диском и конусом, или сооснымы цилиндрами. Вместе с тем вязкоупругие жидкости характеризуются способностью растягиваться в продольном направлении и, как следствие, различными временами релаксации при растяжении [1]. В настоящей работе выполнен комплекс реологических испытаний, который включал в себя как построение сдвиговой вязкости и динамических модулей, так и выполнение испытаний на растяжение методом распада жидкого мостика [2]. Показано, что при определённой концентрации полимерных порошков реологические свойства приготовленных растворов практически не отличаются при сдвиговых испытаниях (распределение сдвиговой вязкости, динамические модули), однако существенно отличаются при испытаниях на растяжение.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-21-00166, https://rscf.ru/project/23-21-00166/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kadyirov A., Zaripov R., Makarushkin D. *Some experimental results for converging flow of dilute polymer solution.* Physics of Fluids. 2024. V. 36. № 3. 033110.
2. Базилевский А. В., Ентов В. М., Рожков А. Н. *Распад жидкого мостика – метод реологического тестирования биологических жидкостей.* Известия РАН. МЖГ. 2011. № 4. С. 119–129.

ЦИФРОВОЙ ДВОЙНИК СТЕНДА АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ, ЭМУЛИРУЮЩЕГО ФАЗОВЫЕ ИСКАЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

В. В. Лавринов

Институт оптики атмосферы им. В. Е. Зуева СО РАН, Томск

Цифровой двойник стенда системы адаптивной оптики (АО) моделирует турбулентные искажения лазерного излучения с учётом эволюции его фазовых флуктуаций под действием ветра и представляет техническую реализацию эмуляции атмосферной турбулентности [1]. Эмуляция атмосферной турбулентности или моделирование фазовых флуктуаций лазерного излучения – это совокупность программных и технических средств, предполагающих воспроизведение предварительно смоделированных наклонов волнового фронта и их устранение из изображения излучения в фокальной плоскости.

Поскольку обусловленные атмосферной турбулентностью фазовые флуктуации светового поля носят случайный характер и скорость эволюции фазовых флуктуаций также является случайной величиной, то эмуляция атмосферной турбулентности основана на корреляционных свойствах измеряемых наклонов волнового фронта излучения.

Для описания атмосферных процессов Колмогоровым были разработаны структурные функции, характеризующие флуктуации показателя преломления [2] и подчинённые в пределах инерционного интервала масштабов неоднородностей $l_2 \ll \rho \ll L_0$ закону «двух третей» Колмогорова – Обухова [3]: $D^n(\rho) = C_n^2 \rho^{2/3}$, где C_n^2 – структурная постоянная флуктуаций показателя преломления.

На входной апертуре адаптивной системы световое поле эволюционирует случайным образом. Под эволюцией фазовых флуктуаций понимается процесс постепенных количественных изменений флуктуаций волнового фронта, в результате которых происходит его качественное изменение. Эволюция фазовых флуктуаций или трансформация турбулентных неоднородностей во времени характеризуется скоростью, которая включает в себя скорость ветрового переноса турбулентных неоднородностей, а также мелкомасштабные флуктуации атмосферной турбулентности с C_n^2, присутствующие в реальной атмосфере. Структурная постоянная C_n^2 описывает спектр плотности флуктуаций показателя преломления в атмосфере [3]:

$$\Phi_n(\chi_{K,M}) = 0,33 C_n^2 (\chi_{K,M}^2 + \chi_0^2)^{-11/6} \exp(-\chi_{K,M}^2 / \chi_m^2), \tag{1}$$

где $\chi_{K,N} = \Delta\chi\sqrt{(K^2 + M^2)}$; K, M – индексы узлов расчётной сетки размерностью $N \times N$; $\Delta\chi = 2\pi(N\Delta\vec{\rho})$ – шаг дискретизации по пространственной частоте; $\Delta\vec{\rho}$ – расстояния между разнесёнными точками; $\chi_m = 5,92/l_0$ и $\chi_0 = 2\pi/L_0$ – спектральные частоты, соответствующие внутреннему l_0 и внешнему L_0 масштабам турбулентных неоднородностей соответственно. Для плоской волны, прошедшей слой случайно-неоднородной среды толщиной L, спектральная плотность флуктуаций фазы в приближении геометрической оптики связана со спектральной плотностью флуктуаций показателя преломления выражением

$$F_s(\chi_{K,M}) = 2\pi k^2 L \Phi_n(\chi_{K,M}), \tag{2}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны излучения. Для плоской волны с гауссовым распределением амплитуды радиус когерентности (параметр Фрида) r_0 характеризует интенсивность турбулентных неоднородностей светового поля, т. е. определяет условия

распространения светового поля [4]:

$$r_0^{-5/3} = 0,423k^2LC_n^2. \tag{3}$$

После умножения обеих частей равенства (3) на число $2\pi\,0,033/0,423$ получим

$$0,489r_0^{-5/3} = 2\pi\,0,033k^2LC_n^2. \tag{4}$$

Тогда случайное поле флуктуаций показателя преломления описывается спектром фон Кармана:

$$F_s(\chi_{K,M}) = 0,489r_0^{-5/3}(\chi_{K,M}^2 + \chi_0^2)^{-11/6}\exp(-\chi_{K,M}^2/\chi_m^2). \tag{5}$$

Для моделирования эволюции фазовых флуктуаций светового поля необходимо получить неограниченную и непериодическую выборку случайных фазовых экранов, задаваемых формулой (5).

Случайное поле флуктуаций показателя преломления в приближении геометрической оптики характеризуется случайной фазовой функцией $S(\rho) = S(x', y')$, которая связана двумерным Фурье-преобразованием со своей спектральной амплитудой

$$A_S(\chi_{K,M}) :< |A_{K,M}|^2 >= F_s(\chi_{K,M})\Delta\chi^2.$$

Распределение двумерного массива коэффициентов Фурье для случайного поля флуктуаций показателя преломления выражается в виде

$$S_{K,M} = [F_s(\chi_{K,M})]^{-1/2}\Delta\chi\exp(i\varphi_{rand}), \tag{6}$$

где φ_{rand} – равномерно распределённая фаза Фурье-образа функции $S(\rho)$ в интервале $[0, 2\pi]$.

Поступательное движение случайного поля фазовых флуктуаций (5) или смещение распределения двумерного массива $S_{K,M}$ вдоль входной апертуры адаптивной системы в момент времени t соответствует добавлению линейной составляющей к фазе Фурье-образа:

$$S_{K,M} = [F_s(\chi_{K,M})]^{-1/2}\Delta\chi\exp(i\varphi_{rand})\exp\Big(i\Delta\chi t(V_xK + V_yM)\Big), \tag{7}$$

где $V_x = |\vec{v}|\cos(\theta), V_y = |\vec{v}|\sin(\theta)$ – поперечные составляющие скорости ветра; θ – угол между направлением вектора скорости ветра и осью абсцисс. Компонента V_y невелика, и ею можно пренебречь, полагая, что $\theta = 0$.

Наряду с ветровым переносом турбулентных неоднородностей необходимо учитывать дополнительную временную трансформацию распределения турбулентных неоднородностей за счёт мелкомасштабных флуктуаций скорости ветра, присутствующих в реальной атмосфере, для описания которых может быть применён атмосферный спектр турбулентности, отличный от закона мощности Колмогорова – Обухова [5]. Модель движения случайного поля фазовых флуктуаций (5), (7) будет включать в себя параметр, определяющий мелкомасштабные флуктуации показателя преломления, которые выражаются варьированием мощности спектральной плотности фазовых флуктуаций светового поля во времени.

Пусть эволюция фазовых флуктуаций задаётся параметром α, характеризующим степень изменения структурной функции флуктуаций показателя преломления, тогда закон для структурной функции флуктуаций показателя преломления имеет вид [6]

$$D_n(\rho, \alpha) = C_n^2\rho^{\alpha-3},$$

где $3 < \alpha < 5$, и является частным случаем закона «двух третей» при $\alpha = 3,67$. Спектр плотности флуктуаций показателя преломления в пределах инерционного интервала $l_2 \ll \rho \ll L_0$ таков:

$$\Phi_n(\chi, \alpha) = A(\alpha) C_n^2 (\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_0^2)^{-\alpha/2} \exp(-[\chi_x^2 + \chi_y^2]/\chi_m^2), \tag{8}$$

где $\chi_m = c(\alpha)/l_0$; $\chi_0 = 2\pi/L_0$; $c(\alpha) = [\pi A(\alpha)\Gamma(3/2 - \alpha/2)(1 - \alpha/3)]^{1/(\alpha-5)}$;

$$A(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2}\,\Gamma(\alpha - 1)\cos(\alpha\pi/2)\ -$$

константа, согласующая C_n^2 с показателем степени $\alpha - 3$, $\Gamma(3/2 - \alpha/2)$ – гамма-функция.

Для плоской волны, прошедшей слой случайно-неоднородной среды толщиной L, спектральная плотность фазовых флуктуаций в приближении геометрической оптики имеет вид

$$F_S(\chi, \alpha) = 2\pi k^2 L \Phi_n(\chi, \alpha). \tag{9}$$

После умножения обеих частей равенства (3) на число $A(\alpha)(2\pi/0,423)$ получим выражение

$$A(\alpha)\left(\frac{2\pi}{0,423}\right) r_0^{-5/3} = 2\pi k^2 L C_n^2 A(\alpha), \tag{10}$$

мелкомасштабные турбулентные искажения задаются в виде спектральной плотности фазовых флуктуаций светового поля:

$$F_s(\chi_{K,M}) = \widetilde{A}(\alpha) r_0^{-5/3} (\chi_{K,M}^2 + \chi_0^2)^{-\alpha/2} \exp(\chi_{K,M}^2/\chi_m^2), \tag{11}$$

где $\widetilde{A}(\alpha) = 1,182\,\pi^{-1}\Gamma(\alpha - 1)\cos(\alpha\pi/2)$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИОА СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антошкин Л. В. [и др.] *Способ и устройство эмуляции атмосферной турбулентности для настройки и тестирования адаптивных оптических систем.* Патент на изобретение №2788312, приоритет 6 апреля 2022 года.
2. Гурвич А. С. [и др.] *Лазерное излучение в турбулентной атмосфере.* М. : Наука, 1976. 277 с.
3. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. *Принципы адаптивной оптики.* М. : Наука, 1985. 336 с.
4. Татарский В. И. *Распространение волн в турбулентной атмосфере.* М. : Наука, 1967. 548 с.
5. Vernin J., Roddier F. *Experimental determination of two-dimensional spatiotemporal power spectra of stellar light scintillation. Evidence for a multilayer structure of the air turbulence in the upper troposphere.* J. Opt. Soc. Amer. 1973. V. 63. P. 270–273.
6. Toselli I. *Introducing the concept of anisotropy of different scales for modeling optical turbulence.* J. Opt. Soc. Amer. A. 2014. V. 31. P. 1868–1875.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ДАТЧИКА ВОЛНОВОГО ФРОНТА ШЭКА – ГАРТМАНА НА СТЕНДЕ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Л. Н. Лавринова, В. В. Лавринов

Институт оптики атмосферы им. В. Е. Зуева СО РАН, Томск

Сегодня круг применения датчиков волнового фронта Шэка – Гартмана включает в себя разделы медицины и промышленного производства. Одной из сфер использования датчика являются астрономические исследования для измерения искажений излучения, вызываемых турбулентностью атмосферы.

Основными элементами последних разработок датчиков гартмановского типа являются микролинзовый растр и высокоразрешающая видеокамера. В работах с низкоапертурными лазерными пучками для регистрации накопленных в атмосфере искажений волнового фронта от создаваемой лазером искусственной звезды [1] вместо элементарной линзы растра в датчике Шэка – Гартмана предложено использовать внеосевой фрагмент дифракционной линзы с таким же фокусом, но значительно большим диаметром [2], что требует проведения дополнительных численных исследований. Применение скоростной видеокамеры в датчике Шэка – Гартмана также мотивирует к разработке дополнительных алгоритмов, обеспечивающих точность измерений датчика [3].

Численная модель датчика волнового фронта Шэка – Гартмана предполагает промоделировать действие низкоапертурного датчика Шэка – Гартмана с плотной упаковкой микролинз в условиях атмосферной турбулентности, меняя размер микролинз, их фокусное расстояние, а также число линз в растре. Варьироваться могут интенсивность турбулентных искажений волнового фронта, а также оптические неоднородности светового поля.

Цель создания численной модели датчика волнового фронта Шэка – Гартмана заключается в том, что с её помощью можно решить множество задач по тестированию и отладке различных элементов и алгоритмов адаптивной системы, а также разработать цифровой аналог датчика волнового фронта Шэка – Гартмана.

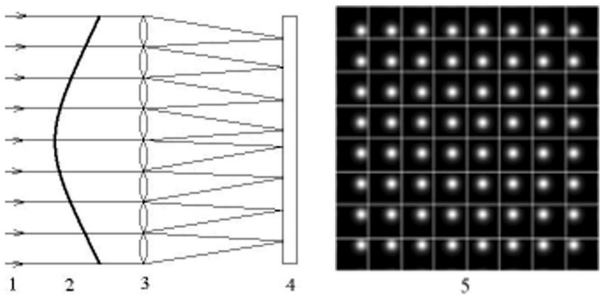
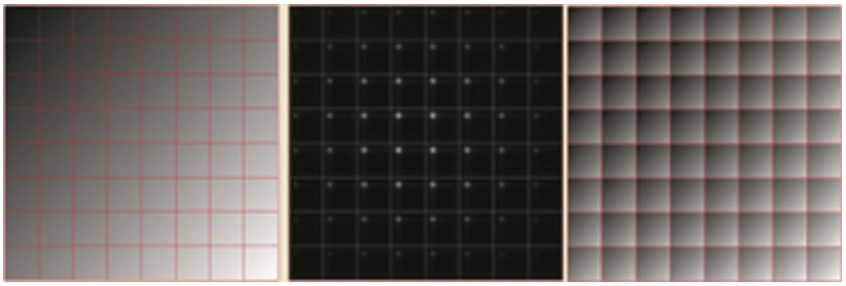


Рис. 1: Схематическое изображение действия датчика Шэка – Гартмана

На рис. 1 представлено схематическое изображение действия датчика волнового фронта Шэка – Гартмана. Линзовый растр *3* разбивает приходящий на входную апертуру системы волновой фронт *2* светового поля *1* на локальные участки, которые фокусируются на светочувствительной матрице видеокамеры *4*, формируя изображения фокальных пятен в виде гартманограммы *5*.

Численную модель датчика волнового фронта Шэка – Гартмана можно условно разбить на две части: смоделированную оптоэлектронную и алгоритмическую.

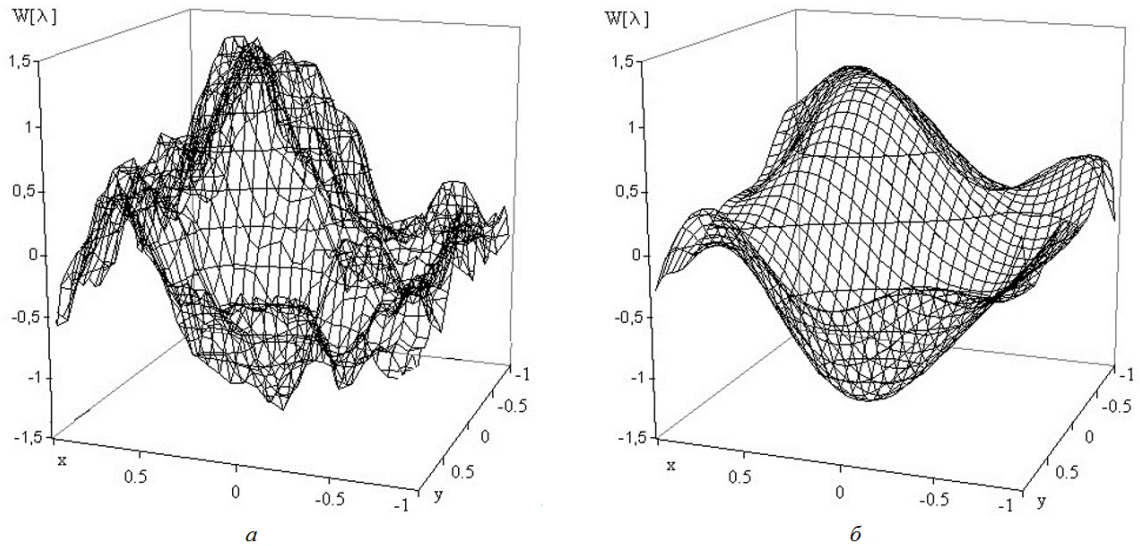
Модель оптоэлектронной части содержит численные модели светового поля как комплексной функции электрической составляющей электромагнитного излучения, атмосферной турбулентности по Колмогорову, линзового растра, решение уравнения распространения светового поля через линзу, фокусировку парциальных пучков, на которые разбивается световое поле линзовым растром, и формирование распределений интенсивности изображений пучков в фокальной плоскости.



а *б* *в*

Рис. 2: Фазовое распределение на входной апертуре системы задано двумя наклонами (*а*); (*б*) соответствует изображению линзового растра; (*в*) представляет измеренные локальные наклоны

Алгоритмическая часть включает в себя алгоритм центроидирования, вычисляющий координаты центроида (энергетического центра тяжести фокального пятна). По смещениям центроидов относительно опорной гартманограммы определяются локальные углы наклона измеряемого волнового фронта. На рис. 2 демонстрируется действие численной модели датчика Шэка – Гартмана для светового поля с амплитудным распределением, заданным константой, и фазовым распределением, заданным двумя наклонами.



а *б*

Рис. 3: Численная модель трёхмерной визуализации измеряемого (*а*) и реконструированного (*б*) волновых фронтов

По локальным наклонам измеряемого волнового фронта реализуется реконструкция волнового фронта (рис. 3), согласно которой искомое фазовое распределение представ-

ляется как разложение волновой функции по базисным модам, в их качестве могут быть использованы, например, полиномы Цернике, ортогональные в круге единичного радиуса.

Численная модель датчика Шэка – Гартмана предусматривает комбинирование различных по степени полиномов Цернике и варьирование их числа в разложении волновой функции.

Методом наименьших квадратов осуществляется подгонка локальных наклонов разложения волновой функции по полиномам Цернике к оценкам искомого волнового фронта, представленных в виде разностей координат центроидов. В результате решения методом Гаусса матричного уравнения определяются коэффициенты разложения, представляющие величину вклада каждого из полиномов Цернике в измеряемую волновую функцию. Коэффициенты разложения соответствуют весовым значениям аберраций волнового фронта: наклонов, фокусировки, астигматизма, комы и т. д.

Алгоритм реконструкции волнового фронта является важным элементом численной модели датчика Шэка – Гартмана. Оценивание алгоритма, как и действия всей численной модели датчика волнового фронта Шэка – Гартмана, выполняется вычислением среднеквадратической остаточной ошибки реконструкции измеряемого волнового фронта.

С учётом гипотезы Колмогорова, согласно которой оптические неоднородности светового поля в течение определённого отрезка времени переносятся вдоль входной апертуры системы под действием поперечной составляющей скорости ветра неизменными, разработан алгоритм опережающей коррекции. Суть такой коррекции заключается в опережающем формировании волнового фронта на основе анализа турбулентных искажений светового поля, полученных в течение определённого времени из измерений, выполненных датчиком Шэка – Гартмана.

Анализ траектории изменения координаты центроида как функции через разложение её в ряд Тейлора позволяет сделать прогноз об искажениях светового поля, регистрируемых в последующий момент времени, и использовать его, внося поправку в распределение фазы светового поля. Алгоритм опережающей коррекции предназначен для повышения точности измерений, отработан на численной модели датчика Шэка – Гартмана и является составной частью алгоритмической части датчика.

Применение корреляционного метода к совокупности зарегистрированных в фокальной плоскости датчика Шэка – Гартмана гартманограмм обеспечивает измерение поперечной составляющей скорости ветра [4] и также входит в алгоритмическую часть датчика.

Алгоритмическая часть, отлаженная и протестированная на виртуальной или смоделированной оптоэлектронной части датчика, практически без внесения дополнительных доработок является неотъемлемой компонентой датчика волнового фронта Шэка – Гартмана, действующего в реальном времени [5].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИОА СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lardiere O. [et al.] *Performance comparison of centroiding algorithms for laser guide star wavefront sensing with extremely large telescopes.* Applied Optics. 2010. V. 49. Iss. 31. P. G78–G94.
2. Ботыгина Н. Н. [и др.] *Датчик Шэка–Гартмана на основе растра низкоапертурных внеосевых дифракционных линз.* Автометрия. 2009. Т. 45. № 2. С. 88–98.

3. Антошкин Л. В., Лавринов В. В., Лавринова Л. Н. *Численный анализ эволюции фазовых флуктуаций светового поля на входной апертуре адаптивной оптической системы.* Оптика атмосферы и океана. 2016. Т. 29. № 11. С. 926–933.
4. Антошкин Л. В. [и др.] *Метод вычисления поперечных составляющих скорости ветра на входной апертуре адаптивной системы по измерениям датчика волнового фронта Шэка–Гартмана.* Автометрия. 2015. Т. 51. № 6. С. 63–69.
5. Лавринов В. В. [и др.] *О стабилизации оптического излучения в турбулентной атмосфере.* Автометрия. 2023. Т. 59. № 2. С. 89–102.

СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

К. Ю. Лапшина

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Исследование поверхностных волн привлекают внимание в связи с большим количеством академических и практических приложений [1–4]. В работе [5] произведено обобщение фундаментальной системы уравнений гидродинамики в совокупности с физически обоснованными граничными условиями, которая впервые в виде отдельных положений была записана в [6]. Интерес к изучению поверхностного волнового движения вызван необходимостью более детального описания и прогнозирования поведения волн, а также множества связанных с этим явлений в океане [7]. Нелинейные поверхностные гравитационные волны в жидкости представляют собой важный объект исследования в области гидродинамики. Понимание характеристик нелинейных волн имеет практическое значение в различных областях, включая морскую инженерию, метеорологию и экологию, а также в научных исследованиях, связанных с динамикой океана и поведением волновых процессов [8, 9]. Исследования формы поверхности морских, речных и океанических волн находят практическое применение при проектировании и расчётах гидротехнических сооружений [10].

В настоящей работе ставится задача о сравнении параметров, характеризующих поверхность нелинейных гравитационных волн в различных моделях. Одна из наиболее популярных моделей нелинейных гравитационных поверхностных волн получена Дж. Г. Стоксом [4] и активно используется до сих пор. В качестве другой модели рассмотрим исследование, приведённое в [11], где при частичной линеаризации граничных условий решение получено в виде действительно определённой комбинации W-функций Ламберта. В двумерной декартовой системе координат Oxz ось Ox направлена в сторону распространения волны, а ось Oz – вертикально вверх против поля сил тяжести g. По поверхности однородной идеальной жидкости с плотностью ρ, которая занимает нижнее полупространство $z < 0$, распространяется пакет бегущих волн. Отклонение свободной поверхности с амплитудой ζ_0 от равновесного значения $z = 0$ описывается функцией $\zeta\left(x, \zeta_0, t\right)$. В движущейся с фазовой скоростью волны c_{ph} системе координат $O\xi z$ $(\xi = x - c_{ph}t)$ с учётом представления скорости $\mathbf{u} = (\partial_z\psi, -\partial_\xi\psi)$ через функцию тока ψ основные уравнения движения выглядит следующим образом:

$$z < \zeta : \begin{cases} -\rho c_{ph}\partial_{\xi z}\psi + \rho\left(\partial_z\psi\partial_{\xi z}\psi - \partial_{xi}\psi\partial_{zz}\psi\right) = -\partial_{xi}P, \\ \rho c_{ph}\partial_{\xi\xi}\psi + \rho\left(-\partial_z\psi\partial_{\xi\xi}\psi + \partial_{xi}\psi\partial_{z\xi}\psi\right) = -\partial_z P - \rho g, \\ \Delta\psi = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь P – давление, складывающееся из атмосферного P_0, гидростатического $\rho g\left(z - \zeta\right)$ и волнового $\tilde{P}$.

Основные уравнения (1) дополнятся стандартными граничными условиями на свободной поверхности жидкости:

$$z = \zeta : \begin{cases} \partial_\xi\left(\psi - c_{ph}\zeta\right) = 0, \\ \partial_\xi\left\{\dfrac{1}{2}\left[\left(\partial_\xi\psi\right)^2 + \left(\partial_z\psi\right)^2\right] - c_{ph}\partial_z\psi + g\zeta\right\} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь произведена частичная линеаризация задачи: кинематическое граничное условие (2) взято в линейном приближении. Такое упрощение позволяет получить решение для формы свободной поверхности в виде комбинации W-функций Ламберта [11]:

$$\zeta(\xi,\zeta_0) = -a - \frac{1}{k}\left[W\left(-\frac{\varepsilon}{2}\exp(ik\xi)\right) + W\left(-\frac{\varepsilon}{2}\exp(-ik\xi)\right)\right], \quad \varepsilon = k\zeta_0, \tag{3}$$

где a – константа интегрирования, которая определяется из условия равенства нулю среднего уровня волны, k – волновое число, ε – безразмерный параметр, характеризующий амплитуду волнового движения волн Кистовича – Ламберта (КЛ).

Также в работе помимо волн КЛ рассматриваются волны Стокса. Для них постановка задачи идентична, и функция тока ψ_S выглядит следующим образом:

$$\psi_S(\xi,z,\zeta_0) = \zeta_0\left(1-\frac{\varepsilon^2}{8}\right)\sqrt{\frac{g}{k}}\cos(k\xi)\exp(kz). \tag{4}$$

Выражение, описывающее отклонение свободной поверхности, для волн Стокса ζ_S определяется соотношением

$$\zeta_S(\xi,\zeta_0) = \zeta_0\left(\cos(k\xi) + \frac{\varepsilon}{2}\cos(2k\xi) + \frac{3\varepsilon^2}{8}\cos(3k\xi)\right). \tag{5}$$

На рис. 1 изображены профили волн, построенных по выражениям (а) для волн КЛ (3) и (б) для волн Стокса (5) для разных значений амплитудного параметра ε. Профили построены в переменных, обезразмеренных на волновое число k. Волны, описываемые выражениями (3), (5), отличаются характерными углами: при вершине волны β; между линиями с максимальной крутизной фронта и среза γ; между линиями, соединяющими вершину и соседние с ней подошвы φ.

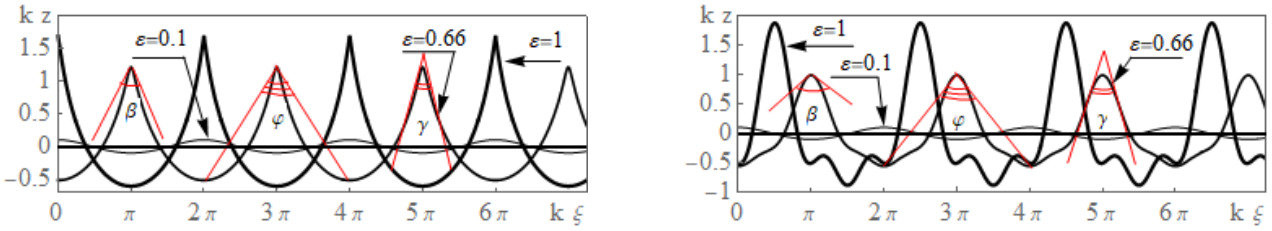


Рис. 1: Профили волн при различных значениях амплитуды для волн (а) КЛ и (б) Стокса

Стоит отметить, что выражение (3), в отличие от (5), не ограничено в применимости по амплитуде, и в пределе инфинитезимальных волн эти выражения совпадают. Выполним построение и сравнение некоторых характеристик волн КЛ и волн Стокса. На рис. 2 представлены зависимости изменения характеризующих форму свободной поверхности углов β, γ и φ (а) для волн КЛ и (б) для волн Стокса в зависимости от безразмерного амплитудного параметра ε.

Угол при вершине волны β у волн КЛ до некоторого значения ε_{cr} стремительно уменьшается и при $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$ принимает практически нулевое значение, чего не наблюдается у волн Стокса, значение угла при вершине которых практически не изменяется. Наличие особой точки объясняется разрывом функции (3) при значении $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$. Физически это означает

качественный переход волн Ламберта от волн с гладкой вершиной при $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ к волнам с заострённой вершиной при $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$.

При $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ наблюдается увеличение значения угла γ, в то время как у волн Стокса его значение монотонно убывает, и угол при вершине волны становится более острым. Обратим внимание, что угол при вершине волны β для амплитуд больше критического значения совпадает с углом между линиями с максимальной крутизной фронта и среза волны Ламберта, что означает – максимальная крутизна наблюдается на вершине волны.

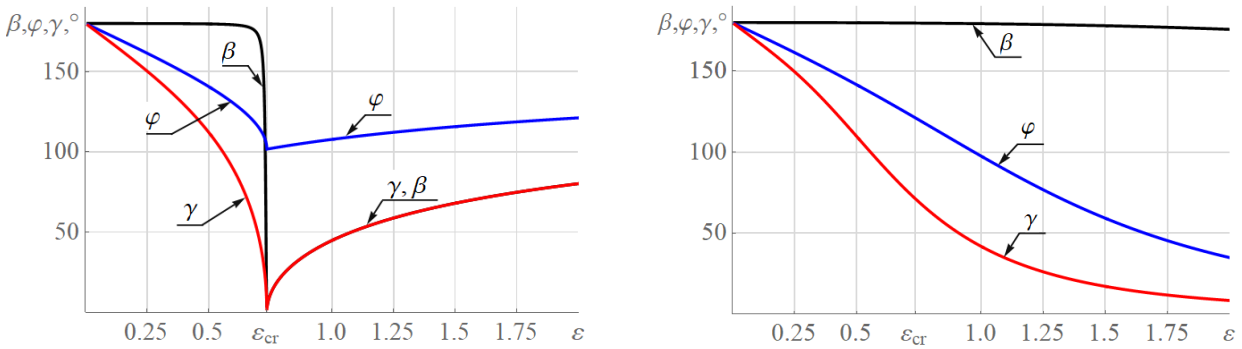


Рис. 2: Зависимость изменения угла при вершине волны β; угла между линиями с максимальной крутизной фронта и среза γ; угла между линиями, соединяющими вершину и соседние подошвы φ, характеризующего крутизну волны от амплитудного параметра ε (а) для волн КЛ, (б) для волн Стокса

Построены характеристики поверхностей нелинейных волн, исследованы влияние особенностей поверхности волн и изменения амплитуды на параметры поверхности волн. Проведён сравнительный анализ следующих параметров: углы при вершине, подошве, между линиями с максимальной крутизной фронта и среза и между линиями, соединяющими вершину и соседние подошвы для нелинейных волн КЛ и волн Стокса. Полученные результаты могут быть применены при оценке динамики нелинейных гравитационных поверхностных волн.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124012500442-3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лэмб Г. *Гидродинамика.* М.-Л. : ГИТТЛ, 1949.
2. Thomson W. *Hydrokinetic solutions and observations.* Phil. Mag. 1871. V. 42. P. 362–377.
3. Korteweg D. J., De Vries G. *On the change form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves.* Phil. Mag. 1895. V. 5. P. 422–443.
4. Stokes G. G. *On the theory of oscillatory waves.* Trans. Cam. Philos. Soc. 1847. V. 8. P. 441–455.
5. Chashechkin Y. D. *Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows.* Axioms. 2021. V. 10. P. 286.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика.* М. : Наука, 1986.
7. Гагошидзе Ш. Н. *К оценке воздействия вдольбереговых волн на береговые откосы открытых морских и речных каналов.* Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2010. Т. 4. С. 102–113.

8. Ablowitz M. J., Horikis T. P. *Interacting nonlinear wave envelopes and rogue wave formation in deep water.* Physics of Fluids. 2015. V. 27. № 1.
9. Battjes J. A., Janssen J. *Energy loss and set-up due to breaking of random waves.* Coastal Engineering. 1978. P. 569–587.
10. Лаппо Д. Д., Стрекалов С. С., Завьялов В. К. *Нагрузки и воздействия ветровых волн на гидротехнические сооружения. Теория. Инженерные методы. Расчеты.* Л.: ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1990.
11. Kistovich A. V., Chashechkin Y. D. *Propagating stationary surface potential waves in a deep ideal fluid.* Water Resources. 2018. V. 45. P. 719–727.

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА НА СТРУКТУРУ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КАНАЛЕ С УЧЁТОМ ИСПАРЕНИЯ

Е. В. Ласковец[1,2]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*
[2]*Алтайский государственный университет, Барнаул*

Изучается задача о двухслойном течении жидкости и газа в бесконечном горизонтальном канале с учётом массопереноса на границе раздела. Моделирование установившегося течения в двумерном случае проводится на основе обобщения точного решения Остроумова – Бириха [1] уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска. Распределение концентрации пара в верхнем слое системы удовлетворяет уравнению диффузии. В газопаровом слое дополнительно учитываются эффекты Соре и Дюфура. На недеформируемой термокапиллярной границе раздела – процессы тепло- и массопереноса. На твёрдых непроницаемых горизонтальных стенках канала выполняются условия прилипания для продольной скорости, задано линейное распределение температуры. На верхней стенке функция концентрации пара удовлетворяет условию отсутствия потока пара с учётом эффекта Соре. На термокапиллярной границе раздела сред полагаются равными функции скорости и температуры, заданы кинематическое и динамическое условия, а также условия переноса тепла и баланса масс. Масса испаряющейся с границы раздела жидкости при этом может полагаться постоянной или линейно зависящей от продольной координаты. Концентрация насыщенного пара вычисляется исходя из следствия уравнений Менделеева – Клапейрона и Клапейрона – Клаузиуса [1]. В верхнем слое системы полагается заданным расход газа.

На основе построенного точного решения возможно изучение влияния физических и геометрических параметров задачи на основные характеристики течения. В качестве примеров двухслойных течений рассматриваются системы HFE-7100 – воздух и этанол – воздух. Изучено влияние тепловой нагрузки на границах системы и референсной температуры на характер течения. Представлены случаи смены режимов течения, а также процессов конденсации и испарения жидкости нижнего слоя.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 22-11-00243, https://rscf.ru/project/22-11-00243/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончарова О. Н. [и др.] *Изучение конвективных течений жидкости и спутного потока газа с учетом испарения.* ТВТ. 2017. Т. 55. № 6. С. 720–732.

СПЕКТР КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВУМЕРНОЕ ПЛОСКОЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ

Е. Н. Лемешкова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассматривается течение вязкой несжимаемая жидкости в слое постоянной толщины l на плоской твёрдой неравномерно нагретой поверхности. На свободной поверхности $y = l$ задано условие теплового контакта, поверхностное натяжение σ линейно зависит от температуры: $\sigma(\theta) = \sigma_0 - æ(\theta - \theta_0)$, σ_0, æ и θ_0 – положительные постоянные. Температура в жидкости распределена квадратично: $\theta(x, y) = a(y)x^2 + b(y)$, где $|x| < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant l$. Пусть $u_1(x, y) = w(y)x$, $u_2(x, y) = v(y)$ – компоненты вектора скорости и $p(x, y)$ – давление, тогда стационарное течение в слое, соответствующее установлению на свободной поверхности жидкости баланса касательных термокапиллярных и вязких напряжений, описывается системой уравнений и граничных условий

$$\begin{gathered} vw_y + w^2 = f + \nu w_{yy}, \quad w + v_y = 0, \\ 2wa + va_y = \chi a_{yy}, \quad vb_y = \chi b_{yy} + 2\chi a, \quad |x| < \infty, \quad 0 < y < l, \end{gathered} \tag{1}$$

$$y = 0: \quad w = v = 0, \quad a = a_0, \quad b = b_0, \tag{2}$$

$$y = l: \quad v = 0, \quad \rho\nu w_y = -2æa, \quad k\theta_y + \gamma(\theta - \theta_{gas}) = q. \tag{3}$$

В уравнениях (1) $\nu > 0$, $\chi > 0$ – постоянные кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости соответственно. Давление представимо в виде

$$\frac{1}{\rho}\, p = d(y) - \frac{f}{2}\, x^2, \quad d(y) = \nu v_y - \frac{1}{2}\, v^2 + d_0, \quad d_0 = \text{const},$$

где $\rho > 0$ – плотность жидкости, f – произвольная константа. В равенствах (2) a_0, b_0 – известные постоянные. Первые два соотношения в (3) суть следствия кинематического и динамического условий. В последнем равенстве (3) (условие теплового контакта) $k > 0$ – коэффициент теплопроводности, $q(x)$ – заданный поток тепла, $\gamma \geqslant 0$ – коэффициент межфазного теплообмена. Из условия для нормальных напряжений получаем, что свободная поверхность остаётся плоской. Данное предположение может выполняться, например, при действии достаточно большого капиллярного давления (величина $\sigma_0 \gg 1$). В соответствии с представлением температуры в условии теплового контакта необходимо считать, что

$$\theta_{gas} = a_1 x^2 + b_1, \quad q = a_2 x^2 + b_2$$

с заданными постоянными a_k, b_k, $k = 1, 2$. Следовательно, энергетическое условие даст ещё два соотношения для $a(y)$, $b(y)$

$$y = l: \quad ka_y + \gamma a = a_2 + a_1\gamma, \quad kb_y + \gamma b = b_2 + b_1\gamma. \tag{4}$$

Поставленная задача (1)–(4) является нелинейной и обратной, так как постоянная f является искомой. Действительно, если из уравнения сохранения массы (второе уравнение (1)) исключить $v(y)$, то получается задача для функций $w(y)$, $a(y)$. При известных $v(y)$ и $a(y)$ задача для функции $b(y)$ отделяется.

Введём безразмерные переменные и параметры

$$\xi = \frac{y}{l}, \quad W = \frac{l^2}{\nu}\, w, \quad V = \frac{l}{\nu}\,, \quad F = \frac{l^4}{\nu^2}\, f, \quad A = \frac{a}{a_0}\,, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi}\,, \quad \mathrm{Ma} = \frac{a_0 æ l^3}{\rho\nu^2}\,, \quad \mathrm{Bi} = \frac{\gamma l}{k}\,.$$

Здесь Pr, Ma, Bi – числа Прандтля, Марангони и Био соответственно.

Для определения новых неизвестных функций $V(\xi)$, $A(\xi)$ и постоянной F, которая является собственным значением задачи из (1)–(4), получаем следующую краевую задачу с нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$V''' + V'^2 - VV'' - F = 0, \tag{5}$$

$$A'' + \mathrm{Pr}(2V'A - VA') = 0, \tag{6}$$

$$\xi = 0: \quad V = 0, \quad V' = 0, \quad A = 1, \tag{7}$$

$$\xi = 1: \quad V = 0, \quad V'' = 2\mathrm{Ma}A, \quad A' + \mathrm{Bi}A = \mathrm{Q}, \tag{8}$$

где $\mathrm{Q} = l(a_2 + a_1\gamma)/k$ – заданная постоянная.

Для численного анализа системы (5)–(8) при любых значениях числа Марангони Ma предлагается алгоритм, основным приёмом которого является сведение краевой задачи (5)–(8) к задаче Коши. Для этого подвергнем дифференциальные уравнения (5), (6) действию линейной группы преобразований [1]

$$\xi = D_1\overline{\xi}, \quad V = D_2\overline{V}, \quad A = \overline{A}, \tag{9}$$

где $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$ – параметры, подлежащие определению. Преобразованные уравнения примут вид

$$\overline{V}''' + D_1D_2\overline{V}'^2 - D_1D_2\overline{V}\,\overline{V}'' - D_1^{-3}D_2^{-1}F = 0, \quad \overline{A}'' + D_1D_2\mathrm{P}(2\overline{V}'\overline{A} - \overline{V}\,\overline{A}') = 0, \tag{10}$$

Полученные уравнения будут инвариантны относительно параметров преобразования, если

$$D_1D_2 = 1. \tag{11}$$

Тогда система (10) примет вид

$$\overline{V}''' + \overline{V}'^2 - \overline{V}\,\overline{V}'' - \overline{F} = 0, \quad \overline{A}'' + \mathrm{P}(2\overline{V}'\overline{A} - \overline{V}\,\overline{A}') = 0, \tag{12}$$

где с учётом (11)

$$\overline{F} = D_1^4F. \tag{13}$$

Граничные условия в первой точке $\xi = 0$ в результате преобразования (9) не меняются:

$$\overline{\xi} = 0: \quad \overline{V} = 0, \quad \overline{V}' = 0, \quad \overline{A} = 1. \tag{14}$$

Недостающими условиями при $\overline{\xi} = 0$, очевидно, являются условия на вторую $\overline{V}''$ и первую $\overline{A}'$ производные. Для получения этих условий потребуем, чтобы после преобразования они не зависели от D_1. Этого возможно добиться, если взять их в виде

$$V''(0) = D_1^{-3}, \quad A'(0) = D_1^{-1},$$

тогда

$$\overline{V}''(0) = 1, \quad \overline{A}'(0) = 1. \tag{15}$$

Эти два равенства вместе с условиями (14) позволяют решить систему уравнений (12) как задачу Коши.

Первое условие (8) в точке $\xi = 1$ после преобразования (9) примет вид

$$\overline{V}(D_1^{-1}) = 0, \tag{16}$$

что позволит определить параметр преобразования D_1, а значит и D_2 из (11).

Описанные действия позволяют дать следующую схему построения спектров $F = F(\mathrm{Ma}, \mathrm{Pr})$ и $F = F(\mathrm{Q}, \mathrm{Pr})$ краевой задачи (5)–(8). Задается значение $\overline{F} \in (-\infty, \infty)$ модифицированного градиента давления, и задача Коши (12), (14), (15) интегрируется до тех пор, пока не будет выполнено условие $\overline{V} = 0$. Пусть это происходит при некотором значении $\overline{\xi} = \overline{\xi}_0$. В соответствии с условиями (11), (16) получаем значения параметров преобразования: $D_2 = D_1^{-1} = \overline{\xi}_0$. Значения числа Марангони Ma и параметра Q находим, используя последние два условия (8), а именно, с учётом (9), $\mathrm{Ma} = \overline{\xi}_0^3 \overline{V}''(\overline{\xi}_0)/2\overline{A}(\overline{\xi}_0)$, $\mathrm{Q} = \overline{\xi}_0 \overline{A}'(\overline{\xi}_0) + \mathrm{Bi}\overline{A}\,\overline{\xi}_0$. И наконец, получаем собственное значение исходной задачи (5)–(8) в виде $F = D_1^{-3} D_2 \overline{F} = \overline{\xi}_0^4 \overline{F}$. Отметим, что в процессе реализации описанного алгоритма учитывалась возможность неединственности корня уравнения $\overline{V}(\overline{\xi}) = 0$. Кроме того, поскольку знак параметров D_1, D_2 преобразования (9) может быть любым, интегрирование задачи (12), (14), (15) должно быть отдельно выполнено в областях $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$.

На рис. 1 построен спектр $F = F(\mathrm{Ma}, 0)$ ($\mathrm{Bi} = 0, \mathrm{Q} = 0$ и $A = 1$). Ветвь 1 соответствует положительным значениям числа Марангони, а ветви 2, 3 – отрицательным. Один из концов ветви 3 соответствует асимптотике $F = 3\,\mathrm{Ma}$, а другой при $\overline{F} \to 0 - 0$ стремится к общей с ветвью 2 вертикальной асимптоте при $\lg|\mathrm{Ma}| \approx 2.758$. Отрицательным значениям $\overline{F}$ соответствует только ветвь 3.

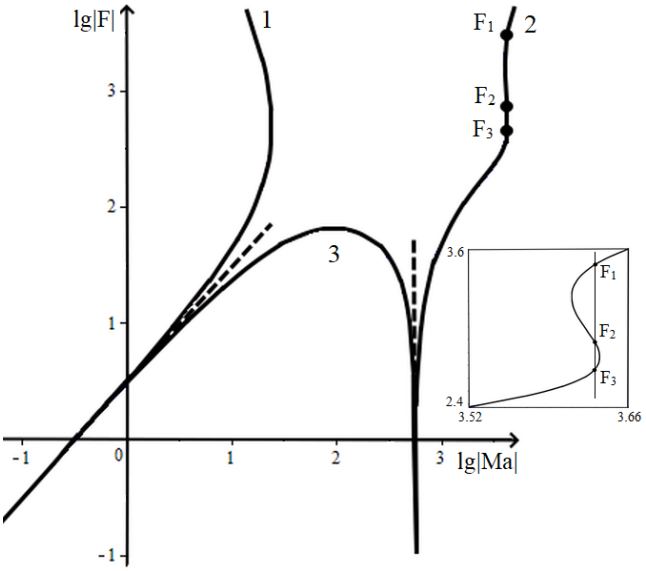


Рис. 1: Спектр $F = F(\mathrm{Ma}, 0)$ задачи (5)–(8) при $\mathrm{Bi} = 0, \mathrm{Q} = 0$

Установлено, что спектр $F = F(\mathrm{Ma}, 0)$ обладает неединственностью решения. В частности, на ветви 1 ($\mathrm{Ma} > 0$) имеется не более двух решений в диапазоне значений модифицированного градиента давления $\overline{F} \in (0.756; 10^4)$. На ветвях 2, 3 ($\mathrm{Ma} < 0$) имеется от одного до трёх значений собственного числа F, отвечающих фиксированному значению числа Марангони (на ветви 3 – одно решение). Участок ветви 2 с неединственным решением представлен в увеличенном масштабе. Отметим также, что имеется не менее двух

решений с нулевым собственным значением: одно соответствует асимптотике $F = 3\,\mathrm{Ma}$, $\mathrm{Ma} = 0$, а второе – значению числа Марангони $\mathrm{Ma} = -572.426$ (общая вертикальная асимптота ветвей 2 и 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. На Ц. *Вычислительные методы решения прикладных граничных задач*. М. : Мир, 1982. 294 с.

ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИЙ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ДВУХСЛОЙНЫХ СИСТЕМАХ ЖИДКОСТЕЙ С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

Т. П. Любимова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Одним из простых и эффективных методов воздействия на устойчивость равновесных состояний и течений являются механические вибрации. Они могут приводить к созданию новых состояний равновесия, стабилизации равновесных состояний, которые являются неустойчивыми в отсутствие вибраций, подавлению нежелательных течений. В докладе анализируется влияние вибраций на возникновение термокапиллярной конвекции в двухслойных системах жидкостей с деформируемыми поверхностями раздела. В первой части доклада обсуждается влияние высокочастотных вертикальных вибраций на неустойчивость Релея – Бенара – Марангони в системе горизонтальных слоёв жидкостей с близкими плотностями. Анализ в рамках обобщённого приближения Буссинеска, позволяющего корректно учесть деформации поверхности раздела, свидетельствует о том, что при подогреве снизу вибрации оказывают стабилизирующее действие на ячеистые монотонные и колебательные возмущения. На длинноволновые моды неустойчивости вибрации не оказывают влияния, и при определённом значении вибрационного числа Рэлея длинноволновые колебательные возмущения более опасны, чем ячеистые. Однако рост интенсивности вибраций приводит также к появлению новой, монотонной ячеистой моды неустойчивости, при повышении интенсивности вибраций она становится наиболее опасной. При нагреве сверху за неустойчивость ответственны монотонные ячеистые возмущения, вибрации оказывают на них дестабилизирующее действие.

Во второй части доклада обсуждаются механизмы неустойчивости в системе горизонтальных слоёв жидкостей разной плотности, при вертикальном градиенте температуры, под действием тяжести, касательных к поверхности раздела вибраций конечной частоты и термокапиллярного эффекта. Тепловым расширением жидкостей пренебрегается. Показано, что вибрации приводят к дестабилизации длинноволновой моды термокапиллярной неустойчивости, связанной с деформируемостью поверхности раздела. Термокапиллярный эффект, в зависимости от знаков разности динамических вязкостей и числа Марангони, может как стабилизировать, так и дестабилизировать длинноволновую неустойчивость Кельвина – Гельмгольца на границе осциллирующих потоков.

Обсуждается также применение вибраций для подавления термокапиллярной конвекции при выращивании кристаллов. На примере выращивания кристаллов методом плавающей зоны показано, что вибрации, формируя поверхностные волны на свободной поверхности расплава, приводят к генерации среднего течения в направлении, противоположном термокапиллярному, что положительно влияет на структуру получаемого кристалла.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ХАРАКТЕРА ИСПАРЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛЕ В РАМКАХ ПОСТАНОВКИ С НУЛЕВЫМ РАСХОДОМ ЖИДКОСТИ

Е. Е. Макаров[1,2]

[1]*Алтайский государственный университет, Барнаул*
[2]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

Рассматривается стационарное течение в системе «жидкость – газ» в наклонном слое с твёрдыми непроницаемыми стенками. Вязкая несжимаемая жидкость и двухкомпонентная смесь газа и пара заполняют бесконечный канал. Толщины слоёв фиксированы и равны l и h соответственно (см. рис. 1).

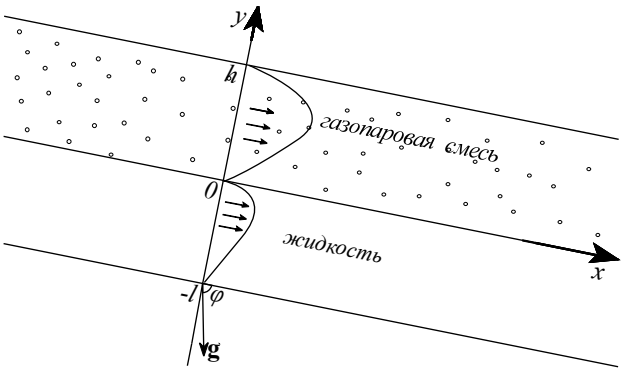


Рис. 1: Схема течения

Система координат расположена так, что граница раздела, остающаяся недеформируемой, удовлетворяет уравнению $y = 0$ и совпадает с осью Ox. Вектор силы тяжести g направлен под углом φ по отношению к подложке ($\mathbf{g} = (g\cos\varphi, -g\sin\varphi)$). Пар является пассивной примесью, т. е. не влияет на свойства газа.

Моделирование проводится в рамках математической модели испарительной конвекции на основе приближения Буссинеска уравнений Навье – Стокса. Определяющая система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p' + \nu\Delta\mathbf{v} - \mathbf{g}(\beta T + \underline{\gamma C}), \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\ \mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \chi(\Delta T + \underline{\alpha\Delta C}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla C = D(\Delta C + \delta\Delta T). \tag{4}$$

Система уравнений (1)–(4) допускает решение специального вида, являющееся обобщением решения Остроумова – Бириха на случай термоконцентрационной конвекции, имеющее групповую природу и описывающее двухслойные течения жидкости и газопаровой смеси в бесконечном плоском канале:

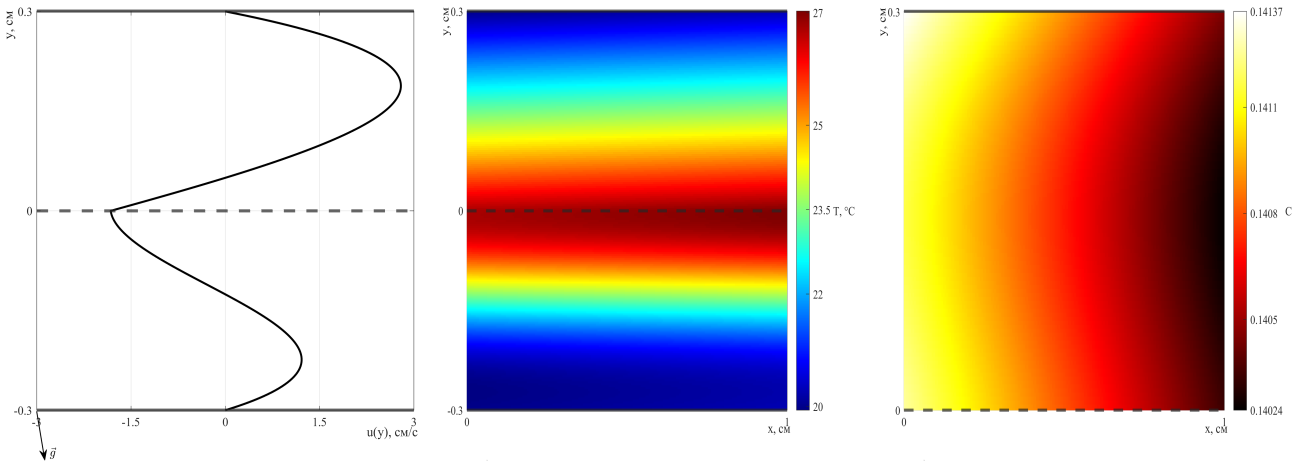
$$u_i = u_i(y), \quad v_i = 0, \quad T_i = Ax + \vartheta_i(y), \quad C = -Bx + \psi(y), \quad p_i' = p_i'(x, y). \tag{5}$$

Здесь и далее индекс i определяет соответствующую рабочую среду: $i = 1$ характеризует жидкость, $i = 2$ — газопаровую смесь.

На твёрдых стенках и границе раздела выполняются условие прилипания для скорости, температурный режим, заданный линейно относительно продольной координаты, непрерывность функций продольной скорости и температуры, кинематическое и динамическое (проекция динамического условия на касательный вектор) условия, баланс тепловых потоков с учётом эффектов Соре и Дюфура и условие, определяющее концентрацию насыщенного пара на границе раздела. Для функции концентрации пара на верхней стенке канала выбрано условие нулевого потока пара. Задан расход газа Q_2 при замкнутости потока в нижнем слое.

Явные представления всех искомых функций (5) в аналитическом виде зависят от знака параметра, определяющего значение продольного градиента температуры A, и представляют собой комбинацию тригонометрических и гиперболических функций [1]. Построенное точное решение уравнений конвекции описывает течения в двухслойной системе и полностью соответствует конфигурации экспериментальной установки. При выполнении требования замкнутости потока в слое жидкости оказалось возможным точно соблюсти условия теплофизических экспериментов.

Для системы жидкость – газ типа этанол – воздух получены расчётные значения массовой скорости испарения M, термокапиллярных и сдвиговых напряжений на границе раздела, проведено сравнение с данными экспериментов. Установлено, что при равных толщинах слоёв $l = h = 3$ мм и начальной температуре $T_0 = \{20\,^\circ\mathrm{C}, 30\,^\circ\mathrm{C}, 40\,^\circ\mathrm{C}\}$ для десяти экспериментальных значений скорости газа и продольного градиента температуры получено качественное совпадение с данными экспериментов: рост значения M с увеличением величины Q_2 (и, соответственно, A).



(а) (б) (в)

Рис. 2: Профили скорости (а), распределение температуры (б) и концентрации пара (в) в системе этанол – воздух: $\varphi = 80\,^\circ C$, $\vartheta^- = 20\,^\circ C$, $\vartheta^+ = 20\,^\circ C$, $T_0 = 20\,^\circ C$, $Q_2 = 0.5{\cdot}10^{-5}$ кг/(м·с), $A = 29$ К/м

На рис. 2 представлены профили скорости, распределения температуры и концентрации пара при значениях расхода газа $Q_2 = 0.5 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) и продольного градиента температуры $A = 29$ К/м.

Проведено сравнение теоретических и экспериментальных значений касательных напряжений на границе раздела, и обнаружено достаточно хорошее количественное совпадение расчётных и экспериментальных величин, см. табл. 1. Для системы этанол – воздух наилучшее количественное совпадение значений сдвиговых напряжений с экспериментальными данными обнаружено при значениях расхода газа $Q_2 = 0.5 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) и продольного градиента температуры $A = 29$ К/м. Модуль разности расчётного и экспериментального значений составляет $0.03205 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с^2). Наилучшее совпадение значений термокапиллярных напряжений обнаружено при $Q_2 = 3.5 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) и $A = 55$ К/м. Отличие расчётного и экспериментального значений составляет 0.01 Н/м^2.

Таблица 1: Расчётные значения параметров, определяющих касательные и термокапиллярные напряжения в системе этанол – воздух при $T_0 = 20\,^\circ$C, $l = 3$ мм, $h = 3$ мм

Q_{2exp}, кг/(м·с)	A_{exp}, К/м	τ_f, кг/(м·с^2)	τ_g, кг/(м·с^2)	τ_{gexp}, кг/(м·с^2)	τ_σ, Н/м^2	$\tau_{\sigma exp}$, Н/м^2
$5 \cdot 10^{-5}$	78	$-2.83785 \cdot 10^{-3}$	$3.40215 \cdot 10^{-3}$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	$6.24 \cdot 10^{-3}$	$6.29 \cdot 10^{-3}$
$4.5 \cdot 10^{-5}$	69	$-2.4572 \cdot 10^{-3}$	$3.0628 \cdot 10^{-3}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$5.52 \cdot 10^{-3}$	$5.56 \cdot 10^{-3}$
$4 \cdot 10^{-5}$	60	$-4.50342 \cdot 10^{-3}$	$2.96578 \cdot 10^{-3}$	$3.38 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$4.83 \cdot 10^{-3}$
$3.5 \cdot 10^{-5}$	55	$-2.01082 \cdot 10^{-3}$	$2.38918 \cdot 10^{-3}$	$2.96 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$4.41 \cdot 10^{-3}$
$3 \cdot 10^{-5}$	54	$-2.26008 \cdot 10^{-3}$	$2.05992 \cdot 10^{-3}$	$2.53 \cdot 10^{-3}$	$4.32 \cdot 10^{-3}$	$4.35 \cdot 10^{-3}$
$2.5 \cdot 10^{-5}$	51	$-2.35189 \cdot 10^{-3}$	$1.72811 \cdot 10^{-3}$	$2.11 \cdot 10^{-3}$	$4.08 \cdot 10^{-3}$	$4.13 \cdot 10^{-3}$
$2 \cdot 10^{-5}$	49	$-2.52246 \cdot 10^{-3}$	$1.39754 \cdot 10^{-3}$	$1.69 \cdot 10^{-3}$	$3.92 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$
$1.5 \cdot 10^{-5}$	47	$-2.69304 \cdot 10^{-3}$	$1.06696 \cdot 10^{-3}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$	$3.76 \cdot 10^{-3}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$
$1 \cdot 10^{-5}$	44	$-2.78493 \cdot 10^{-3}$	$0.735073 \cdot 10^{-3}$	$0.84 \cdot 10^{-3}$	$3.52 \cdot 10^{-3}$	$3.59 \cdot 10^{-3}$
$0.5 \cdot 10^{-5}$	29	$-1.93205 \cdot 10^{-3}$	$0.38795 \cdot 10^{-3}$	$0.42 \cdot 10^{-3}$	$2.32 \cdot 10^{-3}$	$2.34 \cdot 10^{-3}$

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 22-11-00243, https://rscf.ru/project/22-11-00243/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Makarov E. E. *Modelling of stationary flows of a liquid-gas system in an inclined channel subject to evaporation.* J. Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2023. V. 16. № 1. P. 110–120.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В УСТАНОВКЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С РАДИАЛЬНЫМ ТЕЧЕНИЕМ РАСТВОРА

А. А. Максимова[1,2], *И. И. Рыжков*[1,2]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*
[2]*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

Для разделения, очистки и концентрирования растворов широко используются баромембранные процессы: микрофильтрация, ультрафильтрация, нанофильтрация и обратный осмос [1]. В данных процессах создаётся трансмембранная разность давлений, которая вызывает поток растворителя и растворённого вещества через мембрану. Растворённое вещество полностью или частично задерживается мембраной, в результате чего на её поверхности возникает высококонцентрированный слой, оказывающий сопротивление массопереносу. Это явление называется концентрационной поляризацией [2]. Поляризационные явления сопровождают многие мембранные процессы разделения. Так как падение потока негативно сказывается на технико-экономических показателях мембраны, необходимо принимать меры для устранения причин, связанных с этим явлением. Для уменьшения проявлений концентрационной поляризации применяют перемешивание раствора, регулируют скорость потока вдоль мембраны либо влияют на коэффициент массопереноса путём изменения форм и размеров модуля, снижая длину или увеличивая его гидродинамический диаметр [3]. Для более глубокого понимания и предсказания эффектов концентрационной поляризации активно используется математическое моделирование. Ранее в работах были рассмотрены одномерные (плёночные) модели и двумерные модели концентрационной поляризации, которые показали хорошее согласие с экспериментальными данными [4].

Целью работы является сравнительный анализ численных и аналитических моделей, описывающих явление концентрационной поляризации в установке тангенциальной фильтрации с радиальным течением раствора.

Были рассмотрены двумерная осесимметричная и трёхмерная математические модели течения растворителя и растворённого вещества (водный раствор хлорида калия) в фильтрационной ячейке с мембраной в виде плоского диска заданного диаметра. Данные численные модели сравниваются с моделями, основанными на автомодельных решениях упрощённых уравнений движения и массопереноса, позволяющих прогнозировать концентрацию на поверхности мембраны для развивающегося концентрационного пограничного слоя.

Одна из использованных моделей для расчёта течения в фильтрационной ячейке – осесимметричная математическая модель, основанная на уравнениях Навье – Стокса, уравнении неразрывности и уравнении переноса растворенного вещества в цилиндрических координатах (r, z).

Введём следующие обозначения: $\boldsymbol{V}=(V_r, V_z)$ – вектор скорости (мм/с), P – давление (Па) и C – концентрация (моль/м^3).

На рис. 1 а показан вид фильтрационной ячейки в разрезе. Во входное отверстие подаётся перпендикулярно поверхности мембраны постоянный объёмный поток раствора V_f, далее раствор движется в радиальном направлении от центра к краям мембраны и уда-

ляется через щелевые зазоры в верхней части (рис. 1б). На входе радиальная компонента скорости полагается равной нулю и задаётся концентрация растворённого вещества C_f.

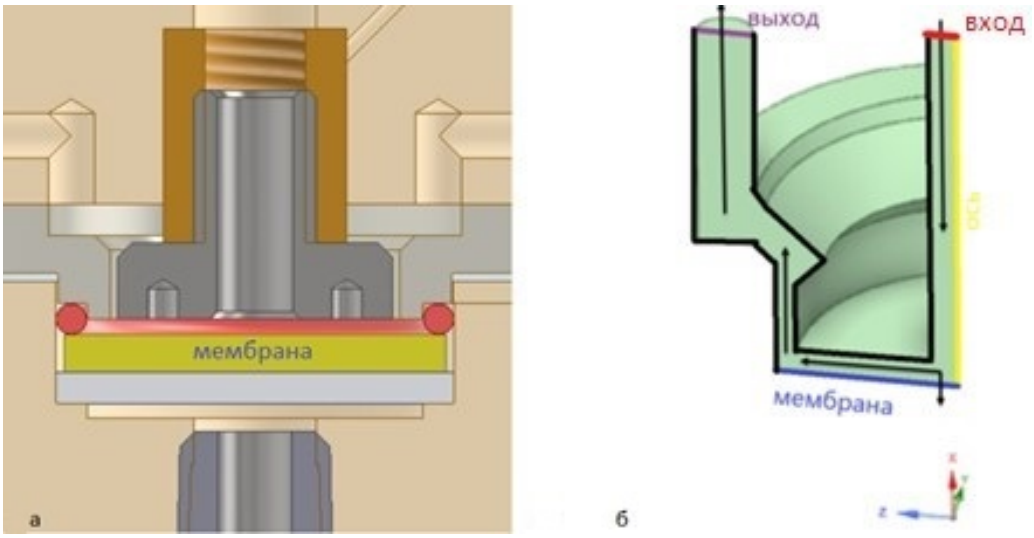


Рис. 1: Вид фильтрационной ячейки в разрезе (а) и геометрия расчётной области осесимметричной модели (б)

На стенках ставятся условие прилипания и условие отсутствия потока массы растворённого компонента:

$$\boldsymbol{V} = 0, \quad C\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} - D\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{n}} = 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ – вектор нормали к поверхности, D – коэффициент диффузии растворённого вещества. На поверхности мембраны задаётся постоянный объёмный поток раствора через неё, равный V_m, при этом радиальная компонента скорости полагается равной нулю.

Обозначим через C_p концентрацию в пермеате, а через C_m – концентрацию на поверхности мембраны. Тогда поток через мембрану даётся формулой

$$J = -C_m V_m - D\frac{dC}{dz}.$$

Будем предполагать, что $J = -C_p V_m$, в результате получим граничное условие на поверхности мембраны:

$$C_m R V_m + D\frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad R = 1 - \frac{C_p}{C_m},$$

где R – коэффициент задержания. Предполагается, что в направлении нормали к выходным отверстиям не изменяются компоненты вектора скорости и концентрация. Расчёты производятся для водного раствора хлорида калия с коэффициентом диффузии $D = 1.996 \cdot 10^{-9}\,\text{м}^2/\text{с}$, динамической вязкостью $\mu = 1.003 \cdot 10^{\breve{}3}$ Па·с, рабочим радиусом $R_r = 0.006\,\text{м}$, гидродинамическим диаметром $d = 0.0005\,\text{м}$, высотой канала $h = 0.001\,\text{м}$ и плотностью $\rho = 998.2\,\text{кг}/\text{м}^2$. Для трёхмерной модели задаются такие же начальные и граничные условия, только в трёхмерных декартовых координатах.

Для двухмерной и трёхмерной моделей с помощью пакета гидродинамических расчётов Ansys Fluent R21 были получены корреляции для зависимостей концентрации на

поверхности мембраны от концентрации в сырьевом потоке, скорости сырьевого потока и скорости потока через мембрану.

В работе [5] на основе автомодельного решения упрощённых уравнений движения и массопереноса определены корреляции для зависимостей концентрации на поверхности мембраны от скоростей входного потока и потока через мембрану, радиуса ячейки и гидродинамических размеров модуля. Для описания корреляций введём безразмерные величины: число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho V_m h/\mu$, число Шмидта $\mathrm{Sc} = \mu/\rho D$, число Пекле $\mathrm{Pe}_m = V_m d/D$.

В случае когда не учитывается течение через мембрану в установке тангенциальной фильтрации с радиальным течением раствора, число Шервуда будем рассчитывать по формуле

$$\mathrm{Sh} = 1.47(\mathrm{Re}\,\mathrm{Sc}\,h/R_r)^{1/3}, \tag{1}$$

а когда течение через мембрану учитывается, то число Шервуда будет задаваться формулой

$$\mathrm{Sh} = 1.467(\mathrm{Re}\,\mathrm{Sc}\,h/R_r)^{1/3}(1 + 0.41\lambda + 0.03\lambda^2 - 1.25\cdot 10^{-3}\lambda^3), \tag{2}$$

где $\lambda = \mathrm{Pe}_m/(\mathrm{Re}\,\mathrm{Sc}\,h/R_r)^{1/3}$.

Число Пекле можно записать в виде

$$\mathrm{Pe}_m = \left(1 - \frac{C_0}{C_m}\right)\frac{\mathrm{Sh}}{R},$$

откуда

$$C_m = \frac{C_f\ \mathrm{Sh}}{\mathrm{Sh} - \mathrm{Pe}_m R}.$$

Подставляя в последнюю формулу выражения (1) и (2), получим средние концентрации на поверхности мембраны (рис. 2) без учёта потока через мембрану (Pe_m=0 на графике) и при учёте потока через мембрану ($\mathrm{Pe}_m \neq 0$ на графике), что соответствует процессу ультрафильтрации.

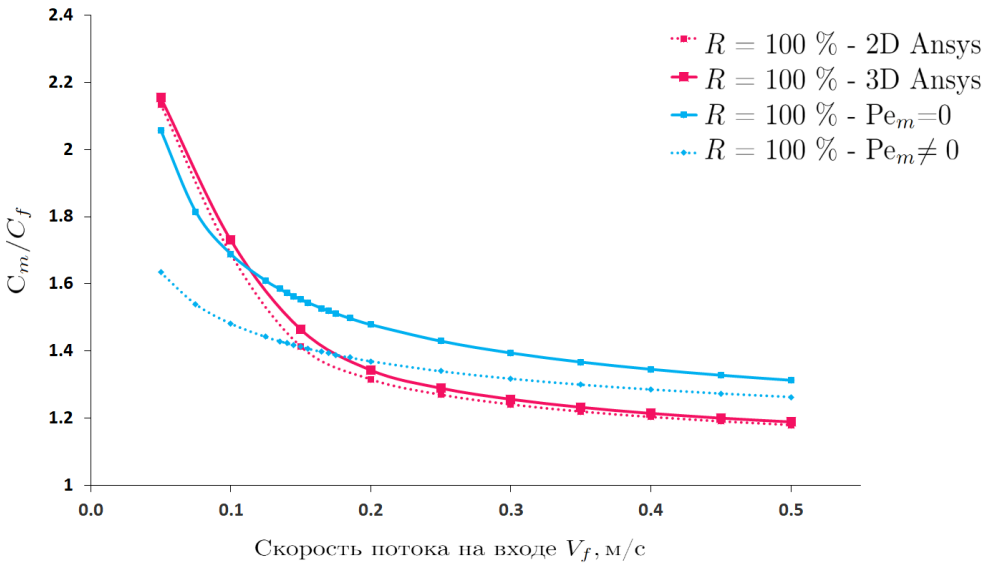


Рис. 2: Зависимость отношения средней концентрации на мембране к концентрации сырьевого потока от скорости сырьевого потока при скорости через мембрану 0.0278 мм/с

Показано, что при фиксированной скорости сырьевого потока увеличение скорости через мембрану увеличивает концентрацию вблизи неё, а при фиксированной скорости потока через мембрану увеличение скорости сырьевого потока уменьшает среднюю концентрацию и влияние концентрационной поляризации. Также было показано хорошее согласование данных, полученных на основе численного расчёта в Ansys Fluent с корреляциями из автомодельного решения упрощённых уравнений движения и массопереноса. Результаты могут быть использованы для совершенствования дизайна фильтрационной ячейки с радиальным течением раствора.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-19-00269, https://rscf.ru/project/23-19-00269/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mulder M. *Basic principles of membrane technology.* M. : Мир, 1999.
2. Zydney A. L. *Stagnant film model for concentration polarization in membrane systems.* J. Membrane Science. 1997. Т. 130. С. 275–281.
3. Miranda M., Campos B. L. M. *Concentration polarization in a membrane placed under an impinging jet confined by a conical wall – a numerical approach.* J. Membrane Science. 2001. Т. 182. С. 257–270.
4. Sablani S. S. [et al.] *Concentration polarization in ultrafiltration and reverse osmosis: a critical review.* Desalination. 2001. Т. 141. С. 260–289.
5. De S., Bhattacharya P. K. *Prediction of mass-transfer coefficient with suction in the applications of reverse osmosis and ultrafiltration.* J. Membrane Science. 1997. Т. 128. С. 119–131.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОГО РАСТВОРА В КОНФУЗОР-ДИФФУЗОРНОМ КАНАЛЕ

Я. Р. Мердеева, А. И. Кадыйров

Институт энергетики и перспективных технологий ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Одним из примеров использования полимерных растворов, в частности водных, является их применение в технологии полимерного обводнения для увеличения добычи трудноизвлекаемой нефти [1]. Водные растворы полиакриламида обладают вязкоупругими свойствами, что вносит существенный вклад в структуру течения таких жидкостей в каналах с переменным сечением [2], имитирующих пористую структуру пласта. В качестве канала с переменным сечением рассмотрен участок трубы с конфузор-диффузорной вставкой со степенью сужения 2:1 и 3.75:1. Благодаря прозрачности водного раствора полиакриамида, выполнена визуализация структуры течения путём отслеживания перемещения трассеров (полиамидных частиц размером 20 мкм). С помощью оптического метода Smoke Image Velocimetry (SiV) [3] построены профили осевой скорости в поперечных сечениях канала, а также распределения осевой скорости на оси канала. Анализ данных выявил наличие четырёх стационарных режимов течения исследуемой жидкости в каналах с конфузор-диффузорными вставками: ползущее течение (1), течение с образованием вихрей в пограничной области вблизи сужения (2), расходящееся течение с наличием (3) и отсутствием вихревой области в пограничной области (4). Здесь расходящееся течение (divergent flow) представляет собой такое течение, при котором поток жидкости начинает обтекать вымышленное препятствие, расположенное на оси канала. Количество режимов течения зависело от геометрии вставки: для более резкого сужения (3.75:1) при дальнейшем увеличении расхода второй режим сменялся неустановившимся режимом течения.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-21-00166, https://rscf.ru/project/23-21-00166/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Castro R. [et al.] *Polymer flooding process to increase recovery factor.* Georesources. 2016. V. 18. № 4. Part 1. P. 271–280.
2. Kadyirov A., Zaripov R., Makarushkin D. *Some experimental results for converging flow of dilute polymer solution.* Physics of Fluids. 2024. T. 36. № 3. 033110.
3. Mikheev N. I., Dushin N. S. *A method for measuring the dynamics of velocity vector fields in a turbulent flow using smoke image-visualization videos.* Instr. Exp. Tech. 2016. T. 59. P. 882–889.

КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ТОНКОЙ ЧАСТИЧНО ПОРИСТОЙ СРЕДЫ В КОНТАКТЕ С ЖИДКОСТЬЮ

К. Е. Найденова, Т. А. Сибирякова, К. А. Шишмарёв, М. А. Токарева

Алтайский государственный университет, Барнаул

В настоящее время актуальными являются исследования моделей, в которых изучаются характеристики балок, лежащих на упругом или вязкоупругом основании, а также влияние различных видов нагрузок и параметров основания на их реакцию. Данные модели хорошо описывают процессы, связанные, например, с влиянием грунтов и фундаментов на разные виды конструкций [1,2]. При решении некоторых практических задач возникает необходимость в исследовании систем, состоящих из двух или более балок, соединённых упругим слоем, но такие модели являются недостаточно изученными. При моделировании оснований или промежуточных слоёв в подобных задачах используются два подхода: представление основания как безмассового упругого слоя Винклера [3,4] и моделирование основания слоем Винклера – Пастернака с добавлением сдвигового слоя [5,6]. Целью данного исследования является изучение прогибов и удлинений двухслойной частично пористой пластины, плавающей на поверхности жидкости и находящейся под действием внешней осциллирующей нагрузки при различных параметрах промежуточного слоя Пастернака.

Рассматривается двумерная задача о колебаниях двух тонких упругих пластин, соединённых промежуточным слоем. Задача решается в декартовой системе координат Oxz. Пластины расположены горизонтально на жидком основании конечной глубины H, при этом жидкость невязкая и несжимаемая, а течение жидкости, вызванное колебаниями пластин, считается потенциальным. Прямая $z = -H$ соответствует жёсткому дну. Пластины не ограничены вдоль оси x. Верхняя упругая пластина соединена с нижней упругой и пористой пластиной слоем Пастернака. На верхнюю пластину действует внешняя осциллирующая с заданной частотой нагрузка, расположенная в точке $x = 0, z = 0$ и не изменяющая своего положения с течением времени. В рамках линейной теории гидроупругости уравнения, описывающие колебания верхней и нижней пластин, имеют вид

$$M_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + D_1\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \Big(K - G\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)(w_1 - w_2) = -P_{ext}(x,t) \quad (-\infty < x < \infty,\ z = 0), \tag{1}$$

$$M_2\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + D_2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \Big(K - G\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)(w_2 - w_1) = p(x,0,t) \quad (-\infty < x < \infty,\ z = 0), \tag{2}$$

где $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$ – прогибы соответствующих пластин из положения равновесия, M_j – масса на единицу площади j-ой пластины, $j = 1, 2$, $h_i^{(j)}$ – толщина j-ой пластины, D_j – изгибная жёсткость j-ой пластины, $P_{ext}(x,t)$ – функция, описывающая форму внешней нагрузки, $p(x,0,t)$ – гидродинамическое давление, K – коэффициент Винклера промежуточного слоя, соединяющего две пластины, и G – коэффициент, учитывающий сдвиговое взаимодействие в промежуточном слое.

Давление жидкости на границе раздела пластина – жидкость задаётся линеаризованным интегралом Коши – Лагранжа

$$p(x,0,t) = -\rho_\ell\varphi_t - \rho_\ell g w_2 \quad (-\infty < x < \infty,\ z = 0), \tag{3}$$

где ρ_ℓ – плотность жидкости, $\varphi(x,z,t)$ – потенциал скорости течения жидкости, g – модуль ускорения силы тяжести. Потенциал скорости $\varphi(x,z,t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения

$$\Delta\varphi = 0 \quad (-\infty < x < \infty,\ -H < z < 0) \tag{4}$$

и граничному условию непротекания на дне

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H). \tag{5}$$

Пористость нижней пластины учитывается через нормальную скорость проникновения жидкости в пластину и выводится из закона Дарси

$$v_n = \alpha p(x,0,t), \quad \alpha = \frac{\Pi}{\mu h_i^{(2)}}, \tag{6}$$

где Π – коэффициент проницаемости, μ – динамическая вязкость.

Система уравнений дополняется условиями затухания колебаний упругих пластин и возмущений жидкости вдали от нагрузки

$$w_1, w_2 \to 0, \quad \varphi \to 0 \quad (x \to \infty). \tag{7}$$

Задача (1)–(7) решается в безразмерных переменных при помощи преобразования Фурье вдоль упругих пластин. Исследованы прогибы и удлинения в верхней и нижней пластинах. Особое внимание уделено влиянию характеристик слоя Пастернака на колебания отдельных пластин. Получено, что коэффициент Винклера K и сдвиговый параметр G значительно влияют на прогибы упругих пластин. Уменьшение значений параметров промежуточного упруго-сдвигового слоя приводит к увеличению амплитуды колебаний верхней пластины и уменьшению амплитуды колебаний нижней пластины. При этом пористая пластина подвержена влиянию характеристик промежуточного слоя значительно меньше. Определяющим параметром для одинакового поведения пластин является коэффициент Винклера K. В небольшой окрестности под внешней нагрузкой колебания двухслойной пластины сопоставимы с колебаниями однослойной пористой пластины с некоторым промежуточным, вычисляемым в ходе решения, значением параметра пористости.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-71-10045, https://rscf.ru/project/23-71-10045/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dutta S. C., Roy R. *A critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system.* Comput. Struct. 2002. V. 80. Iss. 20–21. P. 1579–1594.
2. Ai Z. Y., Li Z. X., Cheng Y. C. *BEM analysis of elastic foundation beams on multilayered isotropic soils.* Soils Found. 2014. V. 54. Iss. 4. P. 667–674.
3. Timoshenko S. P. *Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail.* Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics. Zurich, Switzerland. 1926. P. 407–418.
4. Duffy D. G. *The response of an infinite railroad track to a moving, vibrating mass.* J. Appl. Mech. Transaction of the American Society of Mechanical Engineers. 1990. № 57. P. 66–73.

5. Agboola O. O., Gbadeyan J. A., Iyase S. A. *Vibration of an elastically connected nonprismatic double-beam system using differential transform method.* WCE 2017. July 5-7, London, U.K. 2017.
6. Brito W. K. F., Maia C. D. C., Mendonca A. V. *Bending analysis of elastically connected Euler–Bernoulli double-beam system using the direct boundary element method.* Appl. Mathem. Model. 2019. № 74. P. 387–408.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МОСТОВОГО ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ИЗ ПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ ПОЛЯРИЗАЦИИ

А. В. Наседкин, А. А. Наседкина

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Пьезоэлектрические преобразователи широко используются в различных технических устройствах, причём для повышения эффективности их работы для конкретных приложений требуется обеспечить отдельные высокие значения коэффициентов качества. В данной работе представлены результаты исследования пьезопреобразователя, состоящего из пьезокерамической пластины, поляризованной по толщине, с двумя металлическими накладками мостовой формы. Такой мостовой пьезопреобразователь с пластиной, выполненной из плотной пьезокерамики, ранее был изучен в [1]. Аналогичные осесимметричные пьезоэлектрические преобразователи в англоязычной литературе называются Cymbal Transducer, поскольку их накладки имеют форму тарелок. Cymbal-преобразователи изучены достаточно подробно, причём как сенсоры или источники возобновляемой энергии [2], так и как актуаторы или излучатели [3].

Улучшения характеристик работы пьезопреобразователей можно добиться путём применения пьезоэлектрических композитов в качестве активных материалов преобразователей. В частности, можно использовать пористую пьезокерамику, которая более податлива, имеет меньший акустический импеданс, но при этом некоторые коэффициенты электромеханической связанности могут быть такими же высокими, как и для плотной пьезокерамики. Однако для пористой пьезокерамики до сих пор не полностью решены вопросы о влиянии неоднородности поля поляризации в окрестности пор на её эффективные свойства. Прецизионно применение пористой пьезокерамики в конкретных устройствах также требует учёта микроособенностей структуры пористости, оптимизации отдельных материальных констант, геометрии и граничных условий, причём некоторые параметры могут быть существенны для различных сенсорных и актуаторных применений.

Некоторые из перечисленных выше вопросов исследовались в работах [4–6], в которых рассматривался Cymbal-преобразователь с диском из пористой пьезокерамики. Здесь аналогичным образом изучается эффективность применения пористых пьезокерамических материалов к мостовому пьезопреобразователю. В качестве материала активного элемента была рассмотрена обычная сплошная пьезокерамика PZT-4 и пористая пьезокерамика PZT-4 с эффективными модулями, вычисленными по моделям однородной и неоднородной поляризации [7].

Исследование мостового пьезопреобразователя в режиме установившихся колебаний проводилось численно методом конечных элементов в пакете ANSYS в трёхмерной постановке для четвёртой части модели с учётом симметрии относительно двух плоскостей. Рассматриваемая четверть преобразователя вместе с конечно-элементной сеткой показана на рис. 1, где пьезоэлектрические конечные элементы выделены бирюзовым цветом, а упругие элементы мостовых накладок – малиновым.

Как известно, в режиме приёма такой преобразователь может использоваться в качестве генератора «зелёной» или возобновляемой энергии [1, 2]. Для таких применений преобразователь считался защемлённым по нижней грани и при низкочастотных нерезонансных механических воздействиях, действующих на его верхнюю грань, определялся

наведённый электрический потенциал на электродированных поверхностях пьезокерамической пластины. Результаты расчётов показали, что использование пористой пьезокерамики уменьшает почти линейно с ростом пористости амплитуду наведённого потенциала по сравнению с плотной пьезокерамикой, а учёт неоднородности поля поляризации влияет не очень существенно и лишь немного уменьшает выходной потенциал относительно модели однородной поляризации.

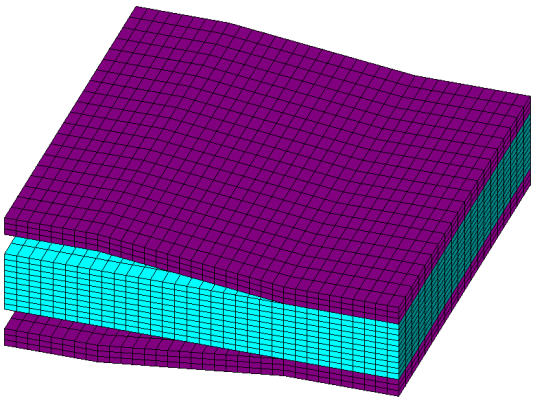


Рис. 1: Часть модели мостового пьезопреобразователя

Для актуаторных применений преобразователь закреплялся только по боковым граням и возбуждался гармонически изменяющимися электрическими воздействиями в частотном диапазоне, включающем первые резонансные частоты, и после нахождения решения анализировались амплитуды перемещений в центральной точке торца осциллирующей металлической накладки. Для этого на первом этапе из решения задачи о собственных колебаниях находились первые электрически активные частоты электрических резонансов и антирезонансов, а затем из решения задач об установившихся колебаниях вблизи резонансных частот строились амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) в фиксированной точке верхней кромки преобразователя.

В качестве электрических внешних воздействий в такой задаче можно рассматривать подачу на электродированные поверхности разности потенциалов $V\exp(i2\pi ft)$ с частотой f и с фиксированной амплитудой V, в которой на частотах электрического резонанса f_{rk}, $k = 1, 2, \ldots$, при отсутствии затухания имеют место явления резонанса для перемещений, амплитуд электрического тока I и электрического адмиттанса $Y = I/V$:

$$|I| \to \infty, \quad |Y| \to \infty, \quad f \to f_{rk}.$$

Другим вариантом является возбуждение колебаний гармонически изменяющимся электрическим током $I\exp(i2\pi ft)$ с фиксированной амплитудой I (электрическим зарядом $Q = iI/(2\pi f)$. В такой задаче резонансные явления будут наблюдаться на частотах электрического антирезонанса f_{ak} для перемещений, амплитуд разности электрического потенциала V и электрического сопротивления (импеданса) $Z = V/I = Y^{-1}$:

$$|V| \to \infty, \quad |Z| \to \infty, \quad f \to f_{ak}.$$

Для полноты анализа в режимах излучения решались как задачи о возбуждении мостового преобразователя разностью электрического потенциала, так и задачи об установившихся колебаниях при подаче электрического тока или заряда. АЧХ строились для

частотного интервала, включающего первые частоты f_{r1} и f_{a1}. Каждая из двух задач решалась отдельно для модели однородно поляризованной пьезокерамики и для модели неоднородно поляризованной пьезокерамики.

Результаты численных расчётов показали, что в режиме излучения при возбуждении мостового преобразователя разностью электрического потенциала наибольшие амплитуды смещений и электрического тока получаются на резонансной частоте f_{r1} при использовании сплошной пьезокерамики, а использование пористой пьезокерамики снова не даёт никаких преимуществ. Однако при возбуждении преобразователя электрическим током или зарядом наибольшие амплитуды смещений и электрического потенциала получаются на антирезонансной частоте f_{a1} уже при использовании модели пористой пьезокерамики. Так на рис. 2 показаны АЧХ, где кривые 0 построены для сплошной пьезокерамики, кривые 1 – для модели однородно-поляризованной пористой пьезокерамики, а кривые 2 – для модели неоднородно-поляризованной пористой пьезокерамики. При этом сплошные кривые 1 и 2 отвечают моделям с пористостью 40 %, а пунктирные кривые 1 и 2 – моделям с пористостью 20 %.

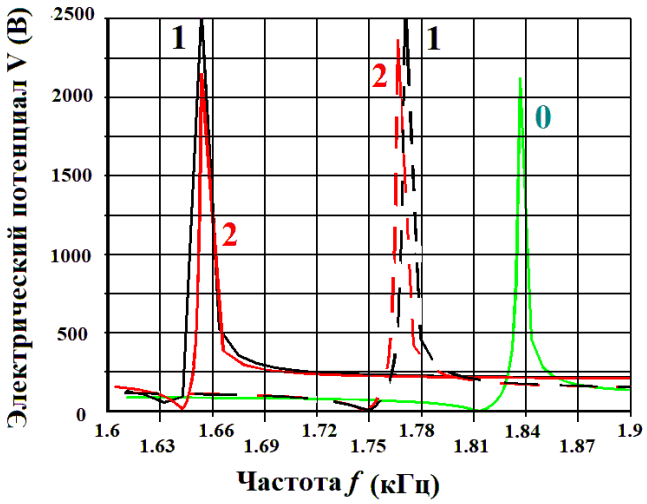


Рис. 2: Амплитудно-частотные характеристики для сплошной пьезокерамики (кривые 0), для модели однородно-поляризованной пористой пьезокерамики (кривые 1), для модели неоднородно-поляризованной пористой пьезокерамики (кривые 2)

Как видно из этого рисунка, использование пористой пьезокерамики повышает наведённый электрический потенциал на соответствующих антирезонансных частотах. Это же явление наблюдается и для АЧХ смещений в центральной точке верхней грани моста преобразователя в направлении, перпендикулярном поверхности этой грани. Отметим также, что приводимые АЧХ были построены при добротностях, уменьшающихся с ростом пористости, т. е. при увеличивающихся коэффициентах потерь. Таким образом, даже учёт растущих потерь в пористой пьезокерамике, приводящих к уменьшению амплитуд вынужденных колебаний, всё равно не уменьшает амплитуды электрического тока и перемещений при использовании пористой пьезокерамики. Для модели неоднородной поляризации эти амплитуды несколько меньше, чем для модели однородно-поляризованной керамики, но всё равно они не меньше, чем для сплошного материала.

Итак, проведённые вычислительные эксперименты показали, что эффективность применений пористой пьезокерамики отличается в режимах излучения и приёма. Причём при актуаторных применениях наилучшие результаты достигаются при возбуждении колебаний мостового пьезопреобразователя электрическим током вблизи соответствующих частот электрических антирезонансов. Можно отметить, что подобные выводы об эффективности использовании пористых пьезокерамических материалов были получены для Cymbal-преобразователя [4–6] и для ряда других пьезопреобразователей. В соответствии с результатами из [4–6] можно ожидать, что в режимах приёма и при возбуждении колебаний в режиме излучения разностью потенциалов будет эффективна пористая пьезокерамики с металлизированными поверхностями пор, однако такую пористую пьезокерамику на практике получать достаточно сложно.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 22-11-00302, https://rscf.ru/project/22-11-00302/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Luo L. [et al.] *Displacement amplification and electric characteristics of modified rectangular cymbal transducers using electroactive materials.* Solid State Commun. 2007. V. 143. P. 321–325.
2. Zhao H., Ling J., Yu J. *A comparative analysis of piezoelectric transducers for harvesting energy from asphalt pavement.* J. Ceram. Soc. Jpn. 2012. V. 120. № 1404. P. 317–323.
3. Guo S. [et al.] *Finite element analysis of underwater cymbal transducers with large displacement and fast response time.* Integr. Ferroelectr. 2006. V. 78. P. 103–111.
4. Nasedkin A. V., Nasedkina A. A., Rajagopal A. *Analysis of cymbal transducer from porous piezoceramics PZT-4 with various material properties based on ANSYS.* Springer Proceedings in Physics. 2018. V. 207. P. 533–547.
5. Наседкин А. В., Наседкина А. А., Нассар М. Э. *Конечно-элементный расчет дискового преобразователя с тарелкообразными накладками и активным элементом из пористой пьезокерамики с экстремальной проводимостью поверхностей пор.* Проблемы прочности и пластичности. 2023. Т. 85. № 1. С. 63–76.
6. Nasedkin A. V., Nasedkina A. A., Nassar M. E. *Finite element investigation of disk transducers from porous piezoceramics of complex structure with cymbal end-caps in external medium.* 2023 Days on Diffraction (DD). Proc. Int. Conf. «Days on Diffraction 2023», June 5-9, 2023, St. Petersburg, Russia. IEEE Publ., 2023. P. 156–161.
7. Наседкин А. В., Наседкина А. А., Толмачева Я. В. *Компьютерная гомогенизация пористых пьезокерамик различной сегнетожесткости при случайной структуре пористости и неоднородности поля поляризации.* Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16. № 4. С. 476–492.

ПОЛУЯВНЫЙ АЛГОРИТМ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА РЕШЕНИЯ ЖЁСТКИХ ЗАДАЧ

А. Е. Новиков[1], *Е. А. Новиков*[2]

[1]*Сибирский федеральный университет, Красноярск*
[2]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

В механике деформируемых сред и других важных приложениях часто возникает необходимость нахождения решения краевых задач многомерных дифференциальных уравнений в частных производных [1]. Одним из широко распространённых подходов к решению таких задач является метод прямых. Он позволяет свести исходное дифференциальное уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая, как правило, имеет высокую размерность и жёсткость. Для интегрирования таких систем требуется строить специальные численные методы, обладающие хорошими свойствами точности и устойчивости, а также высокой эффективностью с точки зрения вычислительных затрат [2].

Построены полуявные L-устойчивый $(5, 2)$-метод четвёртого и A-устойчивый $(4, 2)$-метод третьего порядков аппроксимации с L-устойчивыми промежуточными формулами, предназначенные для решения жёстких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Оба метода не требуют организации итерационного процесса, что делает их надежными при решении широкого класса задач. На основе этих методов сформулирован алгоритм интегрирования с переменным шагом и контролем точности. Для контроля точности используются два неравенства. Поскольку $(4, 2)$-метод построен на стадиях $(5, 2)$-метода, его использование при оценке погрешности не приводит к значительному увеличению вычислительных затрат.

Приведены результаты расчётов, подтверждающие эффективность нового алгоритма. L-устойчивость промежуточной формулы при интегрировании ряда систем обыкновенных дифференциальных уравнений приводит почти к полуторакратному снижению трудоёмкости алгоритма. Алгоритм предназначен для расчётов с требуемой точностью порядка 10^{-6}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hairer E., Wanner. G. *Solving ordinary differential equations II: stiff and differential-algebraic problems.* Berlin : Springer-Verlag, 1996.
2. Новиков Е. А., Шорников Ю. В. *Компьютерное моделирование жестких гибридных систем.* Новосибирск : Издательство НГТУ, 2013.

МЕТОДИКА НЕЧЁТКО-МНОЖЕСТВЕННОГО УЧЁТА ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОНКИХ ПРОТЯЖЁННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

С. Б. Номбре[1], *Д. Д. Полянский*[2] , *С. В. Сторожев*[1]

[1]*Донецкий государственный университет*
[2]*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка*

Особенностями исследования многих актуальных расчётных моделей термонапряжённого состояния тонких цилиндрических оболочек является необходимость учёта высокой степени неконтрастности значений исходных физико-механических и геометрических параметров, определяемых экспериментально, формируемых в пределах технологических допусков и на базе субъективных экспертных оценок. При этом данные о подлежащих учёту разбросах в доминирующем числе случаев не носят корректный статистический характер, что затрудняет применение методов вероятностно-стохастического анализа. В данной работе представлена нечётко-множественная методика исследования влияния указанных факторов параметрической неопределённости на оценки максимальных внутренних тепловых усилий в осесимметрично деформирующихся нагреваемых тонких протяжённых цилиндрических оболочках [1, 2] с использованием представлений для этих усилий, полученных в [1] на основе детерминистических версий соответствующих расчётных моделей.

В первой из расчётных моделей рассматривается имеющая толщину стенки h и радиус r_0 тонкая протяжённая цилиндрическая оболочка-трубка с координатами: продольной осевой z, радиальной r и окружной угловой θ, изготовленная из изотропного материала с модулем Юнга E, коэффициентом Пуассона ν, коэффициентом линейного теплового расширения α_T. По длине оболочки выделяются два участка разнотипного нагрева с отличающимися распределениями вдоль осевой координаты z постоянных по толщине температур $T(z)$: при $z < 0$ $T(z) = T_0 - k_T z$; при $z > 0$ $T(z) = T_0 = \text{const}$. Здесь k_T – задаваемый коэффициент в законе распределения температур. Для возникающих в этом случае в сечении максимальных внутренних температурных усилий

$$M_z = F_1(\nu, E, \alpha_T, k_T, r_0, h), \quad M_\theta = F_2(\nu, E, \alpha_T, k_T, r_0, h), \quad N_\theta = F_3(\nu, E, \alpha_T, k_T, r_0, h) \quad (1)$$

в детерминистической версии модели получены [1] представления

$$\begin{aligned} M_z &= -[24(1-v^2)]^{-1}(\alpha_T k_T \beta r_0 E h^3), \\ M_\theta &= -[24(1-v^2)]^{-1}(\nu \alpha_T k_T \beta r_0 E h^3), \\ N_\theta &= [4\beta]^{-1}(\alpha_T k_T E h), \quad \beta = [3(1-\nu^2)(h r_0)^{-2}]^{1/4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Во второй из рассматриваемых расчётных моделей анализируется изгибное термомеханическое напряжённое состояние занимающей область $z > 0$ полубесконечной цилиндрической оболочки толщины h, к свободному краю $z = 0$ которой в сечении приложены распределённые по её толщине вдоль координаты $-h/2 \le s \le h/2$ температурные воздействия [1]

$$T - T_0 = T_{00} + T_{01} s, \quad (3)$$

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[(T-T_0)_{s=h/2} + (T-T_0)_{s=-h/2}\right],$$
$$T_{01} = \frac{\Delta T}{h}, \quad \Delta T = (T-T_0)_{s=h/2} - (T-T_0)_{s=-h/2}, \tag{4}$$

T_0 – температура оболочки в исходном недеформированном состоянии. Представляющая первоочередной интерес характеристика максимальных температурных напряжений у бокового края оболочки в детерминистическом варианте модели, согласно [1], имеет представление

$$(\sigma_\theta)_{z=0,s=h/2} = F_4(\nu, E, \alpha_T, \Delta T) = -(E\alpha_T \Delta T/2)\{1 + [(1-\nu^2)/3]^{1/2}(1-\nu)^{-1}\}. \tag{5}$$

Нечётко-множественный анализ влияния разбросов параметров в расчётных соотношениях (1)–(2), (4)–(5) детерминистических вариантов рассматриваемых моделей реализуется на базе поэтапного фрагментированного использования аппарата алгебры нечётких величин и модифицированной α-уровневой версии эвристического принципа обобщения. Совокупность неконтрастных исходных параметров ν, E, α_T, k_T, r_0, h, T_0, T, являющихся аргументами рассматриваемых расчётных соотношений, с применением учитывающих имеющиеся экспериментальные и экспертные данные методов фаззификации [2, 3], заменяется нечётко-множественными величинами $\tilde{\nu}$, $\tilde{E}$, $\tilde{\alpha}_T$, … , $\tilde{T}$ оговоренного типа и далее представляется разложениями по множествам α-уровней [2–5]. В частности, при описании исходных параметров с разбросами треугольными нечёткими числами с кортежами реперных точек $\tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $\tilde{E} = (E_1, E_2, E_3)$, … , $\tilde{T} = (T_1, T_2, T_3)$, их разложения по множествам α-уровней будут иметь вид

$$\tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha\in[0;1]} [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha], \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha], \ldots, \quad \tilde{T} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} [\underline{T}_\alpha, \overline{T}_\alpha],$$

$$\underline{\nu}_\alpha = (1-\alpha)\nu_1 + \alpha\nu_2, \quad \overline{\nu}_\alpha = \alpha\nu_2 + (1-\alpha)\nu_3,$$
$$\underline{E}_\alpha = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \overline{E}_\alpha = \alpha E_2 + (1-\alpha)E_3, \ldots,$$
$$\underline{T}_\alpha = (1-\alpha)T_1 + \alpha T_2, \quad \overline{T}_\alpha = \alpha T_2 + (1-\alpha)T_3.$$

Результирующие параметры рассматриваемых моделей $\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_4$ также представляются разложениями по множествам α-уровней

$$\tilde{F}_j = \bigcup_{\alpha\in[0;1]} [\underline{F}_{j\alpha}, \overline{F}_{j\alpha}]. \tag{6}$$

При применении модифицированного эвристического принципа обобщения используются получаемые для областей совокупного изменения аргументов F_j предварительные оценки знакоопределённости частных производных:

$$\frac{\partial F_j}{\partial \alpha_T} \le 0, \quad \frac{\partial F_j}{\partial k_T} \le 0, \quad \frac{\partial F_j}{\partial E} \le 0, \quad \frac{\partial F_j}{\partial h} \le 0, \quad \frac{\partial F_j}{\partial r_0} \le 0, \quad \frac{\partial F_j}{\partial \nu} \le 0 \quad (j = 1, 2);$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_T} \ge 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial k_T} \ge 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial E} \ge 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial h} \le 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial r_0} \le 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial \nu} \le 0; \tag{7}$$

при $\Delta T < 0$

$$\frac{\partial F_4}{\partial E} \geq 0, \quad \frac{\partial F_4}{\partial \Delta T} \geq 0, \quad \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_T} \geq 0;$$

при $\Delta T < 0$

$$\frac{\partial F_4}{\partial E} \leq 0, \quad \frac{\partial F_4}{\partial \Delta T} \leq 0, \quad \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_T} \leq 0.$$

В итоге, с учётом (7), применяя принцип обобщения [3–5], можно получить определяющие вид $\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_4$ по формулам (6) выражения:

$$\underline{F}_{j\alpha} = F_j(\overline{\nu}_\alpha, \overline{E}_\alpha, \overline{\alpha}_{T\alpha}, \overline{k}_{T\alpha}, \overline{r}_{0\alpha}, \overline{h}_\alpha), \quad \overline{F}_{j\alpha} = F_j(\underline{\nu}_\alpha, \underline{E}_\alpha, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \underline{k}_{T\alpha}, \underline{r}_{0\alpha}, \underline{h}_\alpha) \quad (j = 1, 2);$$

$$\underline{F}_{3\alpha} = F_3(\overline{\nu}_\alpha, \underline{E}_\alpha, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \underline{k}_{T\alpha}, \overline{r}_{0\alpha}, \overline{h}_\alpha), \quad \overline{F}_{3\alpha} = F_j(\underline{\nu}_\alpha, \overline{E}_\alpha, \overline{\alpha}_{T\alpha}, \overline{k}_{T\alpha}, \underline{r}_{0\alpha}, \underline{h}_\alpha);$$

при $\Delta T > 0$

$$\underline{F}_{4\alpha} \inf_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} F_j(\nu, \overline{E}_\alpha, \overline{\alpha}_{T\alpha}, \Delta\overline{T}_\alpha), \quad \overline{F}_{4\alpha} = \sup_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} F_j(\nu, \underline{E}_\alpha, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \Delta\underline{T}_\alpha);$$

при $\Delta T < 0$

$$\underline{F}_{4\alpha} = \inf_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} F_j(\nu, \underline{E}_\alpha, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \Delta\underline{T}_\alpha), \quad \overline{F}_{4\alpha} = \sup_{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha]} F_j(\nu, \overline{E}_\alpha, \overline{\alpha}_{T\alpha}, \Delta\overline{T}_\alpha).$$

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет» в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А. Д. *Термоупругость*. Киев : Вища школа, 1975. 215 с.
2. Подстригач Я. С. *Термоупругость тонких оболочек*. Киев : Наукова думка, 1978. 343 с.
3. Hanss M. *Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2005. 253 p.
4. Нгуен Куок Ши, Ле Хоанг Чан Ба, Сторожев С. В. *Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами*. Yelm, WA, USA : Science Book Publishing House, 2019. 216 p.
5. Номбре С. Б., Полянский Д. Д., Сторожев С. В. *Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра*. Журнал теоретической и прикладной механики. 2022. № 4 (81). С. 63–76.

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГИДРОУПРУГИХ ВОЛН В ЛЕДОВОМ КАНАЛЕ

К. Н. Оглезнева, К. А. Шишмарёв

Алтайский государственный университет, Барнаул

Введение и постановка задачи. Задачи распространения изгибно-гравитационных волн в ледовых покровах активно изучаются в последние десятилетия. Основная часть исследований проводилась для ледовых пластин бесконечной протяжённости. Однако большинство ледовых бассейнов, где проводятся научные и технические эксперименты с ледовым покровом, имеют конечные размеры и прямоугольные поперечные сечения. Математическая модель линейной упругой пластины является основной, хотя многие авторы также рассматривают вязкоупругие и пороупругие модели ледового покрова. Нелинейные модели, модели, учитывающие сжатие льда и наличие трещин в ледовых пластинах, также активно развиваются (см., например, [1–3]). Задачи распространения гидроупругих волн в канале изучались авторами данной работы и сотрудниками Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН в различных постановках и для различных ледовых условий в [4, 5]. В работе рассматривается задача о гидроупругих волнах, распространяющихся вдоль замерзшего канала с переменной толщиной льда. Основное внимание уделяется влиянию разной формы переменной толщины на характеристики периодических волн.

Задача исследуется в рамках линейной теории гидроупругости. Прогибы ледовой пластины описываются вертикальным перемещением средней поверхности пластины, $\hat{z} = \hat{w}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$. Математическая постановка задачи является связанной и состоит из упругой и гидродинамической частей. Упругая часть связана с определением прогибов льда. Вторая часть задачи – с описанием гидродинамики в канале и определением потенциала течения $\hat{\varphi}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t})$. Прогибы льда $\hat{w}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$ удовлетворяют уравнению тонкой упругой пластины с заданной постоянной плотностью ρ_i и переменной толщиной $\hat{h}_i(\hat{y})$ по ширине канала. Толщина льда не изменяется в направлении $\hat{x}$. Рассматривается лёд, примёрзший к стенкам канала, что моделируется условиями жёсткого защемления при $\hat{y} = \pm b$. Потенциал $\hat{\varphi}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t})$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области канала, граничным условиям непроницаемости на жёстких границах канала (стенки и дно) и линеаризованному кинематическому условию на границе лёд – жидкость. Неизвестные функции $\hat{w}$ и $\hat{\varphi}$ ищутся в форме периодических гидроупругих волн, распространяющихся вдоль канала в положительном направлении $\hat{x}$ с постоянной амплитудой A, волновым числом k и частотой ω:

$$\hat{w}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = A\,\mathrm{Re}(F(\hat{y})e^{i(k\hat{x}-\omega\hat{t})}),$$

$$\hat{\varphi}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = -A\,\mathrm{Re}(i\omega\Phi(\hat{y}, \hat{z})e^{i(k\hat{x}-\omega\hat{t})}).$$

Задача решается в безразмерных переменных. Размерные переменные обозначены символом $\hat{}$, безразмерные переменные имеют стандартные обозначения. Размерный волновой номер обозначается k, безразмерный – κ, $\kappa = kb$. В качестве масштабов длины берётся половина ширины канала b, времени – $1/\omega$, амплитуда A и $\rho_\ell gA$ являются масштабами отклонения льда и давления жидкости соответственно, ρ_ℓ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, для потенциала скорости течения принимается масштаб $Ab\omega$, $h = H/b$ – безразмерная глубина канала. Вводится среднее значение толщины льда по

ширине канала h_{avg}, которое используется как масштаб толщины льда $\hat{h}_i(\hat{y})$. Рассматриваются только решения с положительным и действительным k и действительным $\hat{F}(\hat{y})$.

В безразмерных переменных уравнение пластины имеет вид

$$\beta\left[h_i^3(y)\left(\kappa^4 F - 2\kappa^2 F'' + F''''\right) + 6h_i^2(y)h_i'\left(-\kappa^2 F' + F'''\right) + \right.$$
$$\left. +6h_i(y)(h_i')^2\left(F'' - \mu\kappa^2 F\right) - \frac{\delta\gamma}{\beta}F\right] = \gamma\Phi(y,0) - F, \tag{1}$$

где $\beta = D_{avg}/[\rho_\ell g b^4]$, $D_{avg} = Eh_{avg}^3/[12(1-\mu^2)]$, E – модуль Юнга для льда, μ – коэффициент Пуассона для льда, $\gamma = b\omega^2/g$ и $\delta = h_{avg}\rho_i/[b\rho_\ell]$, штрих обозначает производную по y. Остальные уравнения задачи в безразмерных переменных:

$$F = 0, \quad F_y = 0 \quad (y = \pm 1), \tag{2}$$

$$\Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \kappa^2\Phi \qquad (-1 < y < 1, -h < z < 0), \tag{3}$$

$$\Phi_y = 0 \quad (y = \pm 1), \qquad \Phi_z = 0 \quad (z = -h), \qquad \Phi_z = F \quad (z = 0). \tag{4}$$

Решение задачи (1)–(4) зависит от трёх безразмерных параметров: β, γ и δ. Будем находить дисперсионные соотношения $\omega(k)$ для некоторых типичных значений параметров задачи.

Метод решения и обсуждение результатов. Решение уравнения (1) ищется в виде бесконечного ряда собственных мод колебаний упругой балки с переменной толщиной

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(y). \tag{5}$$

Эти спектральные функции вводятся для каждого случая переменной толщины, однако в общем случае алгоритм определения этих функций одинаков и состоит из повторяющихся шагов. Для определения функций $\psi_n(y)$ отрезок $[-1,1]$ по ширине канала делится на малые отрезки $[b_k, b_{k+1}]$, где $1 = b_0 < b_1 < ... < b_{N_k-1} < b_{N_k} = 1$. На каждом из этих отрезков толщина льда $h_i(y)$ аппроксимируется линейной функцией $h_i^{(k)}(y)$. На отрезках с постоянной толщиной функция $h_i^k(y)$ равна $h_{avg}^{(k)}$. Функции $\psi_n^{(k)}$ на этих отрезках являются решениями спектральной задачи, описывающей колебания упругой балки с постоянной толщиной

$$\left(h^{(k)}{}_{avg}\right)^2\psi_{n,yyyy}^{(k)} = \theta_n^4\psi_n^{(k)}(y) \quad (b_k \le y \le b_{k+1}), \tag{6}$$

$$\psi_n^{(k)}(y) = A_n^{(k)}\cos(\theta_n^* y) + B_n^{(k)}\sin(\theta_n^* y) + C_n^{(k)}\cosh(\theta_n^* y) + D_n^{(k)}\sinh(\theta_n^* y), \quad \theta_n^* = \frac{\theta_n}{\sqrt{h^{(k)}{}_{avg}}}.$$

Коэффициенты разложения $A_n^{(k)}, B_n^{(k)}, C_n^{(k)}$ и $D_n^{(k)}$, а также спектральный параметр θ_n, который одинаков для всех решений на каждом отрезке, определяются из условия ортогональности этих мод и граничных условий на границах отрезков. Для случая с линейно изменяющейся толщиной льда вводятся значения толщины слева $h_{left}^{(k)}$, справа $h_{right}^{(k)}$, и среднее значение толщины на этом отрезке $h_{avg}^{(k)}$. Тогда толщина льда описывается функцией

$$h_i(y) = \alpha_0^{(k)} + \alpha^{(k)}y, \quad h_i(b_k) = h_{left}^{(k)}, \quad h_i(b_{k+1}) = h_{right}^{(k)},$$

где $\alpha_0^{(k)} = h_{right}^{(k)} - \alpha^{(k)} b_{k+1}$, $\alpha^{(k)} = (h_{right}^{(k)} - h_{left}^{(k)})/(b_{k+1} - b_k)$. Наиболее важным параметром является $\alpha^{(k)}$, который описывает угол наклона для линейного изменения толщины льда на данном линейном отрезке. Функции $\psi_n^{(k)}$ являются решениями спектральной задачи, описывающей колебания упругой балки с линейно изменяющейся толщиной

$$h_i^2(y)\psi_{n,yyyy}^{(k)} + 6h_i(y)h_{i,y}\psi_{n,yyy}^{(k)} + 6(h_{i,y})^2\psi_{n,yy}^{(k)} = \theta_n^4\psi(k)_n \quad (b_k \le y \le b_{k+1}), \tag{7}$$

$$\psi_n^{(k)}(y) = \frac{1}{\xi}\left[A_n^{(k)}\, J_1(\eta_n^{(k)}\xi) + B_n^{(k)}\, Y_1(\eta_n^{(k)}\xi) + C_n^{(k)}\, I_1(\eta_n^{(k)}\xi) + D_n^{(k)}\, K_1(\eta_n^{(k)}\xi)\right], \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

где $\eta_n^{(k)} = 2\theta_n/\alpha^{(k)}$, $\xi = \sqrt{\alpha_0^{(k)} + \alpha^{(k)} y}$ и J, Y, I, K являются функциями Бесселя. Когда решения на каждом отрезке определены, результирующая функция $\psi_n(y)$ вводится как кусочно-гладкая функция, равная $\psi_n^{(k)}$ на каждом отрезке. На границах отрезков $y = b_k$, $k = 1, 2, ..., N_k - 1$, необходимо, чтобы выполнялись условия непрерывности отклонений льда, наклона, моментов и перерезывающих сил. Последнее необходимое уравнение – это условие ортогональности мод $\psi_n(y)$ с весом на каждом отрезке.

После определения нормальных мод решение для потенциала ищется в виде ряда функций ϕ_n, умноженных на те же коэффициенты a_n, что и в ряде (5). Функции ϕ_n находятся из соответствующих краевых задач в поперечном сечении канала и выражаются через моды ψ_n. Затем эти разложения подставляются в уравнение для пластины, и результат умножается на одну моду ψ_n, что приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений для нахождения a_n и дисперсионных соотношений $\omega_n(k)$. Система решается с помощью метода редукции, аналогичного подходу, изложенному в [5].

Расчёты периодических гидроэластических волн и их характеристик проводились для параметров задачи, соответствующих экспериментальному ледяному бассейну в Амурском госуниверситете им. Шолом-Алейхема в Биробиджане (см. [2]): $H = 1$ м, $2b = 3$ м. Параметры льда и жидкости в расчётах были следующие: $\rho_i = 917$ кг/м^3, $\rho_\ell = 1024$ кг/м^3, $\mu = 0.3$, $E = 4.2 \cdot 10^9$ Па. Средняя толщина льда h_{avg} в бассейне составляет 0.0035 м в проводимых расчётах.

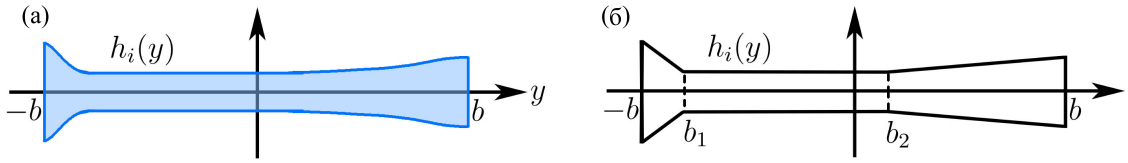


Рис. 1: Форма толщины льда по ширине канала, используемая в расчётах (а). Кусочная аппроксимация этой толщины (б)

Средняя толщина h_{avg} является одинаковой в расчётах для разных наборов параметров при описании толщины ледового покрова по ширине канала. Алгоритм решения будет продемонстрирован на нескольких разных случаях переменной толщины ледового покрова. Один из вариантов представлен на рис. 1 (а). Кусочная аппроксимация этой толщины показана на рис. 1 (б). Толщина льда состоит из 3 частей: левая линейная часть $-1 < y \le b_1$, правая линейная часть $b_2 < y \le 1$, в средней части толщина льда постоянна и равна $h_{avg}^{(2)}$. Среднее значение толщины на левых и правых сегментах определяется как $h_{avg}^{(1)}$ и $h_{avg}^{(3)}$. На представленном рисунке левая часть соответствует большому изменению толщины на коротком сегменте, правая часть – среднему изменению толщины на длинном сегменте. Линейное изменение на этих сегментах описывается параметрами $\alpha^{(k)}$.

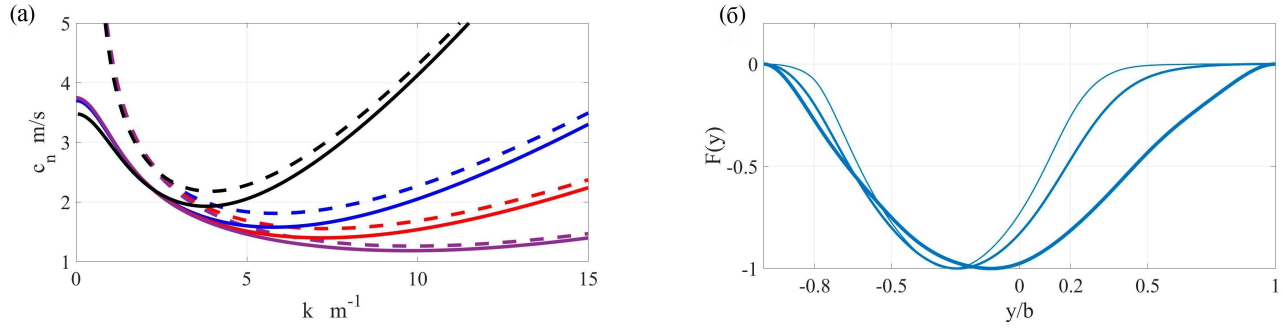


Рис. 2: Фазовые скорости первых двух периодических гидроупругих волн с самыми низкими частотами, распространяющихся в канале (а). Прогибы льда короткой волны с самой низкой частотой поперек канала, $x = 0$ (б)

Фазовые скорости первых двух волн с самой низкой частотой показаны на рис. 2 (а). Чёрная линия представляет результаты для льда с постоянной толщиной, тогда как цветные линии показывают результаты для льда с переменной толщиной, как показано на рис. 1, для разных наборов параметров. На рис. 2 (б) показаны профили короткой волны с $k = 10\text{м}^{-1}$ и самой низкой частотой. В целом, увеличение изменения толщины льда (уменьшение его среднего значения в центральном сегменте и увеличение в боковых сегментах) приводит к значительному изменению (уменьшению) скоростей и смещению положения максимальных отклонений. Приведённый пример расчёта демонстрирует, что гидроупругие волны в ледовом покрове с неравномерной толщиной льда могут быть исследованы на основе представленного метода. Характеристики этих волн сильно зависят от конкретного распределения толщины льда в канале. Рассматриваемое изменение толщины льда всего на трёх сегментах приводит к значительному изменению характеристик периодических гидроэластических волн. Более подробные результаты будут представлены в докладе.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер госзадания FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hosking R. J., Sneyd A. D., Waugh D. W. *Viscoelastic response of a floating ice plate to a steadily moving load.* J. Fluid Mech. 1988. V. 196. P. 409–430.
2. Pogorelova A. V., Zemlyak V. L., Kozin V. M. *Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth.* J. Hydrodyn. 2019. V. 31. P. 562–569.
3. Stepanyants Y., Sturova I. *Waves on a compressed floating ice plate caused by motion of a dipole in water.* J. Fluid Mech. 2021. V. 907. A7.
4. Batyaev E. A., Khabakhpasheva T. I. *Hydroelastic waves in a channel covered with a free ice sheet.* J. Fluid Dyn. 2015. V. 50. P. 775–788.
5. Shishmarev K. [et al.] *Hydroelastic waves in a frozen channel with non-uniform thickness of ice.* Water. 2022. № 14. P. 281.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

А. А. Очиров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Поверхностные периодические течения вызывают интерес исследователей на протяжении многих веков. С течением времени изучение волн на поверхности жидкости качественно менялось от простых наблюдений до построения сложных многофакторных математических моделей. С развитием техники эксперимента наблюдения сменились постановкой грамотных экспериментальных исследований. Рост производительности современных электронно-вычислительных машин и прогресс, достигнутый в разработке численных методов и комплексов программ, позволяют проводить прямое численное моделирование, в том числе задач, связанных с распространением периодических течений. Настоящее исследование посвящено развитию аналитических асимптотических методов теории сингулярных разложений [1–3] применительно к задачам механики сплошной среды.

В недавних исследованиях было показано, что в задачах в разнообразных постановках [4–7], математическая формулировка которых основана на фундаментальной системе уравнений гидродинамики с физически обоснованными граничными и начальными условиями [9], существуют два типа решений: регулярные и сингулярные. Регулярные решения возникают как в задачах с учётом вязкости среды, так и без учёта таковой [8]. Эти решения определяют динамику крупномасштабных компонентов течения и в случае поверхностных периодических течений характеризуют поверхностные волны. Сингулярные решения, определяющие тонкую структуру течений, возникают в моделях однородных и стратифицированных по плотности жидкостей [4,5], в которых в постановке учтена вязкая диссипация. При этом в модели идеальной среды сингулярные решения вырождаются.

Исследованы дисперсионные характеристики в различных постановках и выявлены дисперсионные соотношения для волновых и лигаментных компонентов поверхностных периодических течений [5, 6]. Также показано, что лигаменты, определяемые сингулярными решениями уравнений, сопутствуют не только поверхностным, но и акустическим, внутренним гравитационным и гибридным волнам [7]. В настоящей работе представлена методика решения задачи, позволяющая определить лигаментные слагаемые в полях физических переменных, таких как давление, плотность, компоненты градиента плотности.

Рассмотрим задачу в простейшей постановке в двумерной декартовой системе координат Oxz. Ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия силы тяжести $\vec{g}$. Возмущения свободной поверхности $z = \zeta(x,t)$ распространяются в положительном направлении горизонтальной оси Ox, которая совпадает с равновесным положением свободной поверхности жидкости. Вместо уравнения состояния запишем вид стратификации плотности ρ без указания физической природы стратификации

$$\rho\,(x,z,t) = \rho_{00}\,[r(z) + \tilde{\rho}(x,z,t)] = \rho_{00}\left[\exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) + \tilde{\rho}(x,z,t)\right],$$

где ρ_{00} – равновесное значение плотности на уровне $z = 0$, $\tilde{\rho}$ – малое возмущение плотности, связанное с распространением периодического поверхностного течения,

$r(z) = \exp(-z/\Lambda)$ – функция, определяющая профиль равновесного распределения плотности, $\Lambda = |d\ln\rho/dz|^{-1}$ – масштаб стратификации, который в несжимаемой жидкости связан с частотой плавучести $N = \sqrt{g/\Lambda}$. Давление в жидкости записывается в виде суммы атмосферного давления P_{00}, гидростатического давления и периодического возмущения $\tilde{P}(x,z,t)$. С учётом сделанных упрощений математическая формулировка задачи, определяющая динамику и структуру периодического движения, состоит из уравнения Навье – Стокса, уравнения непрерывности и дополняется физически обоснованными граничными условиями:

$$z < \zeta : \begin{cases} \rho\left(\partial_t \vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u}\right) = \rho\nu\Delta\vec{u} - \nabla P + \rho\vec{g}, \\ \partial_t\rho + \vec{u}\cdot\nabla\rho = 0, \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$z = \zeta : \begin{cases} \partial_t(z-\zeta) + \vec{u}\cdot\nabla(z-\zeta) = 0, \\ \vec{\tau}\cdot\left[(\vec{n}\cdot\nabla)\,\vec{u}\right] + \vec{n}\cdot\left[(\vec{\tau}\cdot\nabla)\,\vec{u}\right] = 0, \\ P - P_0 - \sigma\operatorname{div}\vec{n} - 2\rho\nu\vec{n}\left[(\vec{n}\cdot\nabla)\,\vec{u}\right] = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$z =\!\!\rightarrow -\infty : \qquad \vec{u} = (u,w) \to (0,0), \tag{3}$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla(z-\zeta)}{|\nabla(z-\zeta)|} = \frac{-\partial_x\zeta\vec{e_x}}{\sqrt{1+(\partial_x\zeta)^2}}, \qquad \vec{\tau} = \frac{\vec{e_x} + \partial_x\zeta\vec{e_z}}{\sqrt{1+(\partial_x\zeta)^2}}.$$

Здесь $\vec{n}, \vec{\tau}$ – векторы внешней нормали и касательной к свободной поверхности жидкости соответственно, а $\vec{u} = (u,w)$ определяет поле скорости в толще жидкости, вызванное поверхностным возмущением, ν – кинематическая вязкость, σ – коэффициент поверхностного натяжения. В случае малых по амплитуде отклонений свободной поверхности допустимо использовать приближение Буссинеска. В этом случае жидкость считается несжимаемой и в двумерной постановке компоненты скорости можно выразить через одну скалярную функцию – функцию тока ψ:

$$\vec{u} = (u,w) = (\partial_z\psi, -\partial_x\psi). \tag{4}$$

Используем стандартные для такого типа задач методы и произведём поиск решений в виде гармонических функций $f(x,z,t) \sim A\exp(ik_x x + k_z - i\omega t)$. При такой структуре решений выполняется условие затухания поверхностного движения с глубиной (3). Выполняя подстановку решения в указанной форме в основные уравнения и граничные условия (1), (2), получаем дисперсионное соотношение, связывающее компоненты волнового вектора $\vec{k} = (k_x, k_z)$ с частотой волнового движения ω:

$$\omega\left(k_x^2 - k_z^2\right)\left(i\nu k_x^2 - i\nu k_z^2 + \omega\right) - N^2 k_x^2\exp(-z/\Lambda) = 0. \tag{5}$$

Предлагаемый подход основывается на предположении положительно определённой частоты $\omega > 0$, как параметра, характеризующего энергию периодического течения, при этом компоненты волнового вектора $\vec{k} = (k_x, k_z)$ могут быть комплексными, что характеризует пространственное затухание периодического возмущения.

Дисперсионное соотношение (5) удобно анализировать в безразмерном виде, причём в качестве параметров обезразмеривания удобно выбрать собственные параметры задачи. В рассматриваемой модели легко выделяются собственные пространственные и временные масштабы задачи: вязкий волновой масштаб $\delta_N^g\nu = (g\nu)^{1/3}N^{-1}$, частота плавучести N,

период плавучести T_b, масштаб стратификации Λ, микромасштабы Стокса $\delta_N^\nu = \sqrt{\nu/N}$ и $\delta_\omega^\nu = \sqrt{\nu/\omega}$ и капиллярная постоянная $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma/g}$. Собственные масштабы задачи определяют характерные размеры и времена жизни компонентов течений в жидкости и находятся в очень широком диапазоне. Например собственные пространственные параметры для воды могут варьироваться от долей сантиметров до метров в лабораторных и природных условиях [7]. Проведём обезразмеривание дисперсионного соотношения (5). В качестве временного масштаба обезразмеривания выберем обратную частоту плавучести $\tau_N = N^{-1}$, а в качестве пространственного масштаба – вязкий волновой масштаб $\delta_N^{g\nu} = \sqrt[3]{g\nu}/N$. Обезразмеренное дисперсионное соотношение (5) записывается следующим образом:

$$i\varepsilon\left(k_{*x}^2 - k_{*z}^2\right)^2\omega_* + \left(k_{*x}^2 - k_{*z}^2\right)\omega_*^2 - k_{*x}^2\exp\left(-z/\Lambda\right) = 0. \tag{6}$$

Здесь нижний индекс "$*$" обозначает соответствующие безразмерные величины. При таком способе обезразмеривания в задаче естественным образом возникает параметр $\varepsilon = \delta_g^\nu/\delta_N^{g\nu} = N\nu^{1/3}/g^{2/3}$, который определяется отношением собственных масштабов среды. В широком классе жидкостей либо частота плавучести N, либо кинематическая вязкость ν, либо оба этих параметра одновременно являются малыми величинами и, следовательно, параметр ε является естественным малым параметром задачи. Регулярное разложение по малому параметру ε компоненты волнового вектора k_{*z} записывается в виде

$$k_{*z} = k_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + ... \tag{7}$$

$$k_0 = \pm k_{*x}\frac{\sqrt{\omega_*^2 - \exp\left(-z/\Lambda\right)}}{\omega_*},$$

$$k_1 = \frac{i\left(k_{*x}^2 - k_0^2\right)}{2k_0\omega_*} = \pm\frac{ik_{*x}\exp\left(-z/\Lambda\right)}{2\omega_*^2\sqrt{\omega_*^2 - \exp\left(-z/\Lambda\right)}}, \tag{8}$$

$$k_2 = -\frac{k_1\left(2ik_0 + k_1\omega_*\right)}{2k_0\omega_*} = \pm\frac{k_{*x}\exp\left(-z/\Lambda\right)\left[-3\exp\left(-z/\Lambda\right) + 4\omega_*^2\right]}{8\omega_*^3\sqrt{\omega_*^2 - \exp\left(-z/\Lambda\right)}\left[\omega_*^2 - \exp\left(-z/\Lambda\right)\right]},$$

$$\vdots$$

Анализ показывает, что существует еще два сингулярных решения:

$$k_{*z} = \varepsilon^{-1/2}k_0 + \varepsilon^{1/2}k_1 + \varepsilon^{3/2}k_2 + ... \tag{9}$$

$$k_0 = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega_*}, \tag{10}$$

$$k_1 = k_{*x}^2\frac{2ik_0^2\omega_* - \omega_*^2 + \exp\left(-z/\Lambda\right)}{2k_0\omega_*\left(2ik_0^2 - \omega_*\right)} = \pm\frac{\left(1+i\right)k_{*x}^2\left[\omega_*^2 - \exp\left(-z/\Lambda\right)\right]}{2\sqrt{2}\omega_*^{5/2}}, \tag{11}$$

$$\vdots$$

Применение полученных асимптотических решений позволяет находить аналитические приближённые выражения, которые, как показывают вычисления, отличаются от решений, построенных при помощи численных методов, в области гравитационных волн на тысячные доли процента, а в области капиллярных волн – на значения порядка десяти процентов. Поиск числовых значений с использованием численных методов оказывается ресурсозатратным и в плане вычислительных мощностей, и в плане расчётного времени. Асимптотические аналитические методы требуют значительно меньших усилий, и

в случае гравитационных волн потеря точности оказывается практически незаметной, а для капиллярных волн использование описанной методики позволяет получить оценочные выражения.

Использование теории сингулярных возмущений приводит к полным асимптотическим решениям уравнений гидродинамики. Описывающие собственно волны при выполнении предельных переходов регулярные решения переходят в известные классические соотношения в простейших случаях. Дополнительный класс решений, возникающий при использовании предлагаемой методики – это сингулярные решения, определяющие тонкоструктурные компоненты – лигаменты, являющиеся неотъемлемой составляющей периодических движений и сопутствующие волнам. При выполнении предельных переходов к идеальной жидкости лигаментные компоненты пропадают, что говорит о потере качественных решений в модели идеальной сплошной среды и необходимости учёта вязкости и гетерогенности жидкости при постановке задачи.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124012500442-3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломов С. А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* М. : Наука, 1981.
2. Bender C. M., Orszag S. A. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory.* New York : Springer Science & Business Media, 2013.
3. Найфе А. Х. *Введение в методы возмущений.* М. : Мир, 1984.
4. Chashechkin Y. D., Ochirov A. A. *Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field.* Axioms. 2022. V. 11. № 8. P. 1–21.
5. Ochirov A. A., Chashechkin Yu. D. *Two-dimensional surface periodic flows of an incompressible fluid in various models of the medium.* Izvestiya – Atmospheric and Oceanic Physics. 2024. V. 60. № 1. P. 1–14.
6. Чашечкин Ю. Д., Очиров А. А. *Расчет двумерных периодических возмущений свободной поверхности жидкости в различных моделях среды.* Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 513. № 1. С. 95–102.
7. Chashechkin Yu. D., Ochirov A. A. *Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field.* Mathematics. 2023. V. 11. № 21. P. 4443.
8. Очиров А. А., Чашечкин Ю. Д. *Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифицированной жидкости.* Известия РАН. ФАО. 2022. Т. 58. № 5. С. 524–533.
9. Chashechkin Yu. D. *Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows.* Axioms. 2021. V. 10. № 4. P. 286.

ДИНАМИКА И СТРУКТУРА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В СЖИМАЕМОЙ АТМОСФЕРЕ

А. А. Очиров[1], *У. О. Трифонова*[2]

[1]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*
[2]*Ярославский государственный университет*

Актуальность задач, связанных с распространением периодических возмущений в сжимаемой атмосфере, обусловлена большим количеством академических, геофизических и инженерных приложений. Часто в расчётах используются модели, которые основываются на идеализированной атмосфере, а вязкость среды учитывается только в диссипации энергии по причине малой вязкости рассматриваемых сред. Однако ещё Л. Прандтль обращал внимание, что малость вязкости необходимо учитывать в решениях, а не при постановке задачи. На практике видно, что атмосфера и океан расслаиваются на составляющие части, при этом разделение происходит с образованием тонкой структуры среды [1, 2]. В настоящей работе предлагается подход с использованием аналитических асимптотических методов, который позволяет получить полные решения уравнений движения сжимаемой атмосферы, содержащие как крупномасштабные волновые компоненты периодических течений, так и их тонкую структуру.

Ставится задача об определении дисперсионных соотношений при распространении периодических возмущений в сжимаемой неограниченной атмосфере, находящейся в поле действия сил тяжести $\mathbf{g}$. Задача рассматривается в двумерной постановке в декартовой системе координат Oxz для простоты выкладок, однако переход к двумерной постановке приводит к потере качественного решения [3]. Влиянием примесей и неоднородностью состава атмосферы в настоящем исследовании пренебрегалось. При малых вариациях давления P и температуры T распределение плотности ρ можно определить линеаризированным уравнением состояния:

$$\rho = \rho_0(z)\{1 + \alpha_p[(P(x,z,t) - P_0(z)] - \alpha_T[T(x,z,t) - T_0(z)]\}. \tag{1}$$

Здесь $\rho_0(z)$ – функция, определяющая стратификацию среды, α_T и α_P – коэффициенты теплового расширения и плотностной сжимаемости соответственно, $P_0(z)$ и $T_0(z)$ — равновесные распределения давления и температуры соответственно. Распределение давления и температуры запишется в виде суммы равновесных значений и малых вариаций:

$$\begin{cases} P(x,z,t) = P_0(z) + \tilde{P}(x,z,t), \\ T(x,z,t) = T_0(z) + \tilde{T}(x,z,t). \end{cases}$$

Математическая формулировка задачи основывается на фундаментальной системе уравнений гидродинамики [4] и в сделанных предположениях состоит из уравнений Навье – Стокса, непрерывности и теплопроводности. Пренебрегая действием второй вязкости в отсутствие массовых и тепловых источников, определяющую систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \rho\left[\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right] = \rho\nu\Delta\mathbf{u} - \nabla P + \rho\vec{g}, \\ \partial_t \rho + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = 0, \\ \partial_t T + \mathbf{u}\cdot\nabla T - \kappa_T \Delta T = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, w)$ – поле скорости, а κ_T – коэффициент температуропроводности. Расписывая неизвестные функции в виде суммы ряда по малому параметру, пропорциональному амплитуде возмущений, можно линеаризовать задачу (2):

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t u - \nu\rho_0 \left(\partial_x u + \partial_z u\right) + \partial_x \tilde{P} = 0, \\ \rho_0 \partial_t w - \nu\rho_0 \left(\partial_x w + \partial_z w\right) + g\alpha_p \rho_0 \tilde{P} - g\alpha_T \tilde{T} + \partial_z \tilde{P} = 0, \\ \partial_z \rho_0 w + \alpha_p \rho_0 \partial_t \tilde{P} - \alpha_T \partial_t \tilde{T} + \rho_0 \left(\partial_x u + \partial_z w\right) = 0, \\ \partial_z T_0 w + \partial_t \tilde{T} - \kappa_T \Delta \tilde{T} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Для периодических возмущений будем искать решение в виде гармонических функций $f(x, z, t) \sim A \exp\left(ik_x + ik_z - i\omega t\right)$. Подставляя его в основные уравнения (3), получим матрицу коэффициентов:

$$H = \begin{pmatrix} \left(k_x^2\nu + k_z^2\nu - i\omega\right)\rho_0(z) & 0 & ik_x & 0 \\ 0 & \left(k_x^2\nu + k_z^2\nu - i\omega\right)\rho_0(z) & ik_z + g\alpha_P\rho_0(z) & -g\alpha_T\rho_0(z) \\ il_x\rho_0(z) & ik_z\rho_0(z) + \partial_z\rho_0(z) & -i\alpha_P\omega\rho_0(z) & i\alpha_T\omega\rho_0(z) \\ 0 & \partial_z T_0(z) & 0 & k_x^2\kappa_T + k_z^2\kappa_T - i\omega \end{pmatrix}.$$

Из условия совместности $\det(H) = 0$ можно получить дисперсионное соотношение, связывающее компоненты волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ с частотой периодического движения ω. В случае линейной зависимости равновесного распределения температуры и экспоненциальной зависимости равновесного распределения плотности от вертикальной координаты

$$T_0(z) = \eta_T z, \qquad \rho_0(z) = \exp\left(-z_\Lambda\right),$$

производя алгебраические преобразования, получим дисперсионное уравнение в размерном виде:

$$\begin{aligned} \exp\left(-z_\Lambda\right)\alpha_T\eta_T\left\{gk_x^2 - k_z\left[\left(k_x^2 + k_z^2\right)\nu - i\omega\right]\omega\right\} + \frac{1}{\Lambda}\left[\left(k_x^2 + k_z^2\right)\kappa_T - i\omega\right] \\ \left[\left(k_x^2 + k_z^2\right)\nu - i\omega\right]\left\{g\alpha_T + \exp\left(-z_\Lambda\right)\left[ik_z + \left(k_x^2 + k_z^2\right)\Lambda\right]\right\} - \\ - i\alpha_p\Lambda\left\{gk_z + \left[\left(k_x^2 + k_z^2\right)\nu - i\omega\right]\omega\right\} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Для явного выделения тонкой структуры удобно представить дисперсионное соотношение (4) в безразмерном виде. В качестве параметров обезразмеривания выберем собственные масштабы задачи, в качестве временного масштаба – обратную частоту плавучести $\tau_N = N^{-1}$, а для пространственного – вязкий волновой масштаб $\delta_N^{g\nu} = \sqrt[3]{g\nu}/N$. Обезразмеривая дисперсионное уравнение и собирая результирующее выражение по слагаемым с одинаковыми степенями безразмерной компоненты волнового вектора k_{*z}, получим выражение

$$\begin{aligned} &\frac{k_{x*}^2\mathcal{T}}{\mathcal{S}} - \frac{k_{x*}\varepsilon^2}{\mathcal{S}} + k_{x*}^6\varepsilon^4 + \exp(-z_\Lambda)k_{x*}^4\mathcal{C}\varepsilon^4 - ik_{x*}^4\varepsilon^3\omega_* - i\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^2\mathcal{C}\varepsilon^3\omega_* - \\ &-\frac{ik_{x*}^4\varepsilon^3\omega_*}{\mathcal{S}} - \frac{i\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^2\mathcal{C}\varepsilon^3\omega_*}{\mathcal{S}} - i\exp(-z_\Lambda)kx*^6\mathcal{C}\varepsilon^5\omega_* - \frac{\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^2\omega_*^2}{\mathcal{S}} - \\ &-2\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^4\mathcal{C}\varepsilon^4\omega_*^2 - \frac{\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^4\mathcal{C}\varepsilon^4\omega_*^2}{\mathcal{S}} + i\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^2\mathcal{C}\varepsilon^3\omega_*^3 + \end{aligned}$$

$$+\frac{2i\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^2\mathcal{C}\varepsilon^3\omega_*^3}{\mathcal{S}}+\frac{\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^2\omega_*^4}{\mathcal{S}}+$$
$$+k_{z*}\Bigg[-i\exp(-z_\Lambda)kx*^4\mathcal{C}\varepsilon^3+ik_{x*}^4\varepsilon^5-\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^2\mathcal{C}\varepsilon^2\omega_*-$$
$$-\frac{\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^2\mathcal{C}\varepsilon^2\omega_*}{\mathcal{S}}-\frac{k_{x*}^2\mathcal{T}\varepsilon^2\omega_*}{\mathcal{S}}+k_{x*}^2\varepsilon^4\omega_*+\frac{k_{x*}^2\varepsilon^4\omega_*}{\mathcal{S}}+$$
$$+\frac{i\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon\omega_*^2}{\mathcal{S}}+\frac{i\mathcal{T}\varepsilon\omega_*^2}{\mathcal{S}}-\frac{i\varepsilon^3\omega_*^2}{\mathcal{S}}\Bigg]+k_{z*}^2\Bigg[-\frac{\varepsilon^2}{\mathcal{S}}+3k_{x*}^4\varepsilon^4+$$
$$+2\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^2\mathcal{C}\varepsilon^4-2ik_{x*}^2\varepsilon^3\omega_*-i\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^3\omega_*-\frac{2ik_{x*}^2\varepsilon^3\omega_*}{\mathcal{S}}-$$
$$-\frac{i\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^3\omega_*}{\mathcal{S}}-3i\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^4\mathcal{C}\varepsilon^5\omega_*-4\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^2\mathcal{C}\varepsilon^4\omega_*^2-$$
$$-\frac{2\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^2\mathcal{C}\varepsilon^4\omega_*^2}{\mathcal{S}}+i\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^3\omega_*^3+\frac{2i\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^3\omega_*^3}{\mathcal{S}}\Bigg]+$$
$$+k_{x*}^3\Bigg[-2i\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^4\mathcal{C}\varepsilon^3+2ik_{x*}^2\varepsilon^5-\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^2\omega_*-\frac{\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^2\omega_*}{\mathcal{S}}-$$
$$-\frac{\mathcal{T}\varepsilon^2\omega_*^3}{\mathcal{S}}+\varepsilon^4\omega_*+\frac{\varepsilon^4\omega_*}{\mathcal{S}}\Bigg]+k_{z*}^4\Bigg[3k_{x*}^2\varepsilon^4+\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^4-i\varepsilon^3\omega_*-\frac{i\varepsilon^3\omega_*}{\mathcal{S}}-$$
$$-3i\exp(-z_\Lambda)k_{x*}^2\mathcal{C}\varepsilon^5\omega_*-2\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^4\omega_*^2-\frac{\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^4\omega_*^2}{\mathcal{S}}\Bigg]+$$
$$+k_{z*}^5[-i\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^3+i\varepsilon^5]+k_{z*}^6[\varepsilon^4-i\exp(-z_\Lambda)\mathcal{C}\varepsilon^5\omega_*]=0. \quad (5)$$

Здесь $z_\Lambda = z/\Lambda$, $\mathcal{S} = \kappa_T/\nu$, $\mathcal{T} = \alpha_T\eta_T\nu^{2/3}/g^{1/2}$, $\mathcal{C} = \alpha_p(g\nu)^{2/3}$, а нижним индексом $*$ обозначены соответствующие безразмерные величины. При таком способе обезразмеривания естественным образом возникает малый параметр $\varepsilon = \delta_g^\nu/\delta_N^{g\nu} = N\nu^{1/3}/g^{2/3}$, который характеризует отношение собственных масштабов среды: вязкого δ_g^ν и вязкого волнового $\delta_N^{g\nu}$, поскольку в большинстве реальных жидкостей вязкость и/или частота плавучести оказываются малыми величинами.

Обратим внимание, что в модели слабой диссипации параметр ε – малый и стоит у слагаемого со старшей степенью k_{*z}. В таком случае уравнение (5) можно отнести к классу сингулярно возмущённых уравнений, и для его решения необходимо привлекать соответствующий аппарат. Уравнение (5) – уравнение шестой степени относительно вертикальной компоненты волнового вектора. Анализ показывает, что корни описывают симметричные решения, половина из которых определяет движение в положительном направлении горизонтальной оси, а половина – в противоположном. Если рассматривать только периодические течения, движущиеся в положительном направлении, то можно заметить, что решения описываются регулярным и двумя сингулярными корнями. При этом регулярное решение определяет волновой компонент периодического течения, который сохраняется при переходе к модели идеальной среды. Сингулярные решения описывают тонкоструктурные компоненты – лигаменты, определяющие тонкие прослойки и волокна, сопутствующие крупномасштабным волнам.

При выполнении предельных переходов к несжимаемой равномерно стратифицированной жидкости получим известное дисперсионное соотношение для внутренних волн:

$$\varepsilon\omega_*k_{*z}^4+i\varepsilon^2\omega_*k_{*z}^3-ik_{*z}^2\left(1+2i\varepsilon\omega_*k_{*x}^2\right)+ik_{*z}\left(\varepsilon^2\omega_*k_{*x}^2-i\varepsilon\omega_*^2\right)-i\left(k_{*x}^2+i\varepsilon\omega_*k_{*x}^4\right)=0.$$

Если рассмотреть модель однородной сжимаемой невязкой среды, то (2) и уравнение состояния (1) перепишутся в виде

$$\tilde{P} = c^2 \tilde{\rho}, \tag{6}$$

$$\rho \left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P, \tag{7}$$

которые в линейном приближении с учётом потенциальности скорости $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ сводятся к выражению

$$\partial_{tt} \varphi - c^2 \Delta \varphi = 0,$$

с точностью до обозначений совпадающему с классическим результатом [5] с соответствующим дисперсионным соотношением.

Предложенная методика расчёта позволяет выделить сингулярные компоненты периодических течений в вязкой сжимаемой атмосфере. Сингулярные корни являются качественно новыми решениями, которые вырождаются в модели идеальной среды и описывают тонкую структуру периодических течений. Регулярные решения определяют динамику крупномасштабных волновых компонентов и сводятся к известным соотношениям при выполнении предельных переходов к идеальной жидкости.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124012500442-3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев Л. Т. *Физика атмосферы.* СПб. : Гидрометеоиздат, 2000.
2. Федоров К. Н. *Тонкая термохалинная структура вод океана.* Л. : Гидрометеоиздат, 1976.
3. Chashechkin Yu. D., Ochirov A. A. *Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field.* Mathematics. 2023. V. 11. № 21. P. 4443.
4. Chashechkin Y. D. *Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows.* Axioms. 2021. V. 10. P. 286.
5. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) *Теория звука.* М. : Гостехиздат, 1955. Т. 2. 476 с.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАЗНОМАСШТАБНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ПРИ ВНЕШНЕМ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Е. С. Парфёнова, А. Г. Князева

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Модели, учитывающие взаимодействие разных физических явлений, широко используются при исследовании реальных технологических процессов. Разработанная авторами ранее модель позволяет изучать влияние друг на друга трёх процессов – нагрев, распространение упругих волн и диффузия в поверхности твёрдого тела, подвергнутого внешнему воздействию [1], а также учесть химическое взаимодействие между диффузантом и материалом среды [2]. С практической точки зрения связанность механических и температурных полей становится существенной при высокочастотных периодических и импульсных воздействиях [3,4]. Исследования взаимовлияния волн напряжений и диффузии актуальны как при изучении процесса обработки материалов потоком частиц [5], так и при исследовании роли вибрационных воздействий, ударного воздействия на материал, вызывающих диффузионный перенос с аномальной скоростью [6, 7]. Модели, учитывающие взаимовлияние теплопереноса, диффузии и механических возмущений, применимы при исследовании многих технологических процессов [1,2,8]. Существуют и более сложные обобщения для анизотропных сред [9], для тел с включениями [10] и др. Но практически все модели в этих работах – линейные.

Рассмотрим ситуацию, когда в поверхностном слое твёрдого тела одновременно протекают три процесса: распространение упругих волн, возмущений тепла и массы. Указанные явления влияют на распространение друг друга. Упругие волны, генерируемые внешним воздействием и следующие за изменением состава, теряют энергию по мере распространения вглубь вещества, взаимодействуя с концентрационными волнами. Приняв ряд упрощений, а именно, полагая, что возникающие в зоне воздействия механические напряжения – упругие деформации, скорости и ускорения – малы, поток частиц равномерно распределён по поверхности, можно воспользоваться нелинейной связанной моделью, предложенной ранее [1]. Модель включает уравнение переноса вещества, уравнение движения и уравнение теплопроводности. Дополнительная нелинейность возникает из-за учёта зависимости коэффициента диффузии от состава и температуры. Определяющие соотношения соответствуют теории обобщённой термоупругой диффузии [11]. Компоненты тензора деформаций удовлетворяют соотношениям Коши. В выражениях для потоков тепла и массы учитываются времена релаксации к равновесному состоянию, что позволяет изучить динамику процессов на малых временах, сравнимых со временами релаксации. Задача решена численно с использованием для представления производных неявной разностной схемы второго порядка аппроксимации как по времени, так и по координате.

В результате установлено, что влияние упругой волны приводит к искажению в распределении температуры в области смены знака деформации. Взаимодействие концентрационной и упругой волн отмечается в области положения переднего фронта диффузионной волны, на фронте волны деформации первоначально формируется экстремум, а далее упругая волна начинает искажаться. Профиль деформации в диффузионной зоне идентичен профилям концентрации. В зависимости от соотношения атомных размеров диффу-

занта и материала основы, на профиле деформации образуется либо максимум, либо минимум в этой области. Многократное воздействие на твёрдое тело приводит к увеличению количества экстремумов на упругих волнах и, как следствие, распределение температуры искажается более значительно.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН (тема № FWRW-2022-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Knyazeva A. G., Parfenova E. S. *A Nonisothermal mechanodiffusion model of the initial stage of particle beam penetration into a target surface.* JAMT. 2020. 61(7). P. 1068–1079.
2. Parfenova E. S., Knyazeva A. G. *The chemical interaction charged particles with target material under surface treatment of metal with particle beam.* Z. Angew. Mathem. Mech. 2022. V. 102(8) e202200083.
3. Kozhevnikova M. E., Rotanova T. A., Valov A. B. *Computer simulation of the plane thermoelasticity problems: comparative analysis of coupled and uncoupled statements.* Comput. Contin. Mech. 2017. V. 10(4). P. 388–398.
4. Abo-Dahab S. M., Abouelregal A. E., Marin M. *Generalized thermoelastic functionally graded on a thin slim strip non-Gaussian laser beam.* Symmetry. 2020. V. 12(7). P. 1094.
5. Boiko V. I., Evstigneev V. V., Shamanin I. V. *Formation of an elastic wave in metal irradiated by an impulsive ion beam.* J. Eng. Phys. 1987. V. 53(3). P. 1032–1035.
6. Indeitsev D. A. [et al.] *A multiscale model of propagation of steady elasto-plastic waves.* Doklady Physics. 2014. V. 59(9). P. 423–426.
7. Aouadi M., Copetti M. I. M. *Exponential stability and numerical analysis of a thermoelastic diffusion beam with rotational inertia and second sound.* Math. Comput. Simul. 2021. V. 187. P. 586–613.
8. Davydov S. A., Zemskov A. V. *Thermoelastic diffusion phase-lag model for a layer with internal heat and mass sources.* Int. J. Heat Mass Transf. 2022. Part. C.
9. Aouadi M. *Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media.* J. Therm. Stresses. 2008. V. 31(3). P. 270–285.
10. Aouadi M. *A theory of thermoelastic diffusion materials with voids.* Z. Angew. Math. Phys. 2010. V. 61. P. 357–379.
11. Князева А. Г. *Нелинейные модели деформируемых сред с диффузией.* Физическая мезомеханика. 2011. № 6. P. 35–51.

УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Д. М. Пашковский[1,2]

[1]*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*
[2]*Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург*

При описании процессов массопереноса в пористых средах и полимерных материалах наблюдается волновой характер распространения концентрации диффундирующего вещества [1, 2]. Данный эффект невозможно описать при помощи модели диффузии, построенной на основе закона Фика. В работе предложена гиперболическая модель диффузии для анизотропного материала с учётом особенностей микроструктуры. Для получения волнового уравнения массопереноса по аналогии с гиперболической теплопроводностью используется модель Максвелла – Каттанео [3, 4]. Выражение для тензора эффективной диффузионной проницаемости выведено на основе микромеханического подхода [5, 6].

Классический закон Фика для молярного потока $\mathbf{h}$ записывается следующим образом:

$$\mathbf{h} = -\mathbf{D} \cdot \nabla c, \tag{1}$$

где c – поле концентрации вещества, $\mathbf{D}$ – тензор диффузионной проницаемости материала. В случае диффузии гиперболического типа определяющее соотношение для $\mathbf{h}$ принимается аналогично закону Максвелла – Каттанео [3, 4]:

$$\tau \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h} = -\mathbf{D} \cdot \nabla c, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^T, \tag{2}$$

где τ – время релаксации молярного потока. С учётом определяющего соотношения (2) уравнение диффузии запишется следующим образом:

$$-\nabla \cdot \big(\mathbf{D} \cdot \nabla c\big) = \rho \bigg(\tau \, \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + \frac{\partial c}{\partial t} \bigg). \tag{3}$$

Тензор эффективной диффузионной проницаемости $\mathbf{D}$ в случае двухфазного композита имеет следующий вид [6]:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \varphi \, (\mathbf{D}_1 - s \, \mathbf{D}_0) \cdot \langle \mathbf{\Lambda} \rangle \cdot \big[s \, \varphi \langle \mathbf{\Lambda} \rangle + (1 - \varphi) \, \mathbf{E} \big]^{-1}, \tag{4}$$

где $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_1$ – тензоры эффективной диффузионной проницаемости матрицы материала и неоднородностей, φ – объёмная доля неоднородностей, s – параметр сегрегации, $\langle \mathbf{\Lambda} \rangle$ – тензор концентрации, осреднённый по ориентациям неоднородностей, $\mathbf{E}$ – единичный тензор. Разброс ориентаций неоднородностей ξ учитывается при помощи функции распределения при осреднении тензора концентраций $\mathbf{\Lambda}$.

Проведён анализ решения (3) для полупространства с эффективных коэффициентом диффузии D_*:

$$D_* \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \rho \bigg(\tau \, \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + \frac{\partial c}{\partial t} \bigg), \quad D_* = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_x. \tag{5}$$

Полученное поле концентрации $c(x, t)$ проанализировано в зависимости от различных значений объёмной доли неоднородностей φ, значений параметра разброса ориентаций ξ и времени релаксации теплового потока τ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hassanizadeh S. M. *On the transient non-Fickian dispersion theory.* Transport in Porous Media. 1996. № 23(1).
2. Auriault J. L., Lewandowska J., Royer P. *About non-Fickian hyperbolic diffusion.* 18^{eme} Congres Francais de Mecanique. Grenoble, 2007.
3. Cattaneo C. *Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee.* C.R.A.S. Paris. 1993. V. 247. P. 431–433.
4. Babenkov M. B., Ivanova E. A. *Analysis of the wave propagation processes in heat transfer problems of the hyperbolic type.* Continuum Mech. Thermodyn. 2014. V. 26. P. 483–502.
5. Kachanov M., Sevostianov I. *Micromechanics of materials, with applications.* Cham : Springer, 2018. V. 249.
6. Пашковский Д. М., Фролова К. П., Вильчевская Е. Н. *Эффективные диффузионные свойства поликристалла.* Научно-технические ведомости. С.-Пб. : Изд-во политехнического университета. 2022. Т. 15. № 3. С. 154–168.
7. Жилин П. А. *Рациональная механика сплошных сред.* С.-Пб. : Изд-во политехнического университета. 2012. 584 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ВО ВЛАГОНАСЫЩЕННОМ ГРУНТЕ

Т. А. Пекарская[1], *А. Н. Сибин*[1,2,3]

[1]*Алтайский государственный университет, Барнаул*
[2]*Новосибирский национальный исследовательский государственный университет*
[3]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

В работе промерзающий/протаивающий грунт рассматривается как сплошная среда, состоящая из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$), льда ($i = 3$) и грунта ($i = 4$). Частицы грунта и лёд, находящийся в порах, образуют твёрдый пористый скелет. Фильтрация воды и воздуха в пористом скелете описывается уравнениями сохранения массы для каждой из фаз с учётом фазовых переходов, уравнениями двухфазной фильтрации и уравнением теплового баланса для четырёхфазной среды:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{3} I_{ji}, \quad i = 1,2,3, \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_4}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_4 \vec{u}_4) = 0, \tag{2}$$

$$\phi s_i \vec{u}_i = -K_0 \frac{\overline{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1,2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \tag{3}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{4} \rho_i^0 \alpha_i c_i \vec{u}_i \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - \nu I. \tag{4}$$

Здесь $\vec{u}_i$ – скорость i-ой фазы; ρ_i – приведённая плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объёмной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum\limits_{i=1}^{4} \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} – интенсивность перехода массы из j-ой в i-ую составляющую в единице объёма за единицу времени ($i, j = 1,2,3$); ϕ – пористость снега; s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха; s_3, s_4 – объёмные доли льда и грунта ($\alpha_1 = \phi s_1$, $\alpha_2 = \phi s_2$, $\alpha_3 = (1-\phi)s_3$, $\alpha_4 = (1-\phi)s_4$, $s_1 + s_2 = 1$, $s_3 + s_4 = 1$), $K_0(\phi)$ – коэффициент проницаемости пористой среды; $\overline{k}_{0i}$ – фазовые проницаемости ($\overline{k}_{0i} = \overline{k}_{0i}(s_i) \geq 0$, $\overline{k}_{0i}\big|_{s_i=0} = 0$); μ_i – динамические вязкости; p_i – давления фаз; p_c – капиллярное давление, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести, c_i – удельная теплоёмкость i-ой фазы при постоянном объёме; ν – удельная теплота плавления льда; λ_c – теплопроводность грунта.

Процессами сублимации и испарения пренебрегаем ($I_{12} = 0$, $I_{23} = 0$), а интенсивность фазового перехода вода–лёд есть заданная функция $I_{13} = I(\phi, \theta, s_1)$. Частицы льда и грунта неподвижны, $\vec{u}_3 = 0$, $\vec{u}_4 = 0$, структура льда и грунта как сплошных сред не уточняется [1]. Предполагается, что температуры во всех четырёх фазах совпадают, т. е. $\theta_i = \theta$ ($i = 1, ..., 4$).

Система (1)–(4) дополняется гипотезами $\rho_i^0 = \text{const} > 0$, $i = 1, ..., 4$. Подразумевается, что фазовый переход лёд–вода происходит во всей толще грунта и для описания теплопереноса нужно использовать уравнение вида (4) с соответствующей правой частью. Близкой по проблематике является задача тепломассопереноса в тающем снеге [2,3]. Имеется ряд экспериментальных результатов для определения интенсивности обмена массой

между фазами в пористых средах [2, 4]. Используемые в данной работе зависимости для интенсивности фазового перехода лёд – вода опираются на идеи работ [5, 6]:

$$I = \begin{cases} -\lambda_1 \phi \theta s, & \theta < \theta^-, \\ 0, & \theta^- \le \theta \le \theta^+, \\ \lambda_2 (\phi_g - \phi)^2 \exp(\beta(\theta - \theta^+)), & \theta > \theta^+. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $s \equiv s_1$ – водонасыщенность ($1 - s = s_2$); θ^+ – температура плавления льда, θ^- – температура замерзания воды, $\beta, \lambda_1, \lambda_2$ – размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода ($[\beta] = 1/\text{K}$, $[\lambda_1] = \text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{K})$, $[\lambda_2] = \text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$).

В дальнейшем рассматривается задача из работы [7], посвящённой экспериментальному и теоретическому исследованию морозного пучения в лабораторных образцах из влагонасыщенного песка. Искусственное замораживание образцов проводилось в морозильной камере. В процессе промерзания грунта выполнялось измерение температуры и деформаций с использованием системы контроля, состоящей из набора термопар и волоконно-оптических датчиков. В данной работе для анализа полученных экспериментальных данных используется модель, в которой насыщенный грунт рассматривается как трёхфазная пористая среда, состоящая из сухого скелета, воды и льда. Модель включает в себя закон сохранения энергии, уравнения баланса массы для влажности и льдистости, уравнение равновесия и определяющие соотношения для описания влияния фазового перехода вода – лёд на формирование теплового режима в грунте.

Уравнение сохранения энергии для описания процесса замораживания влагонасыщенного грунта с учётом влияния остаточной влажности и фазового перехода примет следующий вид:

$$\rho C \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nabla (\lambda \nabla \Theta) + \rho_i L \frac{s - s_{eq}(\Theta)}{t_*}$$

с начальными и граничными условиями

$$\Theta\Big|_{t=0} = \Theta_0, \quad \Theta\Big|_{\Gamma_1} = \Theta_{C1}(t), \quad \Theta\Big|_{\Gamma_2} = \Theta_{C2}(t),$$

где λ – эффективная теплопроводность, ρ – эффективная плотность среды, C – эффективная удельная теплоёмкость в талом и мёрзлых состояниях, Θ – температура среды, Θ_0 – начальная температура среды, L – скрытая теплота фазового перехода, s – влажность среды, s_{eq} – равновесная влажность, t_* – характерное время кристаллизации, зависящее от материала. Изменение влажности, происходящее в процессе замораживания, задаётся уравнением массового баланса

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla (D \nabla s) - \frac{s - s_{eq}(\Theta)}{t_*}$$

с начальными и граничными условиями

$$s\Big|_{t=0} = s_0, \quad \frac{\partial s}{\partial r}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial r}\Big|_{\Gamma_2} = 0,$$

где D – коэффициент диффузии.

В [6] на основе экспериментальных данных для различных пород была предложена следующая аппроксимация функции s_{eq}:

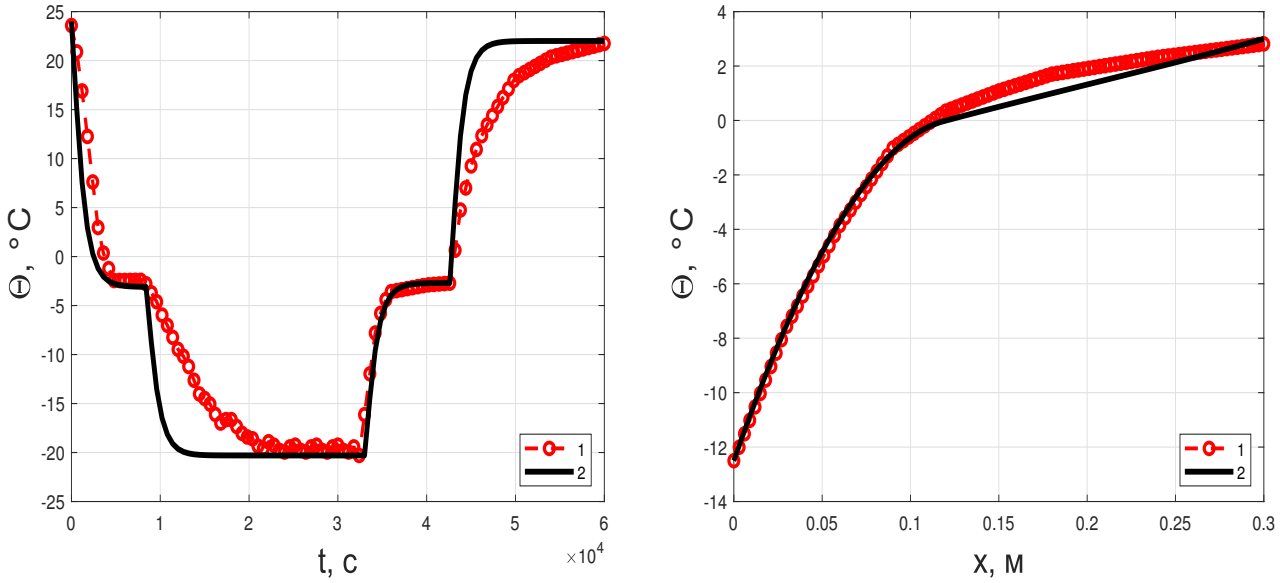
$$s_{eq} = \frac{1 + T}{1 - \alpha_0 T},$$

где функция T имеет вид

$$T = \frac{\Theta - \Theta_{0*}}{\Theta_{\min} - \Theta_{0*}},$$

в последнем равенстве $\Theta_{\min}$ – минимальная температура среды. Параметр α_0 определяет вид функции остаточной влажности и не имеет физического смысла. Функции для определения коэффициента диффузии и характерного времени кристаллизации были взяты из работы [6].

Для верификации математической модели (1)–(4) проведено сравнение численного решения с экспериментальными данными из работы [6]. На левой границе поддерживалась низкая температура с помощью воздуха, выдуваемого из холодильной камеры. На правой границе более высокая температура поддерживалась потоком нагретой жидкости, прокачиваемой через термостат. В этих экспериментах температура на границах поддерживалась постоянной и составляла $-12,5\,^{\circ}\mathrm{C}$ и $3,0\,^{\circ}\mathrm{C}$ соответственно. Для обеспечения одномерного теплового потока через основания боковые стороны образцов были теплоизолированы. В ходе эксперимента температура в холодильной камере и термостате контролировалась лабораторными термометрами, а температура в образцах – термопарами. После извлечения из прибора образцы почвы нарезали на кусочки толщиной 2–3 мм и определяли их общую влажность.



а) б)

Рис. 1: Сравнение результатов численного моделирования изменения температуры и экспериментальных данных в работе [8] (а), в работе [6] (б): 1 — результаты численного моделирования и 2 — экспериментальные данные

Численные результаты для профиля температуры в сравнении с экспериментальными данными [6] представлены на рис. 1 (а). Сравнение приведено при времени $\tau = 12$ часов. Видно, что существует хорошее согласие между теоретическими (моделирование) и экспериментальными результатами. Распределение температуры по глубине показывает, что фронт замерзания находится в области от 0,1 до 0,12 м.

Для изучения процесса замораживания влагонасыщенного грунта в работе [8] сквозная цилиндрическая форма высотой 0.06 м и диаметром 0.05 м заполнялась песком, смешанным с водой. Для регистрации температуры в грунт были помещены три термопары.

Термопара 1 расположена в центре нижнего основания цилиндра, термопара 2 – в центре на образующей, термопара 3 – в центре цилиндра. Предполагается, что на поверхностях условия теплообмена с окружающей средой постоянные. В эксперименте образец устанавливался на дне холодильной камеры. После полной заморозки образца производилось его естественное размораживание при комнатной температуре. Изменение температуры, полученное в результате экспериментального исследования мёрзлого грунта из работы [8] и численного моделирования, приведено на рис. 1 (б). Температурные колебания, наблюдаемые на рис. 1 (б), связаны с периодическим включением/выключением компрессора холодильной камеры, которое необходимо для поддержания постоянной температуры.

В работе была предложена и численно исследована одномерная математическая модель замораживания влагонасыщенного грунта с учётом наличия остаточной влаги в мёрзлой зоне. Проведена верификация математической модели и интенсивности фазового перехода (5) на экспериментальных данных из литературных источников [6, 8].

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 24-71-00058, https://rscf.ru/project/24-71-00058/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alekseeva S. V., Sazhenkov S. A. *Numerical analysis of a one-dimensional model of a melting-freezing snowpack*. J. Comput. Engineer. Mathem. 2021. V. 8. № 4. P. 17–27.
2. Сибин А. Н., Папин А. А. *Тепломассоперенос в тающем снеге.* ПМТФ. 2021. Т. 62. № 1. С. 109–118.
3. Сибин А. Н., Папин А. А. *Моделирование движения растворимой примеси в тающем снеге.* ПМТФ. 2024. Т. 65. № 1. С. 58–69.
4. Waldner P. A. [et al.] *Effect of snow structure on water flow and solute transport.* Hydrological processes. 2008. V. 18. № 7. P. 1271–1290.
5. Колесников А. Г. *К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта.* Доклады АН СССР. 1952. Т. 82. № 6. С. 889–891.
6. Bronfenbrener L. *Non-equilibrium crystallization in porous media: Numerical solution*. Cold Region Science and Technology. 2013. V. 85. P. 137–149.
7. Желнин М. С. [и др.] *Экспериментальное и теоретическое исследование механических деформаций в промерзающем влагонасыщенном грунте.* Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 4. С. 19–28.
8. Прохоров А. Е. [и др.] *Исследование особенностей неравновесного фазового перехода во флюидонасыщенном грунте.* Вестник Пермского университета. Физика. 2018. № 4(42). С. 31–37.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ТРЕЩИНАМИ

М. Н. Перельмутер

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) в прямой формулировке [1] используется для решения нестационарных задач теплопроводности и несвязанных квазистатических задач термоупругости. Рассматриваются задачи для кусочно-однородных тел с трещинами на границе раздела материалов и при действии внешних механических и нестационарных тепловых нагрузок. Учитывается взаимодействие берегов трещин при наличии подкрепляющих волокон-связей в концевой области трещины. Взаимодействие берегов трещин в концевой области моделируется распределёнными усилиями, приложенными к берегам трещины и зависящими от её раскрытия. Полагается, что концевая область является частью трещины, а коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) определяются в вершине трещины, совпадающей с вершиной концевой области. Для моделирования криволинейных трещин и трещин на границе соединения материалов конструкция разделяется на подобласти, в каждой из которых усилия и перемещения определяются ГИУ [2,3]. Первым этапом решения задачи является решение нестационарной задачи теплопроводности. Для решения задачи используется формулировка ГИУ задачи теплопроводности без вычисления интегралов по объёму тела и шаговая схема по времени. Результаты решения задачи теплопроводности используются как начальные данные для задачи термоупругости. В задачах термоупругости используются ГИУ с фундаментальным решением Кельвина. Все интегралы по объёму тела, содержащиеся в ГИУ и необходимые для учёта нестационарной термической нагрузки, преобразованы к эквивалентной граничной форме.

Для численного решения ГИУ используются квадратичные изопараметрические граничные элементы и специальные граничные элементы вблизи вершины трещины, учитывающие асимптотическое поведение переменных (температуры, теплового потока, перемещений и напряжений). При решении нестационарных задач теплопроводности и термоупругости вводится дискретизация по времени. Временной интервал решения задачи разбивается на участки (временные элементы), на которых функции задач теплопроводности и термоупругости полагаются постоянными. Интегрирование фундаментальных решений ГИУ по времени при такой аппроксимации переменных выполняется аналитически. На участках идеального контакта границ подобластей выполняются условия сопряжения для температуры $T(r,t)$ и теплового потока $q(r,t)$

$$T^k(r,t) = T^n(r,t), \qquad q^k(r,t) = -q^n(r,t), \tag{1}$$

а также условия непрерывности для перемещений $u_i(r,t)$ и равновесия для усилий $t_i(r,t)$

$$u_i^k(r,t) = u_i^n(r,t), \qquad t_i^k(r,t) \;=\; -t_i^n(r,t). \tag{2}$$

Здесь k и n – номера соседних подобластей, $i = 1,2$, параметр r определяет положение точки на границе тела, t – время термического процесса.

Дополнительные условия (заменяющие условия (2)) вводятся при наличии связей между берегами в концевой области трещины (обобщённый закон деформирования связей)

$$t_i(r,t) = S_i(r,t)\,\Delta u_i(r,t)\;, \quad \Delta u_i(r,t) = u_i^k(r,t) - u_i^n(r,t)\;, \quad S_i(r,t) = \gamma_i(r,t)\frac{E_b}{h}\,. \tag{3}$$

Здесь $i = 1, 2$ соответствует касательному и нормальному к плоскости трещины направлениям (двумерная задача), $\Delta u_i(r,t)$ – компоненты вектора раскрытия трещины в локальной системе координат, $S_i(r,t)$ – жёсткость связей в концевой области трещины, зависящая от положения точки r вдоль концевой области трещины, $\gamma_i(r,t)$ – безразмерные функции, определяющие изменение жёсткости связей вдоль концевой области трещины, h – линейный размер, пропорциональный толщине зоны неоднородности на участке соединения материалов, E_b – эффективный модуль упругости связей.

Если жёсткость связей в концевой области трещины не зависит от натяжения связи, то зависимости (3) определяют линейно-упругий закон деформирования связей.

Разработан пакет программ для решения задач термоупругости с трещинами при термомеханическом нагружении. Выполнен ряд расчётов для трещин с концевой областью на границе раздела материалов. Проведено параметрическое исследование влияния жёсткости связей в концевой области трещины, физико-механических параметров материалов и размера концевой области трещины на величину КИН.

В качестве примера влияния нестационарных температурных полей на КИН для трещины со связями в концевой области рассмотрена задача для пластины шириной $2D$ и высотой $2H$ с двумя краевыми трещинами длины ℓ, заполненными линейно-упругими связями ($H/D = 1$, $D/\ell = 2$, $D = 10\,$мм, состояние плоской деформации). Полагаем, что материал пластины – керамика (Al_2O_3) с физико-механическими свойствами: модуль упругости $E = 360\,$ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 30\,$Вт/м К, коэффициент температуропроводности $\chi = 1.2 \cdot 10^{-5}\,$м^2/с. В начальный момент времени ($t = 0$) пластина имеет постоянную температуру T_0. Боковые поверхности пластины $x = \pm D$ поддерживаются при температуре T_s, меньшей T_0, начиная с момента времени $t > 0$ (граничные условия, соответствующие термическому удару). Ввиду симметрии задачи, расчёты тепловых полей и температурных напряжений выполнялись для 1/4 пластины.

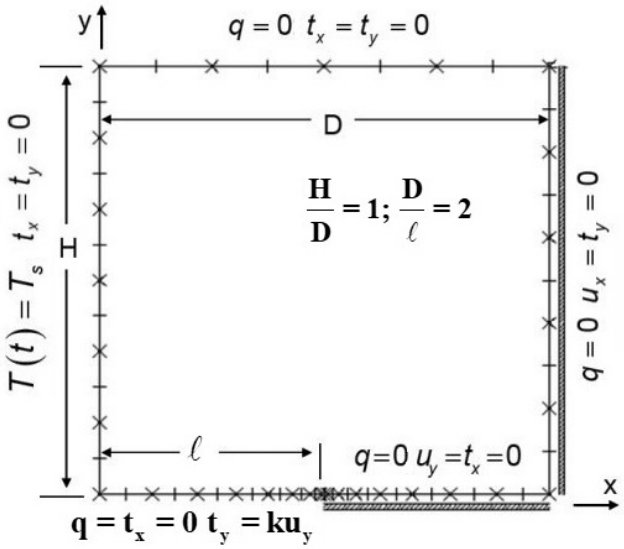
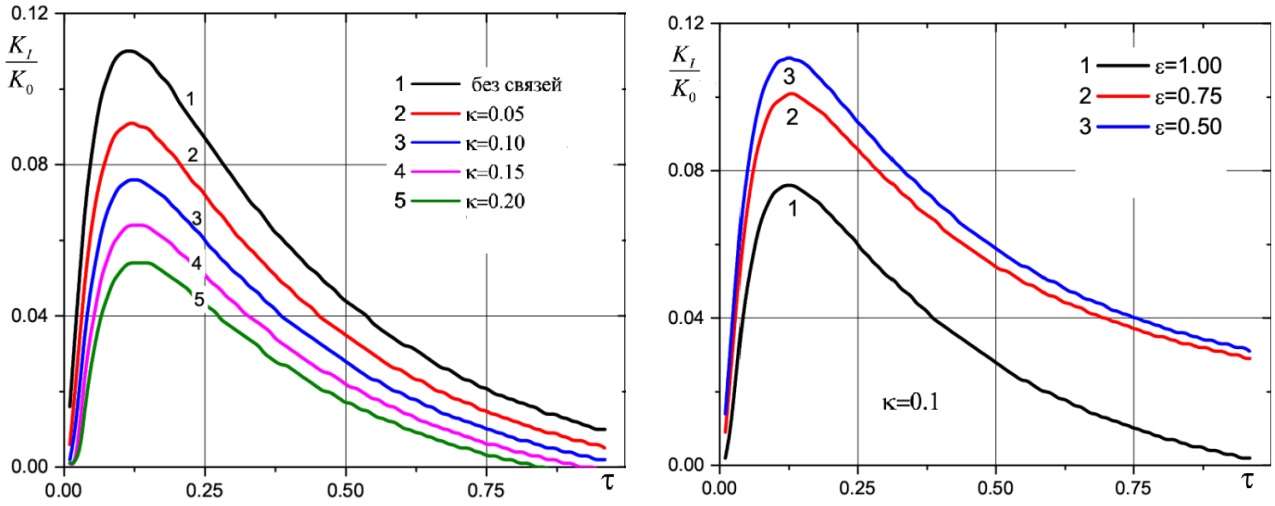


Рис. 1: Пластина с двумя краевыми трещинами: расчётная область с учётом симметрии задачи, термические и механические граничные условия, $T(t)$ – температура, $q(t)$ – тепловой поток на границе области, t – время термического процесса, $u_{x,y}$ – перемещения и $t_{x,y}$ – усилия на границе области, ℓ – длина трещины, заполненной связями

Расчётная область (на границе области 31 квадратичный элемент) и граничные условия приведены на рис. 1, где тонкая заштрихованная зона показывает область заданных перемещений по внешней границе модели (это обозначение только на рисунке, не является частью модели).

Расчёт выполнен при $\Delta T = T_0 - T_s = 50\,K$ для трещины без связей и трещин с различным размером зоны, заполненной связями. Полагалось, что компонента жёсткости связей, соответствующая касательному к плоскости трещины направлению, $S_1(r,t)$ равна нулю и $E_b = E$. Нестационарное температурное поле является причиной возникновения в пластине нормальных напряжений, раскрывающих трещину. Наличие связей между берегами трещины сдерживает её раскрытие при термической нагрузке. Проведено параметрическое исследование влияния жёсткости связей в концевой области трещины на величину КИН.



а) б)

Рис. 2: Термический КИН – зависимость от времени нагрева τ: а) – трещина, заполненная связями; b) – частичное заполнение трещины связями, $\varepsilon = d/\ell$, где d – длина зоны связей

На рис. 2 а, б приведены зависимости нормированного термического КИН K_I/K_0 от безразмерного времени τ (числа Фурье) для случаев трещины без связей и трещины, заполненной связями, при различных значениях относительной жёсткости связей κ. Для нормировки и представления результатов на рис. 2 использованы следующие параметры:

$$K_0 = \sigma_0\sqrt{\pi\ell}, \quad \sigma_0 = \frac{\alpha E\,(T_0 - T_s)}{1-\nu}, \quad \kappa = \frac{E_b\,\ell}{h\,E}, \quad \tau = \frac{t\chi}{D^2}, \tag{4}$$

где $\alpha = 8\cdot 10^{-6} K^{-1}$ – коэффициент линейного расширения материала, κ – относительная жёсткость связей в направлении, нормальном к плоскости трещины, t – время от начала расчёта; изменение относительной жёсткости связей выполнялось при вариации параметра h в (4), полагая, что $E_b = E$.

Наблюдается существенно нелинейный эффект влияния увеличения жёсткости связей на термический КИН, значительное экранирование связями происходит при относительно большой жёсткости связей. Эффект частичного заполнения трещины связями проявляется при выходе на стационарный тепловой режим (см. рис. 2 б, $\varepsilon < 1$). Распределения нормальных сжимающих напряжений в связях вдоль концевой области трещины для нескольких моментов времени приведено на рис. 3. При нестационарной термической

нагрузке напряжения вдоль концевой области трещины изменяются практически линейно, в отличие от механического нагружения, когда для трещины, заполненной связями, нормальные напряжения в связях постоянны на большей части концевой области [4].

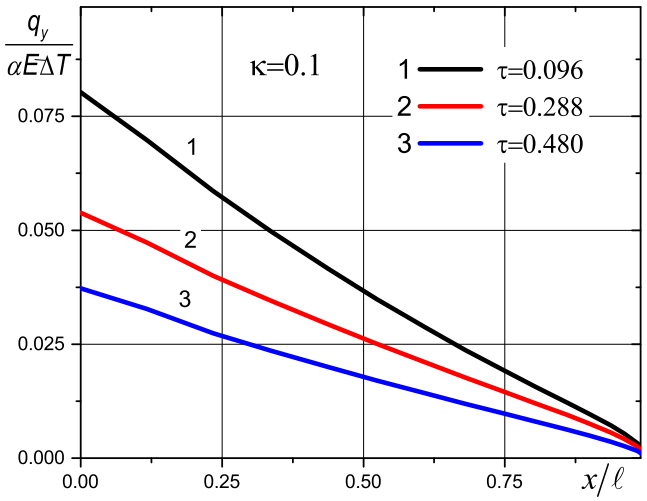


Рис. 3: Нормальные напряжения q_y в связях вдоль трещины при нестационарном температурном нагружении, τ – число Фурье, κ – относительная жёсткость связей, $\varepsilon = 1$

Величина напряжений в связях уменьшается со временем при стремлении температурного распределения к однородному. В рассмотренном примере в зоне трещины возникают растягивающие напряжения, раскрывающие трещину при охлаждении пластины. Создание сжимающих напряжений в зоне трещины при наличии зоны связей позволяет снизить или компенсировать раскрытие трещины, возникающее при растяжении.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-29-00524, https://rscf.ru/project/23-29-00524/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. *Метод граничных элементов в прикладных науках.* М.: Мир, 1984.
2. Perelmuter M. *Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks.* Comput. Mech. 2013. V. 51. № 4. P. 523–534.
3. Perelmuter M. *Analysis of interaction of bridged cracks and weak interfaces.* Int. J. Mech. Sci. 2018. V. 149. P. 349–360.
4. Goldstein R., Perelmuter M. *Modeling of bonding at an interface crack.* Int. J. Fracture. 1999. V. 99. № 1–2. P. 53–79.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЧЕНИЯ ДВУХСЛОЙНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С УПРУГОЙ ПРОСЛОЙКОЙ

И. Е. Петраков

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В работе рассматривается сечение двухслойного композита, каждый слой которого представляет собой ортотропный материал, армированный волокнами, расположенными параллельно друг другу. Слои обладают свойством разномодульности и связаны между собой изотропной упругой прослойкой. Для моделирования разномодульных слоёв применялся обобщённый реологический метод [1].

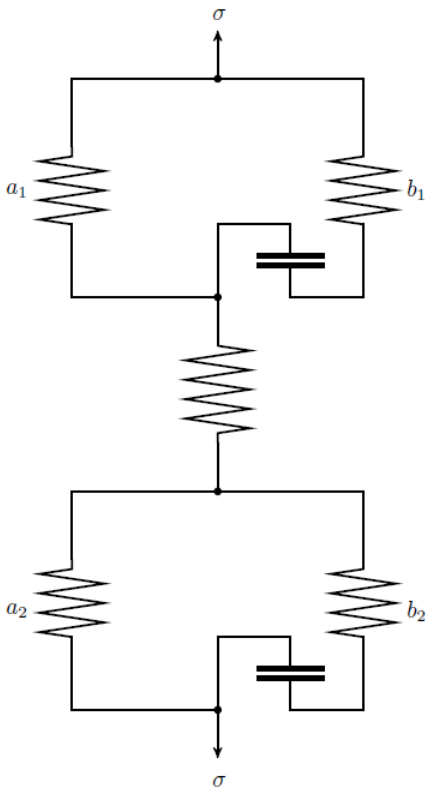


Рис. 1: Схема композита

Схема, описывающая такой материал, представлена на рис. 1, где σ – тензор действительных напряжений, a_i – тензор модулей упругости при сжатии для i-го слоя, b_i – тензор дополнительных модулей при растяжении для i-го слоя. С помощью вариационного принципа Лагранжа был получен функционал упругой энергии для сечения, расположенного перпендикулярно плоскости пластины. Для решения задачи к полученному функционалу Лагранжа применён метод начальных напряжений, и выведено следующее вариационное уравнение, эквивалентное минимуму функционала на каждом шаге алгоритма:

$$\sum_{i=1,2}\left[\int\limits_{\Omega_i}\left(\frac{1}{2}\nabla\vec{u} : (a_i + b_i) : \nabla\vec{u} - \Delta\sigma^{k-1} : \nabla\vec{u}\right) d\Omega_i - \int\limits_{\Gamma_i}\vec{q}\cdot\vec{u}\, d\Gamma_i\right] +$$

$$+\int\limits_{\Omega_i}\left(\frac{1}{2}\nabla\vec{u}:a_m:\nabla\vec{u}\right)d\Omega_m-\int\limits_{\Gamma_i}\vec{q}\cdot\vec{u}\,d\Gamma_m=0,$$

где индекс i обозначает номер слоя, $\vec{u}$ – вектор перемещений в рассматриваемом сечении пластины, ∇ – оператор Гамильтона, $\vec{q}$ – вектор напряжения на границе пластины Γ_σ, a_m – тензор модулей упругости прослойки. Компонент $\Delta\sigma^{k-1}$ получен из деформаций на предыдущем шаге как $b_i : \Pi(\varepsilon^{k-1})$, где $\Pi(\varepsilon)$ — оператор проекции на конус допустимых деформаций, связанный с направлением волокон армирования.

Для поиска численного решения применялся метод конечных элементов с использованием треугольных элементов Лагранжа, степенями свободы которого являются узловые перемещения. Проведены вычислительные эксперименты для различных вариантов армирования и соотношений толщин композитного материала и прослойки, рис. 2.

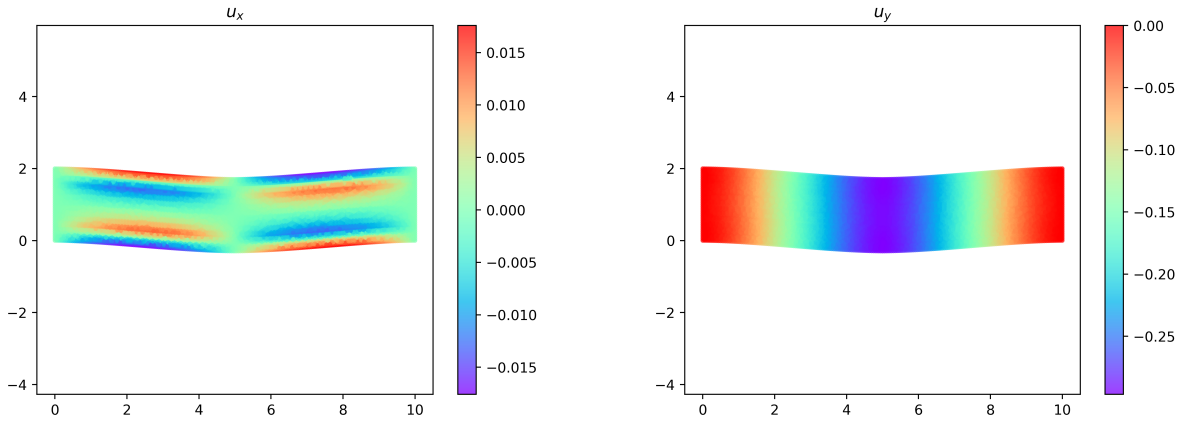


Рис. 2: Примеры расчёта перемещений в сечении консольно закрепленной по боковым сторонам пластины с толстой прослойкой (толщина прослойки в 3 раза больше толщины отдельного армированного слоя) под действием сосредоточенной силы в центре пластины

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовская О. В., Садовский В. М. *Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред.* М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ РОСТА КЛЕТОЧНОЙ ТКАНИ

В. Б. Погосян, М. А. Токарева

Алтайский государственный университет, Барнаул

Изучается математическая модель динамики клеточной ткани на основе уравнений трёхфазной фильтрации. Ткань моделируется как трёхфазная среда, состоящая из твёрдого скелета (внеклеточный матрикс), клеток и межклеточной жидкости [1–3]. Предполагается, что внеклеточный матрикс представляет собой пористую среду, в которой происходит фильтрация клеток и внеклеточной жидкости [3,4]. Кроме того, следует учитывать питательные вещества и химические факторы, диффундирующие в жидкости и поглощаемые/вырабатываемые клетками. В общем случае учитывается переход массы из одного компонента в другой

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \nabla\cdot[(1-\phi)\boldsymbol{v}_0] = \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial\phi s}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi s\boldsymbol{v}_T) = \Gamma_T,$$

$$\frac{\partial\phi(1-s)}{\partial t} + \nabla\cdot[\phi(1-s)\boldsymbol{v}_T] = \Gamma_l,$$

$$\rho(1-\phi)\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\boldsymbol{v}_0\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{T}_0 + \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{m}_0^\sigma,$$

$$\rho\phi s\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_T}{\partial t} + \boldsymbol{v}_T\cdot\nabla\boldsymbol{v}_T\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{T}_T + \boldsymbol{b}_T + \boldsymbol{m}_T^\sigma,$$

$$\rho\phi(1-s)\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_l}{\partial t} + \boldsymbol{v}_l\cdot\nabla\boldsymbol{v}_l\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{T}_l + \boldsymbol{b}_l + \boldsymbol{m}_l^\sigma,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c - Q,$$

где $(1-\phi)$ – доля, занятая ECM, ϕ – пористость, s – насыщенность клеточной фазы, $(1-s)$ – насыщенность внеклеточной жидкости, c – концентрация питательных веществ, $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_T$, $\boldsymbol{v}_l$ – истинные скорости внеклеточного матрикса, клеток и внеклеточной жидкости соответственно, $\boldsymbol{T}_i$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{b}_i$ – вектор внешних сил, $\boldsymbol{m}_i^\sigma$ – сила взаимодействия, действующая на i-ую составляющую из-за её взаимодействия с другими составляющими, Γ_0, Γ_T, Γ_l – интенсивности перехода массы из одного компонента в другой в единице объёма в единицу времени ($\Gamma_0+\Gamma_T+\Gamma_l=0$), Q – скорость потребления клетками кислорода. Предполагается, что плотности фаз одинаковые: $\rho_0=\rho_T=\rho_l=\rho$.

При описании многих биологических моделей, особенно моделей раковых опухолей, часто используются цилиндрические или сферические координаты [5–7]. Это обусловлено тем, что опухоли в большинстве случаев представляют собой сферические симметричные или асимметричные конфигурации. Как описано в [4], существуют случаи, когда опухоль растёт вдоль сосуда, которые очень удобно моделировать в цилиндрических координатах, упростив сосуд до цилиндра (или усечённого конуса) и взяв за ось симметрии центральную ось сосуда.

Исходная система сводится к трём уравнениям для нахождения функций пористости, насыщенности клеток и концентрации питательных веществ [8]. Рассматривается осесимметричный случай роста опухоли вдоль кровеносного сосуда для итоговой системы. С учётом осевой симметрии достаточно провести моделирование в области, ограниченной сектором $\pi/2$ радиального угла. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) уравнения выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} - \psi k \phi^{n+1} \Big[\Big(\frac{\partial s}{\partial r} \Big)^2 + s \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{s}{r} \frac{\partial s}{\partial r} \Big] + \chi k \phi^{n+1} \Big(\frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial r} + s \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{s}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \Big) = \Gamma_T,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Big(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \Big) - Q.$$

Для данной системы уравнений сформулирована начально-краевая задача и проведено численное исследование.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер госзадания FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Graziano L. [et al.] *Modeling of biological materials.* Mechanics in tumor growth. 2007. P. 263–321.
2. Kowalczyk R. *Preventing blow-up in a chemotaxis model.* J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 305. Iss. 2. P. 566–588.
3. Preziosi L., Farina A. *On Darcy's law for growing porous media.* Int. J. Nonlinear Mech. 2002. V. 37. Iss. 3. P. 485–491.
4. Astanin S., Tosin A. *Mathematical model of tumour cord growth along the source of nutrient.* Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2007. V. 2. № 3. P. 153–177.
5. Mollica F., Preziosi L., Rajagopal K. R. *Modeling of biological materials.* Boston, London : Birkhauser, Springer, 2007.
6. Amereh M. [et al.] *Asymmetric growth of tumor spheroids in a symmetric environment.* Mathematics. 2022. V. 10. № 12:1955.
7. Murray J. D. *Mathematical biology.* Berlin : Springer, 2003.
8. Погосян В. Б., Токарева М. А., Папин А. А. *Моделирование динамики клеточной ткани с учетом фазовых переходов.* Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения : Тезисы докладов VIII Всероссийской конференции с международным участием, Томск, 3–7 июля 2023 г. Томск : Национальный исследовательский Томский государственный университет, 2023. С. 169–170.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОВОГО ПОТОКА РЕЗОНИРУЮЩИХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. В. Примаков[1], *А. А. Жилин*[1,2]

[1]*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*
[2]*Сибирский государственный университет водного транспорта, Новосибирск*

Ряд технологических процессов в современном мире происходит с избыточными потерями энергии, переходящей в тепло окружающей среды. Развитие методов предотвращения рассеивания тепла на элементах технических устройств является важной физической задачей. Научные изыскания в данной сфере приводят к идее создания идеальной теплоизолированной системы, в которой протекают адиабатические процессы. Исследование адиабатического течения воздуха в резонирующих акустоконвективных системах имеет большое значение в различных областях науки и техники, включая аэродинамику, акустику, физику колебаний и другие. Адиабатическое течение характеризуется отсутствием теплообмена между потоком и окружающей средой, что позволяет создавать эффективные системы с высоким значением температуры. Подобные системы могут быть реализованы с применением акустического полузакрытого резонатора [1] за счёт многочисленных волновых взаимодействий в его полости [2]. Изучение газодинамики в резонансных системах также имеет огромный прикладной потенциал для инженеров и исследователей в области акустики. Работы в данной области помогут инженерам создавать оптимальные конструкции резонансных систем [3] с требуемыми акустическими характеристиками [4]. В качестве примера прикладных направлений можно привести проблему усиления и контроля звукового давления с помощью резонирующего устройства [5,6], влияние на процесс воспламенения [7], акустической резки металлов [8, 9], изменения качеств воды [10]. Одним из развивающихся прикладных направлений является исследование процессов пропитки [11] и осушения [12] пористых материалов, где крайне полезен тепловой эффект в резонирующих каналах при акустическом воздействии [2, 4].

Рассмотрение вопросов формирования акустоконвективного потока в каналах резонансных акустических систем является актуальным и востребованным в связи с возможностью реализовать наиболее эффективные устройства. При их создании хорошо себя показывает методология численного моделирования, позволяющая определить параметры потока внутри резонатора и оптимизировать его конструкцию для получения требуемых акустических характеристик [13, 14]. Важным элементом акустической системы является резонансная полость, в которой происходят взаимодействия волн давления. Наиболее эффективными с точки зрения сохранения и прироста температуры являются глубокие резонаторы, позволяющие достичь максимальных значений в полузакрытой полости [4, 15, 16].

С помощью численного моделирования исследована трёхмерная акустическая биканальная система каналов-резонаторов, периодически заполняемая сверхзвуковой струёй. Исследование проведено в программном пакете Ansys Fluent на основе уравнений Навье – Стокса [4]. Моделируются условия теплоизолированной системы в адиабатном приближении с нулевым тепловым потоком. Струя сформирована газовым потоком при избыточном давлении в форкамере 5, 6 и 7 атм., имеет коэффициент нерасчётности 3,4; 4,4; 5,1 соответ-

ственно. Температура в начальный момент времени в моделируемой системе соответствует комнатным условиям.

В результате выполненных численных расчётов получены картины распределения давления и температуры в тракте резонансной полости. Газодинамический поток, сформированный струёй, имеет две характерные области: вблизи глухого торца резонатора и окрестности открытой кромки резонатора, взаимодействующей с окружающей средой. Выбор двух данных областей связан с решением прикладных задач. Во всех расчётах зафиксирован эффект перераспределения амплитуды генерируемого акустического сигнала с нарастанием второй гармоники, что характерно для биканальных систем полузакрытых резонаторов [2]. Проведённый амплитудно-частотный анализ полученных сигналов показал нарастание уровня звукового давления вблизи торца резонатора до 197 дБ (196,9; 195,5 и 197,6 при нерасчётности 3,4; 4,4 и 5,1 соответственно). При этом частота полученных сигналов близка к экспериментальному [17] и расчётному [1, 2] значению 125 Гц и составила 116, 129 и 128 Гц соответственно. Истечение из резонатора приводит к взаимодействию волн давления в системе биканального тракта и формированию акустоконвективного потока с характеристиками, равными 163, 172 и 173 дБ при нерасчётности 3,4; 4,4 и 5,1, соответственно. Частота сигнала при этом возросла до 223, 260 и 257 Гц соответственно, что близко к теоретическому значению частоты второй гармоники, равной 250 Гц. Особое внимание в численном моделировании уделено распределению значений давления и температуры вдоль центральной оси резонатора. Полученные картины заполнения и опустошения полости позволили детально визуализировать процесс взаимодействия волн в резонаторе и нарастания давления внутри до максимальных значений в процессе заполнения полости. При опустошении резонатора показан веер волн разрежения, распространяющихся вглубь резонатора и влияющих на газодинамические характеристики также и при последующем заполнении. Зафиксирован момент взаимодействия волн сжатия с закрытым торцом полости и момент истечения ответного потока из резонатора под высоким давлением 4–4,7 атм. при давлении в струе 2–3 атм. Повышение давления в форкамере приводит к увеличению давления в резонаторе, в том числе и на его торце: 4; 4,6 и 4,8 атм. при параметре нерасчётности 3,4; 4,4 и 5,1 соответственно. Исследование теплового распределения в цилиндрическом резонаторе показало существование высокотемпературной застойной зона вблизи торца [2]. При этом максимальные значения температуры, достигнутые на жёсткой стенке резонатора, снижаются при увеличении давления в форкамере. Абсолютные значения температуры в максимуме составили 815, 809, 792 К при коэффициенте нерасчётности 3,4; 4,4 и 5,1 соответственно. Отмечено, что наибольшая температура достигается не на поверхности торца, а на некотором расстоянии от него, примерно 0,2 калибра резонатора.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда и Правительства Новосибирской области, проект № 23-29-10118, https://rscf.ru/project/23-29-10118/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов Ю. Г. *Газоструйные излучатели звука Гартмановского типа. Физика и техника мощного ультразвука. Кн. 1: Источники мощного ультразвука.* Под ред. Л. Д. Розенберга. М. : Наука, 1967. С. 7–110.
2. Жилин А. А., Примаков А. В. *Численное исследование тепловых эффектов в акустоконвективном потоке биканальной системы.* Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т. 29. № 1. С. 79–89.

3. Коробейников Ю. Г., Назаров А. А., Федоров А. В. *Энергозатраты при сушке древесины акустическим способом.* Деревообрабатывающая промышленность. 2004. № 4. С. 6–7.
4. Жилин А. А., Примаков А. В. *Численное исследование влияния геометрии биканальной системы на область существования эффекта Гартмана.* Теплофизика и аэромеханика. 2023. Т. 30, № 3. С. 427–440.
5. Raman G., Kibens V. *Active flow control using integrated powered resonance tube actuators.* AIAA paper. 2001. V. 3024. P. 19.
6. Примаков А. В., Жилин А. А. *Исследование влияния цилиндрической резонирующей полости на ближнее акустическое поле струи в биканальной системе.* Челябинский физико-математический журнал. 2024. Т. 9. № 2. С. 277–286.
7. Кузнецова Т. А., Августинович В. Г. *Полуэмпирическая модель генерации оксидов азота в малоэмиссионной камере сгорания в составе системы управления авиационного двигателя.* Прикладная математика и вопросы управления. 2022. № 2. С. 7–33.
8. Волков С. С. [и др.] *Технологические особенности ультразвуковой резки с одновременной сваркой изделий из пластмасс.* Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2023. № 3(764). С. 53–60.
9. Вьюгинова А. А., Вьюгинов С. Н., Новик А. А. *Проектирование ультразвуковых ножей для резки сотовых панелей из алюминия и арамида (кевлара).* Сборник трудов XXXV сессии Российского акустического общества. 2023. С. 872–877.
10. Zhilin A. A. *Properties of water under intense acoustic loading.* AIP Conference Proceedings. 2023. V. 2504. P. 030115.
11. Жилин А. А. *Изучение процессов пропитки и сушки пористых материалов.* Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4–3. С. 777–778.
12. Zhilin A. A. *Dynamics of acoustic-convective drying of sunflower cake.* AIP Conference Proceedings. 2017. V. 1893. P. 030138.
13. Primakov A. V., Zhilin A. A. *Gas-dynamic studying of the two-channel system flow using numerical simulation methods.* AIP Conference Proceedings. 2020. V. 2288. P. 030060.
14. Primakov A. V., Zhilin A. A. *Effect of resonant cavity edge thickness on flow acoustic-convective characteristics in the multi-channel tract.* AIP Conference Proceedings. 2023. V. 2504. P. 030101.
15. Sprenger H. *Uber thermische effekte in reseonanzrohren.* Mitt. Inst. Aerodynamik. Zurich. 1954. № 21. P. 18–35.
16. Kadaba P. V., Bondarenko V. L., Arkharov A. M. *Thermal characteristics of a Hartmann-Sprenger tube.* Int. J. Refrigeration. 1990. V. 13. № 5. P. 309–316.
17. Zhilin A. A., Golubev E. A. *Experimental study of the amplitude-frequency characteristics in a two-channel system.* AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1939. P. 020016.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВОЗМУЩАЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

А. Н. Рогалёв

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В работе изучается устойчивость задач оценки областей решений математических моделей технических систем с возмущающими воздействиями. Математической моделью технической системы называется совокупность математических объектов (чисел, скалярных переменных, векторов, матриц, графов и т. п.) и связывающих их отношений. Она устанавливает связи между параметрами процесса и формализует технический процесс в виде системы математических соотношений, характеризующих изучаемый объект. Необходимость оценивать устойчивость математических моделей технических систем с возмущающими воздействиями возникает при оценке практической устойчивости движений на конечном интервале времени, при определении областей достижимости управляемых систем, при оценке областей живучести управляемых систем, при расчёте гарантированных (не вероятностных) границ зон опасных состояний технических систем, при расчёте пороговых значений параметров технических систем, соответствующих границам опасных зон, при вычислении максимальных отклонений движений для управления попаданием траектории системы в опасную зону. В работе предлагается регуляризация таких задач оценки устойчивости на основе информации о множестве точных решений.

В подобных задачах для части параметров известны только оценки областей их значений. Это приводит к появлению множеств решений. Сложность решения таких задач заключается в том, что большинство методов оценки множеств решений систем ОДУ (или вычисления верхних и нижних границ решений) имеет сильный рост границ оценок этих множеств решений. Причиной этого являются в том числе структурные возмущения математической модели, например неучтённая малая инерционность в математической модели движения. Имеют место также структурные возмущения, зависящие от увеличения размерности решаемой задачи во многих алгоритмах . Это означает, что поставленная задача нахождения решения той же системы ОДУ с числовыми значениями параметров может быть корректно сформулирована, а её решение – сходиться, но быть структурно неустойчивым. Полезно регуляризировать оценки границ множеств решений, перейдя к линейному приближению исходной системы и получая информацию о множестве точных решений. Эта регуляризация определяется значениями сжатия/растяжения в заданных направлениях, смещения по оси времени и поворота на некоторый угол множества решений. В некотором смысле можно говорить о деформации множества решений в линейном приближении. Работы многих исследователей в области дифференциальных уравнений продемонстрировали сложность топологии фазового пространства, возможность заполнения траекториями всего энергетически доступного пространства.

Для описания задач данной работы определим её место среди задач устойчивости. Использование понятия устойчивости в различных областях научных знаний крайне важно и имеет общий смысл, но допускает многие трактовки и формулировки. Отличающиеся в некотором смысле формулировки строятся независимо друг от друга для задач физики, математики, техники, биологии, системного анализа и прочих научных дисциплин. Например устойчивость движения механической системы – это свойство стремиться к состоянию

равновесия при небольших отклонениях от него. Большое значение имеет гидродинамическая устойчивость – свойство потоков сохранять скорость и направление движения при затухании начальных возмущений. Для течения (или состояния покоя) жидкости часто вводятся некоторые параметры (число Рейнольдса для течения, число Рэлея или Грасгофа, если рассматривается перенос внутренней энергии потоком, конвекция). Далее изучается критическое значение этого параметра (порог устойчивости), при превышении которого развиваются возмущения. В гидродинамической устойчивости возмущения сами описываются некоторыми свойствами – формой, амплитудой и т. п. Под возмущениями понимается некоторая величина, прибавляющаяся к основным физическим величинам (скорости жидкости и давления, но можно применять также возмущения других полей – температуры, магнитного поля и т. д.). Если возмущения изменяются во времени, то исследуется задача о темпоральной устойчивости, если возмущения изменяются вдоль некоторого направления в пространстве (например вдоль трубы), то задача пространственной устойчивости.

Для некоторых технических систем вводится понятие теплогидравлической устойчивости как свойства потоков в каналах с обогревом сохранять параметры движения и параметры теплопередачи, для электроэнергетических систем (ЭЭС) устойчивость определяется как свойство возвращаться к установившемуся режиму под влиянием возмущений, сохраняя синхронное положение генераторов электричества.

Хорошо исследовано понятие математической устойчивости, в которой динамические объекты описываются системами дифференциальных уравнений. Основным понятием является устойчивость по Ляпунову, в котором реализуется идея «малых» отклонений решения дифференциального уравнения на промежутке времени при «небольших» вариациях начальных данных этого решения. Устойчивость по Ляпунову заключается в разработке методов, которые позволяют судить об устойчивости заданного решения, не зная общего решения данной системы дифференциальных уравнений.

В постановках методов Ляпунова выделяются исследования устойчивости относительно возмущения начальных данных и исследования устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Отличие приведённых постановок задач устойчивости математических моделей технических систем в том, что оценивается устойчивость множества решений системы ОДУ с возмущающими (управляющими) воздействиями на конечном интервале времени:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u), \quad u \in U, \quad y_0 \in Y_0, \tag{1}$$

где y – n-мерный фазовый вектор системы в евклидовом пространстве R^n, u – вектор возмущающих (управляющих) воздействий, U – компакт в евклидовом пространстве R^p, а Y_0 – области начальных данных. Также необходимо определить сечения множеств всех решений этой системы с возмущениями из некоторой области на конечном интервале.

Множество решений задачи (1) в зависимости от возмущающего параметра

$$Y(t) = Y(t, Y_0, U) = \bigcup_{y_0 \in Y_0, u \in U} y(t, y_0, u) = \left\{ y : y(t_0) \in Y_0, \forall t \geq 0, \frac{dy}{dt} = f(t, y, u) \right\} \tag{2}$$

называется трубкой траекторий и в общем случае образует довольно сложную структуру.

Исследование множества решений (2) осложняется тем, что, помимо устойчивых решений системы, множество траекторий может содержать особые точки, сепаратрисы и предельные циклы. Для устранения большинства трудностей реализации методов оценки множеств решений предлагается использовать символьные формулы – это комбинации

знаков операций, констант и переменных, имеющие самостоятельный смысл. Эти формулы указывают на алгоритм вычисления значения выражения либо на запись выражения для определения области значений величины через его параметры.

Эффективный численный алгоритм на основе символьных формул в рассматриваемом классе задач определяется тем, что вычисление множеств решений выполняется как вычисление или оценка диапазонов значений построенных символьных выражений [1–3]. Эффективность алгоритма оценки диапазонов значений по символьной формуле заключается в небольших затратах времени и количестве операций.

В результате есть две возможности – либо описывать значения граничных поверхностей в наборе дискретных точек (на сетке), либо вычислять оценки их максимальных значений в направлениях осей координат (или вычислять максимум в любом выбранном направлении).

Численное применение формулы Алексеева [4] для разности решения системы ОДУ с возмущением правой части выглядит следующим образом. Обозначим через y и z решения задачи

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \tag{3}$$

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + g(t, z), \quad z(t_0) = z_0, \tag{4}$$

соответственно, и предположим, что $\partial f/\partial y$ существует и непрерывна. Тогда решения системы (3) и возмущённой системы (4) связаны соотношением

$$z(t) = y(t) + \int\limits_0^1 \frac{\partial y}{\partial y_0}\left(t_0, t, y_0 + s\left(z_0 - y_0\right)\right) \cdot \left(z_0 - y_0\right) ds + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial y}{\partial y_0}\left(t_0, s, z(s)\right) \cdot g\left(s, z(s)\right) ds. \tag{5}$$

Бесконечно малые векторы, исходящие из центра исходного множества (т. е. шара малого радиуса ρ), переходят в векторы, исходящие из центра смещённого (и деформированного) множества, под действием аффинора. Итак, преобразование вектора $\overrightarrow{MM'}$ в вектор LL' происходит (с указанной степенью точности) с помощью аффинора $E + \Delta t \cdot U$, где U – производный аффинор векторного поля скоростей, а Δt – прошедший бесконечно малый промежуток времени. Под аффинором понимается оператор, через который выражается линейное (аффинное) преобразование (линейная однородная векторная функция). Но действие такого аффинора сводится к чистой деформации, порождаемой аффинором $E + \Delta t \cdot B$, и к повороту посредством аффинора $E + \Delta t \cdot C$. При этом B, C – симметричные и кососимметричные части аффинора U. В нашем случае их координаты выражаются по $U(M)$ – производным аффинором векторного поля $a(M)$:

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right), \quad c_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

В докладе показана эффективность определения формулы решения, записанной в символьной форме, совместно с регуляризацией в задачах устойчивости, что позволяет вычислять граничные точки множества решений с помощью этой формулы. Граничные точки будут находиться как экстремумы символьных выражений, учитывающих либо направления осей координат, либо другие заданные направления. Задав совокупность граничных точек, можно описать множество, включающее в себя множество решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rogalev A. N. *Set of solutions of ordinary differential equations in stability problems.* Continuum Mech. Appl. Mathem. Sci. Comput.: Godunov's Legacy. Springer Nature Switzerland AG. 2020. P. 307–312.
2. Rogalev A. N., Rogalev A. A., Feodorova N. A. *Mathematical modelling of risk and safe regions of technical systems and surviving trajectories* J. Phys: Conf Ser., 2021. V. 1889. 022108.
3. Rogalev A. N. *Symbolic methods for estimating the sets of solutions of ordinary differential equations with perturbations on a finite time interval.* J. Vibrat. Test. System Dyn. 2023. V. 7. Iss. 1. P. 31–37
4. Алексеев В. М. *Об одной оценке возмущений решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений.* Вестник Московского государственного университета. Серия Математика и механика. 1961. № 2. Р. 28–36.

МИКРОСТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СПЛАВА ГЕЙСЛЕРА В МАГНИТНЫХ И СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

А. А. Роговой, О. С. Столбова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Ферромагнитные сплавы, в которых наблюдается эффект памяти формы (сплавы Гейслера), относятся к классу функциональных материалов. Конструкции из таких материалов могут существенно менять свою конфигурацию под действием внешних магнитных и/или силовых полей. Такое поведение сплавов определяется их структурой (образованием двойников), возникшей в результате прямого фазового перехода первого рода, реализующегося только за счёт изменения температуры (при охлаждении), из аустенитного состояния (высокотемпературной фазы) в мартенситное состояние (низкотемпературная фаза). При приложении напряжения и/или внешнего магнитного поля в мартенситном состоянии происходит раздвойникование или переориентация этих структур, что приводит к возникновению значительной деформации (до 6-10 %) [1]. В работах [2, 3] представлены экспериментальные кривые намагничивания для сплава Гейслера Ni_2MnGa, которые демонстрируют резкий скачок намагниченности в некотором критическом поле в процессе переориентации тетрагональной кристаллической ячейки, что приводит к практически мгновенному удлинению образца в направлении его вертикальной оси.

Поскольку процессы намагничивания и переориентации кристаллической ячейки ферромагнитного сплава происходят на уровне структуры материала, для их описания строится микромеханическая модель. В рамках теории микромагнетизма, используя вариационный аналог уравнения Ландау – Лифшица – Гильберта, было выполнено численное моделирование эволюции магнитной микроструктуры варианта мартенсита сплава Гейслера Ni_2MnGa во внешнем магнитном поле методом конечных элементов [4]. Для описания кинематики процесса образования двойников используется условие совместности Адамара [5, 6]. Решение этого уравнения позволяет определить поверхности скольжения и направления скольжения в тетрагональной кристаллической ячейке ферромагнитного материала в мартенситном состоянии, вдоль которого происходит сдвиг, приводящий к появлению и исчезновению двойниковой структуры. Этот сдвиг возникает, когда касательное напряжение на поверхности скольжения достигает критического значения, которое определяется экспериментально [6].

Поведение ферромагнитного материала в магнитном и силовом полях описывается в рамках моментной теории упругости, точнее частного случая этой теории, когда тензор моментных напряжений равен нулю, что является следствием отсутствия поверхностного магнитного момента: массовый магнитный момент существует, поверхностный равен нулю. В результате построено общее выражение для уравнения состояния, описывающее в рамках малых деформаций поведение анизотропного материала при силовых и магнитных воздействиях. Тензор напряжений при этом несимметричен и состоит из двух частей: симметричной, зависящей только от деформаций, и несимметричной, зависящей только от магнитного поля. Для симметричной части используется определяющее соотношение для анизотропного материала, имеющего одну ось симметрии четвёртого порядка и две оси симметрии второго порядка [6].

Приведённая выше модель применялась для описания результатов, полученных в экспериментальных работах [2, 3]. В этих работах образец представлял собой монокристалл

сплава Ni_2MnGa, состоящий из тетрагональных кристаллических ячеек, соответствующих варианту с вертикальным расположением короткой оси (представительный объём), к которому прикладывалось внешнее магнитное поле, перпендикулярное этой оси. Помимо воздействия на образец внешнего магнитного поля, осуществлялось также вертикальное сжатие его давлением. При численных расчётах рассматривался процесс переориентации одного варианта мартенсита в другой, происходящий в условиях внешнего магнитного поля при вариациях сжимающих усилий. Получено распределение вектора намагниченности в представительном объёме. Определены касательные и нормальные составляющие тензора напряжений на плоскостях сдвига, соответствующие намагниченности образца и сжимающему усилию в момент переориентации одного варианта мартенсита в другой [6]. Наблюдается хорошее соответствие кривой намагничивания, построенной по результатам расчёта, и осевой деформации с имеющимися экспериментальными данными. Теоретически обоснованы такие экспериментальные результаты, как необходимость увеличения напряжённости внешнего магнитного поля, при котором начинается процесс переориентации варианта мартенсита в условиях внешнего давления. Это давление стабилизирует вертикальное положение короткой оси тетрагонального элемента, и чем оно выше, тем сильнее стабилизация. При достаточно больших значениях этого сжимающего усилия процесс переориентации варианта мартенсита происходить не будет.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-15-2024-535 от 23.04.2024).

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев А. Н. [и др.] *Ферромагнетики с памятью формы.* Успехи физических наук. 2003. Т. 173. № 6. С. 577–607.
2. Heczko O., Straka L. *Temperature dependence and temperature limits of magnetic shape memory effect.* J. Appl. Phys. 2003. V. 94. № 11. P. 7139–7143.
3. Heczko O. *Magnetic shape memory effect and magnetization reversal.* J. Magn. Magn. Mater. 2005. V. 290–291. P. 787–794.
4. Роговой А. А., Столбова О. С., Столбов О. В. *Численное моделирование эволюции магнитной микроструктуры в сплавах Гейслера.* ПМТФ. 2021. Т. 62. С. 195–207.
5. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. *Microstructural model of the behavior of a ferroalloy with shape memory in a magnetic field.* Mech. Adv. Mater. Struct. 2024. V. 32. P. 387–406.
6. Rogovoy A. A., Stolbova O. S. *An approach to describe the twinning and detwinning processes of the martensitic structure in ferromagnetic alloy with shape memory in magnetic and force fields.* Mech. Adv. Mater. Struct. 2024. P. 1–21.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФЗНОГО СЖИМАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ С ПОВЕРХНОСТНЫМ НАТЯЖЕНИЕМ

Е. И. Роменский[1] , *И. М. Пешков*[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*
[2]*Университет Тренто, Тренто, Италия*

При моделировании течений несмешивающихся жидкостей возникает необходимость учёта влияния поверхностного натяжения на свойства течения, например в дисперсных смесях, пузырьковых жидкостях или в течениях с фазовыми превращениями. Границы раздела между компонентами смеси кроме поверхностного натяжения могут обладать инерционным колебательным движением (колебания пузырьков/капель), что также оказывает влияние на течение. Для описания упомянутых эффектов предлагается новая модель многофазной смеси жидкостей, применимая как для течений с выделенными границами раздела фаз, так и для течений с непрерывно распределённым поверхностным натяжением, учитываемом на континуальном уровне.

В настоящее время существует два альтернативных подхода к решению задач с поверхностным натяжением, которые основаны либо на выделении границы раздела фаз, либо на её представлении в виде диффузной (размазанной) границы (см., например, [1, 2]). Выделение границы предполагает рассматривать её как гиперповерхность нулевой толщины, разделяющую чистые фазы, и любые физические граничные процессы (например фазовый переход, теплоперенос и т. д.) должны быть представлены как дополнительные эффекты на границе раздела.

В подходах, использующих диффузные границы, вводятся новые переменные состояния, представляющие границу раздела как узкую зону смешивания, в которой сосуществуют все компоненты смеси. При этом дополнительные физические эффекты должны быть добавлены путём связывания физических переменных, определяющих диффузную границу с другими физическими полями на уровне определяющих уравнений и замыкающих соотношений. Предложенная модель основана именно на втором подходе. Подчеркнём, что формулируется модель полностью неравновесной смеси, в которой переменные состояния фаз (давления, скорости и т. д.) независимы и различимы внутри элемента смеси. Переменные состояния могут релаксировать до общих для обеих фаз значений только в окрестности термодинамического равновесия, но при этом можно построить различные упрощённые модели, например модели с одним давлением и односкоростные модели. Отметим, что приближение одного давления широко используется в моделях поверхностного натяжения с диффузной границей раздела фаз [3–5]. Возникает вопрос: можно ли включить поверхностное натяжение в модель с диффузной границей раздела двух жидкостей без предположения о равновесном давлении фаз? Мы формулируем такую модель в рамках теории симметрических гиперболических термодинамически согласованных (СГТС) уравнений. Для двухфазных течений формулировка СГТС уравнений была впервые предложена в [6], а затем получила развитие в серии статей [7–9].

Для моделирования поверхностного натяжения в течении несмешивающихся жидкостей требуется информация о поверхностях раздела. Общепринятый подход состоит в использовании скалярного параметра – функции цвета (color function) – для описания поверхностей раздела, который даёт возможность определить континуальные характеристи-

ки сил поверхностного натяжения (см., например, [3]). Параметр принимает значение 0, если точка в среде принадлежит одной из фаз, и значение 1, если точка принадлежит другой фазе. Распределение поверхностей (плотность площади поверхности границ раздела в единице объёма и их усреднённая ориентация на континуальном уровне) может характеризоваться градиентом поля функции цвета, а силы поверхностного натяжения характеризуются тензором, образованным этим вектором.

В СГТС модели, как и во всех двухфазных моделях, ключевой переменной состояния при представлении границ раздела между фазами является объёмная доля α одной из фаз смеси (объёмная доля второй фазы определяется как $1-\alpha$). В элементе смеси объёмная доля может изменяться как за счёт изменения термодинамического состояния составляющих (например вследствие теплового расширения), так и при втекании и вытекании фазы из элемента смеси. Эти процессы в стандартной СГТС модели двухфазного течения учитываются путём адвективного слагаемого и диссипативного источника в уравнении эволюции объёмной доли:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v_j \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = \mathcal{F}, \tag{1}$$

где v_j – скорость смеси, $\mathcal{F}$ – диссипативный источник релаксации давления.

В представленной формулировке в качестве функции цвета оказывается естественным выбрать объёмную долю α, которая как раз принимает значения 0 и 1 в зависимости от принадлежности точки среды к той или иной фазе. Для определения распределения поверхностей в элементе среды также будем основываться на нелокальном описании сплошной среды с использованием некоторого вектора B_k, пропорционального вектору градиента объёмной доли $\nabla\alpha$ и стремящегося к нему в некотором релаксационном пределе. В соответствии с формализмом теории СГТС уравнений [10], для описания состояния среды следует ввести парную переменную, скаляр D, и уравнение для неё. Переменная состояния D как раз и описывает инерциальные эффекты динамики межфазных границ.

В итоге полная СГТС система двухфазного течения, сформулированная в [7–9], должна быть дополнена парой уравнений для B_k и D, и вместо одного уравнения для объёмной доли (1) СГТС система будет содержать

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho\alpha v_k}{\partial x_k} = -\frac{1}{\delta}\,\rho E_D,\\
&\frac{\partial \rho D}{\partial t} + \frac{\partial (\rho D v_k + \rho E_{B_k})}{\partial x_k} = \frac{1}{\delta}\,\rho E_\alpha - \frac{1}{\varepsilon}\,\rho E_D,\\
&\frac{\partial B_k}{\partial t} + \frac{\partial (B_l v_l + E_D)}{\partial x_k} + v_l\left(\frac{\partial B_k}{\partial x_l} - \frac{\partial B_l}{\partial x_k}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь ρ – плотность смеси, E – обобщённая внутренняя энергия. Правые части уравнений описывают диссипативные и дисперсионные эффекты, возникающие вблизи границ раздела фаз путём взимодействия термодинамических сил E_D, E_α – производных обобщённой внутренней энергии по переменным состояния. Параметры δ, ε ответственны за процессы релаксации давлений фаз и за силы поверхностного натяжения. Полная система уравнений двухфазного течения, использующая приведённые выше уравнения (2), является термодинамически согласованной, для неё выполнены законы сохранения энергии и возрастания энтропии. Отметим, что в уравнениях импульса смеси появляется дополнительный тензор напряжений, связанный с поверхностным натяжением. Подчеркнём также, что в приведённой выше системе правые части имеют антисимметричные члены, которые не нарушают закон сохранения энергии.

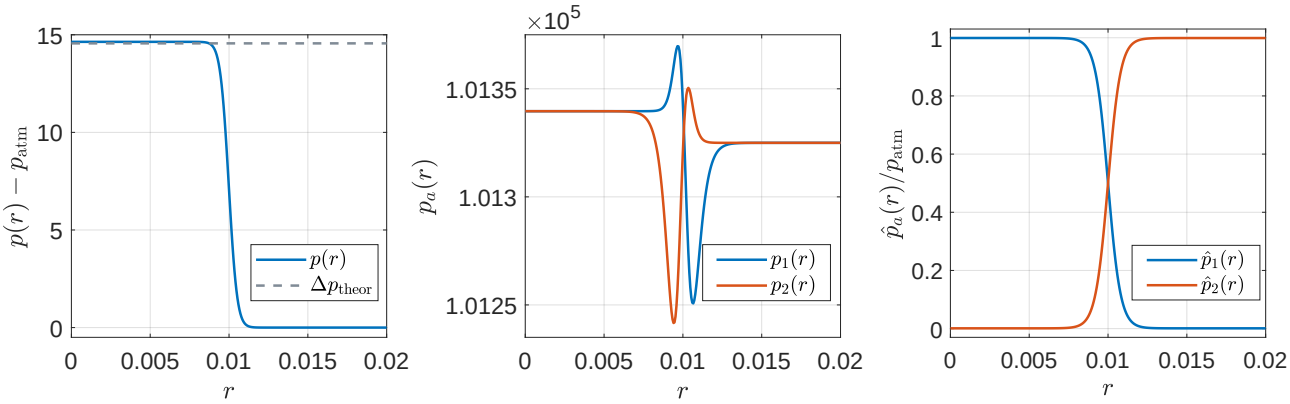
Сформулированная СГТС модель является гиперболической и описывает эффекты поверхностного натяжения как на континуальном уровне, так и для выделенной диффузной границы раздела фаз. Введённые дополнительные переменные состояния добавляют в модель дополнительную скорость распространения возмущений, связанную с так называемыми капиллярными волнами.

Асимптотический анализ при малых параметрах δ, ε показывает, что на континуальном уровне выполнено соотношение между давлениями фаз

$$p_1 - p_2 = \sigma \frac{\partial}{\partial x_k} \delta \frac{\partial \alpha}{\partial x_k},$$

где σ – коэффициент, содержащийся в обобщённой внутренней энергии, характеризующий скорость капиллярных волн. Это соотношение при $\delta \sim ||\nabla \alpha||^{-1}$ можно трактовать как закон Юнга – Лапласа для силы поверхностного натяжения.

Рассмотрен пример стационарного сферического пузырька газа в жидкости с интерфейсом, представленным в виде диффузной области, который показывает применимость модели к описанию смесей с выделенными границами раздела. На рисунках представлены (слева направо) давление смеси $p(r) = \alpha p_1(r) + (1-\alpha) p_2(r)$, давления фаз $p_1(r)$, $p_2(r)$ и парциальные давления $\alpha p_1(r)$, $(1-\alpha) p_2(r)$ для стационарного пузырька воздуха с радиусом $R = 0.01$ в воде при характерной ширине размазывания диффузной границы $h = 0.005$.



Следует ещё отметить, что антисимметричные источниковые члены в (2) приводят к дисперсии волновых полей, исследование которой представляется интересной задачей.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

ЛИТЕРАТУРА

1. Popinet S. *Numerical models of surface tension.* Annual Review of Fluid Mech. 2018. V. 50. № 1. P. 49–75.
2. Saurel R., Pantano C. *Diffuse-interface capturing methods for compressible two-phase flows.* Annual Review of Fluid Mech. 2018. V. 50. № 1. P. 105–130.
3. Brackbill J., Kothe D., Zemach C. *A continuum method for modeling surface tension.* J. Comput. Phys. 1992. V. 100. № 2. P. 335–354.
4. Perigaud G., Saurel R. *A compressible flow model with capillary effects.* J. Comput. Phys. 2005. V. 209. № 1. P. 139–178.

5. Chiocchetti S. [et al.] *High order ADER schemes and GLM curl cleaning for a first order hyperbolic formulation of compressible flow with surface tension.* J. Comput. Phys. 2021. V. 426. P. 109898.
6. Romensky E. I. *Hyperbolic systems of thermodynamically compatible conservation laws in continuum mechanics.* Mathem. Comput. Model. 1998. V. 28. № 10. P. 115–130.
7. Romenski E., Toro E. F. *Compressible two-phase flows: Two-pressure models and numerical methods.* Comput. Fluid Dyn. J. 2004. V. 13. P. 1–30.
8. Romenski E., Resnyansky A. D., Toro E. F. *Conservative hyperbolic formulation for compressible two-phase flow with different phase pressures and temperatures.* Quart. Appl. Mathem. 2007. V. 65. № 2. P. 259–279.
9. Romenski E., Drikakis D., Toro E. *Conservative models and numerical methods for compressible two-phase flow.* J. Sci. Comput. 2010. V. 42. № 1. P. 68–95.
10. Peshkov I. [et al.] *Continuum mechanics and thermodynamics in the Hamilton and the Godunov-type formulations.* Continuum Mech. Thermodyn. V. 30. № 6. P. 1343–1378.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ БЛОЧНОЙ СРЕДЫ

О. В. Садовская, В. М. Садовский

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Разработан эффективный численный метод для решения двумерных задач динамики блочной среды с прямоугольными деформируемыми блоками и тонкими податливыми прослойками. Движение блоков рассматривается в рамках модели упругопластической среды Прандтля – Рейсса, которая формулируется на основе вариационного неравенства термодинамического принципа Мизеса максимальной пластической диссипации энергии. В прослойках учитываются упругие, вязкие и пластические деформации материала. При выполнении критерия разрушения расслоившаяся часть прослойки моделируется как поверхность идеального контакта без трения. Контактное взаимодействие описывается в рамках точной постановки граничных условий контакта в виде вариационного неравенства, гарантирующего непроникание берегов образовавшейся трещины и неотрицательность контактного давления. Для учёта самоуравновешенных начальных напряжений в блоках, обусловленных технологическим процессом предварительной обработки, используются различные варианты функции напряжений Эри. Проведены численные эксперименты, результаты которых могут служить обоснованием механизма формирования самоподдерживающейся волны разрушения при импульсном нагружении предварительно напряжённого стекла ячеистой (блочной) структуры за счёт высвобождения запасённой энергии начальных напряжений.

Термин «волна разрушения» появился в 1960-х годах, когда была выдвинута гипотеза о принципиальной возможности протекания процесса фрагментирования материала в относительно тонком слое, распространяющемся с определённой скоростью. К числу первых публикаций по математическому моделированию волн разрушения относятся работы Дж. Эшелби, Г. И. Баренблатта, Р. Л. Салганика, Г. П. Черепанова, Б. В. Кострова. Считалось, что такие волны реализуются только при наличии растягивающих напряжений на некоторых площадках в неразрушенном материале и соответствующих этим напряжениям растягивающих деформаций. В конце 1980-х годов были экспериментально обнаружены волны разрушения в батавском стекле в условиях сжатия [1]. Впоследствии этот факт был многократно подтверждён [2]. Было установлено, что основной причиной появления самоподдерживающихся волн разрушения являются предварительные напряжения, которые формируются на поверхности стекла на стадии изготовления, и большое количество поверхностных микротрещин. По результатам экспериментов скорость волны разрушения значительно меньше скоростей продольной и поперечной упругих волн и зависит от уровня напряжений за фронтом волны нагружения [3].

Разработанные авторами математическая модель блочной среды с учётом нелинейных эффектов деформирования (пластичности, образования трещин, контактного взаимодействия блоков) и алгоритм численной реализации модели подробно описаны в [4, 5]. Компьютерная программа для высокопроизводительных систем кластерной архитектуры, реализующая алгоритм, зарегистрирована в Роспатенте [6].

Процесс зарождения трещин в закалённом стекле на стадии затвердевания расплава во многом носит случайный характер. Поэтому при моделировании начальной системы

трещин в прослойках идеализированной блочной среды использовалась стандартная компьютерная программа – датчик случайных чисел, равномерно распределённых на интервале (0, 1). Для имитации неравномерного распределения, близкого к нормальному, по каждой из координат применялась процедура повторного обращения к датчику случайных чисел с последующим усреднением полученных значений. За счёт масштабирования интервалы изменения усреднённых значений приводились к линейным размерам блочного массива по соответствующим координатам. В результате при однократном применении алгоритма случайным образом выпадала одна из точек пересечения горизонтальной и вертикальной прослоек, из которой вдоль сторон соседних блоков проводился надрез. Направление надреза (влево, вправо, вверх или вниз) также выбиралось с помощью датчика случайных чисел по интервалу попадания случайного числа в один из четырёх равных подынтервалов разбиения интервала (0, 1). Далее обращение к алгоритму повторялось. Число трещин – надрезов задавалось процентным отношением к общему числу прослоек в массиве.

Если ξ_k $(k = 1, 2, ...)$ – последовательность случайных величин с равномерным распределением на (0, 1) (математическое ожидание каждой из них равно 1/2, дисперсия – 1/12), то, согласно центральной предельной теореме, усреднённая случайная величина $\bar{\xi}_m = m^{-1} \sum_{k=1}^{m} \xi_k$ при больших m имеет распределение, близкое к нормальному распределению Гаусса – Лапласа, с математическим ожиданием 1/2 и дисперсией $1/(12\,m)$. Поэтому применяемый алгоритм с ростом m приводит к локализации зоны разрушения в центре массива. На рис. 1 схематически представлено распределение 5 %-ной системы трещин в прослойках массива из 80×80 блоков, полученное с помощью описанного алгоритма при $m = 3$ и $m = 7$.

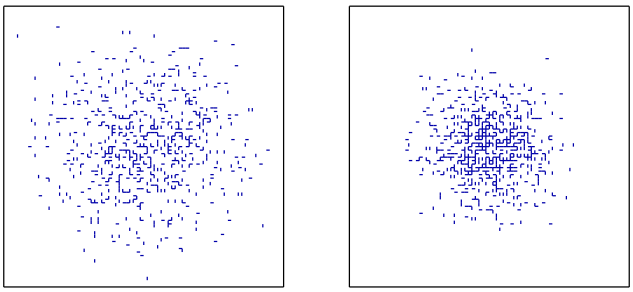


Рис. 1: Распределение трещин в блочном массиве ($m = 3$ слева и $m = 7$ справа)

Для учёта предварительных напряжений в стекле в процессе закалки разработана специальная имитационная модель. Задача определения соответствующей функции напряжений Эри сводится к минимизации интеграла Кастильяно, учитывающего распределение объёмной температурной деформации $\varepsilon_0(x_1, x_2)$ в области Ω:

$$J = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{1-\nu}{4\,\mu} \big(\Delta U\big)^2 + (1+\nu)\,\varepsilon_0\,\Delta U \right) dx_1\,dx_2$$

(μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона). Минимум ищется на множестве функций напряжений $U(x_1, x_2)$, удовлетворяющих на границе Γ области Ω условиям свободной поверхности: $U = \partial U/\partial n = 0$. Вариационное уравнение Эйлера в задаче минимизации принимает следующий вид:

$$\Delta^2 U = -\,2\,\mu\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\Delta\varepsilon_0\,.$$

С помощью интегральной формулы Грина

$$2\,\pi\,\varepsilon_0(x_1,x_2) = \int\limits_\Gamma \varepsilon_0(\xi_1,\xi_2)\,\frac{\partial}{\partial n}\,G(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\,ds - \int\limits_\Gamma \frac{\partial\varepsilon_0(\xi_1,\xi_2)}{\partial n}\,G(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\;ds + \\ + \iint\limits_\Omega \Delta\,\varepsilon_0(\xi_1,\xi_2)\,G(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\;d\xi_1\,d\xi_2\,,$$

где $G(x_1,x_2) = -\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ – функция Грина для двумерного уравнения Пуассона, предложены различные варианты задания функции влияния $\theta = \Delta\varepsilon_0$ для описания неоднородности распределения остаточной температурной деформации материала. Для примера на рис. 2 приведены поля линий уровня нормального напряжения σ_{11}, касательного напряжения σ_{12} и объёмной деформации ε_0 для распределения с постоянной функцией влияния. Деформация нормирована по отношению к предельной деформации стекла $\varepsilon = 0.1\,\%$, при которой в нем образуются микроповреждения. Расчётный массив по-прежнему состоит из 80×80 блоков.

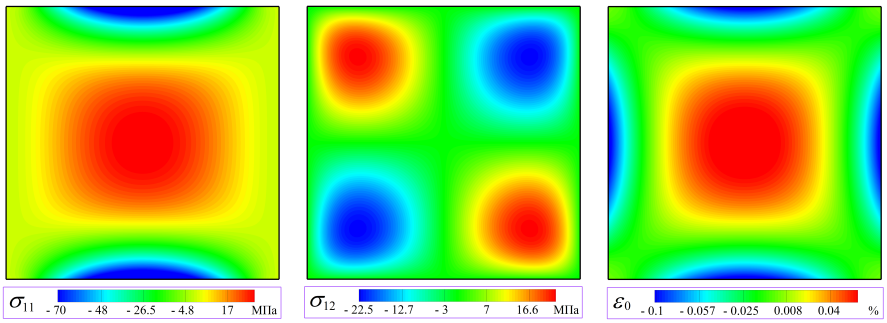


Рис. 2: Линии уровня напряжений σ_{11}, σ_{12} и объёмной деформации ε_0 (слева направо)

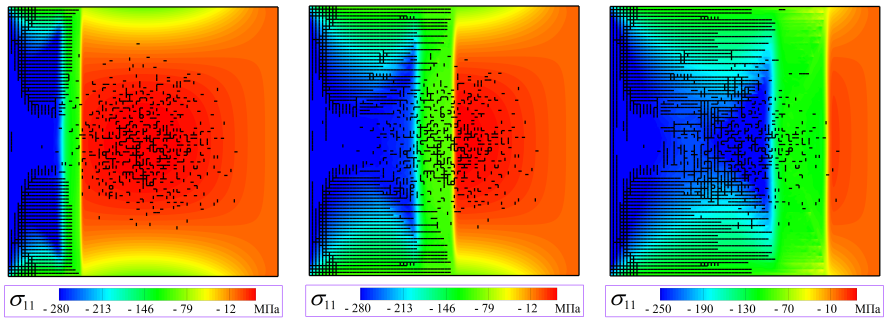


Рис. 3: Линии уровня напряжения σ_{11} и распределение трещин в блочном массиве (три последовательных момента времени с равными интервалами между ними)

На рис. 3 показан процесс распространения волн разрушения в предварительно напряжённом блочном массиве, состоящим из 80×80 блоков размером 0.625×0.625 мм (общий размер расчётной области с учётом прослоек – 5.2×5.2 см). Задана 5 %-ная система трещин в прослойках, $m = 5$. Волновое движение вызвано действием равномерно распределённого давления $p = 300$ МПа на левой границе массива. Правая граница неподвижна, горизонтальные границы свободны от напряжений. Расчёты выполнены на 80 процессорах кластера ИВМ СО РАН.

Полученные результаты служат подтверждением механизма пластичности и разрушения в иерархически организованных структурах за счёт сочетания деформации сдвига с вращением мезообъёмов структурно-неоднородной среды, сформулированного и обоснованного академиком В. Е. Паниным [7].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

ЛИТЕРАТУРА

1. Канель Г. И., Молодец А. М., Дремин А. Н. *Исследование особенностей деформирования стекла в интенсивных волнах сжатия.* Физика горения и взрыва. 1977. Т. 13. № 6. С. 906–912.
2. Rasorenov S. V. [et al.] *The fracture of glass under high-pressure impulsive loading.* High Pres. Res. 1991. V. 6. Iss. 4. P. 225–232.
3. Chaudhri M. M. *Self-sustained fracture waves in soda-lime glass.* Mater. Sci. Forum. 2010. V. 662. P. 95–104.
4. Sadovskaya O., Sadovskii V. *Mathematical modeling in mechanics of granular materials.* Advanced Structured Materials. Heidelberg, New York, Dordrecht, London : Springer, 2012. V. 21.
5. Sadovskaya O. V., Sadovskii V. M. *Mathematical modelling of fracture waves in a blocky medium with thin compliant interlayers.* Phil. Trans. Royal Soc. A: Mathem., Phys. Engin. Sci. 2024. V. 382. Iss. 2277. Art. 20230305.
6. Садовский В. М., Садовская О. В., Ченцов Е. П. *Программный комплекс для численного моделирования динамических процессов в многоблочных средах на кластерных системах (2Dyn_Blocks_MPI).* Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016615178 от 17.05.2016. RU ОБПБТ № 6 (116) от 20.06.2016. М. : ФИПС, 2016.
7. Панин В. Е., Лихачев В. А., Гриняев Ю. В. *Структурные уровни деформации твердых тел.* Новосибирск : Наука, 1985.

О ВЕЕРНОМ МЕХАНИЗМЕ ТАРАСОВА ОБРАЗОВАНИЯ РАЗЛОМОВ В ЗЕМНОЙ КОРЕ

В. М. Садовский, О. В. Садовская

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Наряду с медленно растущими трещинами в земной коре, которые приводят к формированию тектонических разломов, в твёрдых горных породах на глубинах порядка десятка километров наблюдаются сдвиговые разрывы, распространяющиеся с аномально высокими скоростями, сравнимыми со скоростью поперечных упругих волн. Такие разрывы были зарегистрированы в натурных наблюдениях [1, 2] и являются предметом исследований в лабораторных экспериментах [3].

Для объяснения сдвиговых разрывов с сейсмическими скоростями Б. Г. Тарасов предложил оригинальный механизм [4, 5]. По его представлениям, в вершине разрыва под действием бокового давления, препятствующего распространению основной трещины, образуется веерная структура, состоящая из домино–пластин. Пластины поворачиваются при возникновении относительно небольших касательных напряжений в окружающем горном массиве и, что самое главное, сохраняют свою целостность при вращении. Образуется веерная система, схематично изображенная на рис. 1.

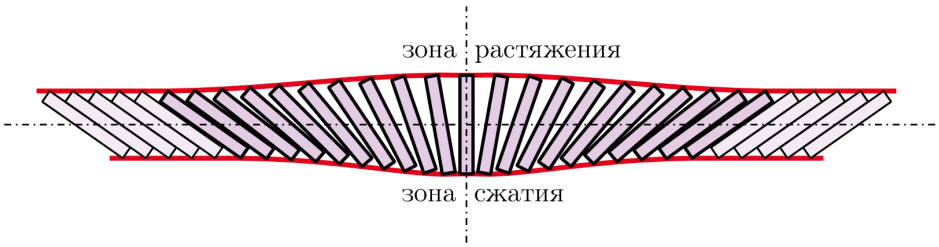


Рис. 1: Конфигурация самоуравновешенного веера

В отсутствие трения веерная система находится в положении безотносительного равновесия и может свободно перемещаться вдоль уже образовавшегося разлома. Силы трения, к которым относится сила сопротивления отрыву пластин в вершине веера, препятствуют такому перемещению. Под действием дополнительных напряжений, обусловленных тектоническими процессами, веер выходит из равновесия и начинает двигаться как волна, развивая высокую скорость. Начало такого движения происходит при пороговом значении касательного напряжения, при котором движущая сила веера оказывается равной силе трения.

Математическая модель веерного механизма Тарасова разработана в [6]. Там же в плоской постановке решена статическая задача о равновесии двух бесконечных упругих блоков, взаимодействующих через тонкую прослойку – веерную структуру. С помощью метода суперпозиции дислокаций задача приведена к двум сингулярным интегральным уравнениям для распределений вектора Бюргерса и распорного давления, численное решение которых позволило построить поля напряжений и перемещений в блоках вблизи веера, играющие роль исходных данных при решении динамической задачи. В [7] проведено численное моделирование страгивания и последующего ускоренного движения веерной системы в рамках двумерных уравнений динамической теории упругости.

Учитывая, что численное моделирование динамики веерной системы на больших временах оказалось неподъёмной задачей даже для высокопроизводительных вычислений, в настоящем докладе при её решении применяется упрощённая математическая модель краевой дислокации, движущейся с постоянной скоростью. Такое движение является стационарным по аналогии с движением бегущей волны. Упрощение модели состоит в том, что динамика образования нового тектонического разлома рассматривается в крупномасштабном приближении, на котором веер, имеющий конечную длину, превращается в точку – вершину дислокации (рис. 2). Но в этой точке на более мелком масштабе происходят деформационные процессы, из-за которых в вершине действует активная сила, продвигающая дислокацию с высокой скоростью.

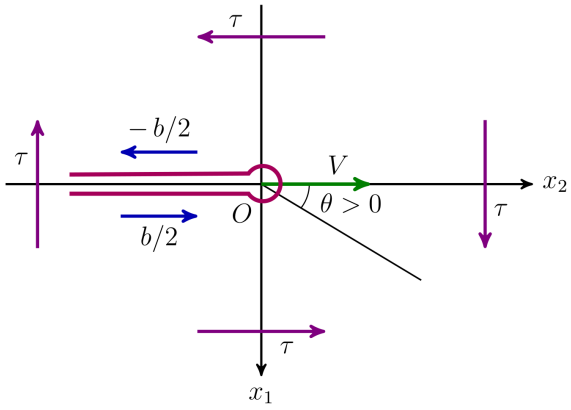


Рис. 2: Бегущая дислокация (b – модуль вектора Бюргерса, V – скорость, θ – полярный угол, τ – касательное напряжение)

Метод решения задачи о бегущей дислокации основан на разложении векторного поля перемещений на сумму потенциального и соленоидального полей. В пространственных задачах $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}$, где φ и $\boldsymbol{\psi}$ – скалярный и векторный потенциалы. В приближении плоской деформации и плоского напряженного состояния

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\,, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\,.$$

При таком разложении система однородных уравнений Ламе, описывающая движение упругой среды, в пространственном случае приводится к виду

$$\boldsymbol{\nabla}\Big(c_1^2\,\Delta\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big) + \boldsymbol{\nabla} \times \Big(c_2^2\,\Delta\boldsymbol{\psi} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\Big) = \boldsymbol{0}\,,$$

в плоском случае

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = 0\,, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0 \quad \Big(\Phi = c_1^2\,\Delta\varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\,, \quad \Psi = c_2^2\,\Delta\psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\Big)\,. \tag{1}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости продольных и поперечных волн, ρ – плотность, λ и μ – параметры Ламе. Уравнения (1) представляют собой условия Коши – Римана. Они интегрируются методами ТФКП.

Построенное решение играет важную роль в исследовании одного из наиболее интересных и до конца не изученных процессов, происходящих на глубинах сейсмической активности. Он состоит в сверхбыстром распространении сдвиговых разрывов, способствующих

образованию новых тектонических разломов в земной коре и играющих роль триггерного механизма крупных сейсмических событий. Из-за экстремально высокой динамики экспериментальное исследование этого процесса на образцах горной породы в лабораторных условиях встречает большие трудности, поэтому едва ли не единственным достоверным методом исследования является метод математического моделирования. На крупном масштабе в рамках приближения бегущей дислокации получена зависимость скорости вершины дислокации от удельной энергии, затрачиваемой на продвижение вершины. Для определения скорости разрыва необходимо задать величину энергии, которая, в свою очередь, зависит от характеристик прочности горной породы и от внешних напряжений, вынуждающих движение. Но чтобы вычислить эту энергию, необходимо разработать детальную модель деформационных процессов в вершине дислокации.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ortlepp W. D. *Rock fracture and rockbursts: An illustrative study.* Monograph Series M9. Johannesburg: South African Institute of Mining and Metallurgy, 1997.
2. McGarr A. F., Simpson D., Seeber L. *Case histories of induced and triggered seismicity.* In: *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology*, Part A. Ser.: Int. Geophysics. V. 81. Chapt. 40. P. 647–661. London : Elsevier, 2002.
3. Rosakis A. J., Samudrala O., Coker D. *Cracks faster than the shear wave speed.* Sci. 1999. V. 284. Iss. 5418. P. 1337–1340.
4. Tarasov B. G. *Hitherto unknown shear rupture mechanism as a source of instability in intact hard rocks at highly confined compression.* Tectonophysics. 2014. V. 621. P. 69–84.
5. Tarasov B. G. *New physics of supersonic ruptures.* Deep Undergr. Sci. Eng. 2023. V. 2. Iss. 3. P. 207–244.
6. Tarasov B. G. [et al.] *Modelling the static stress-strain state around the fan-structure in the shear rupture head.* Appl. Math. Model. 2018. V. 57. P. 268–279.
7. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. *Supercomputing analysis of fan-shaped waves in the Earth's crust at the depths of seismic activity.* Mater. Phys. Mech. 2019. V. 42. Iss. 3. P. 330–339.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТОЛИСТОВОЙ СТАЛИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ: РАСЧЁТ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Н. К. Салихова[1], *Д. С. Дудин*[1], *И. Э. Келлер*[1], *Д. С. Петухов*[1], *А. Б. Максимов*[2]

[1]*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*
[2]*Керченский государственный морской технологический университет*

В настоящей работе рассматривается численное моделирование процесса ускоренной односторонней закалки листового металлопроката толщиной 14,4 мм, подвергнутого трём различным технологиям упрочняющей обработки. Материалом исследования выбрана углеродистая и низколегированная сталь А32. Сначала толстолистовые прокаты выдерживались в печи в течение 21 минуты при температуре 900 °C. Затем в лабораторной установке верхняя торцевая поверхность прокатов охлаждалась водой со скоростью 50-80 °C/с [1, 2]. При этом две заготовки перед термообработкой подвергались трёхточечному испытанию на изгиб с максимальным отклонением центра заготовки до 50 мм относительно нейтральной плоскости, что составляет примерно 3,9 % деформации. Затем осуществлялось их одностороннее ускоренное охлаждение водой с разных сторон – выгнутой или вогнутой, далее после охлаждения образцы правились на прессе. Для сравнительного анализа одна заготовка подвергалась односторонней закалке без предварительного изгиба. Далее из средней части каждого из трёх термически обработанных металлопрокатов вырезался образец размером $300 \times 100 \times 14,4$ мм с учётом требований стандарта [3].

Для численного исследования процесса одностороннего охлаждения металлопроката из углеродистой и низколегированной стали А32 использовался метод конечных элементов, реализованный на базе программного комплекса COMSOL Multiphysics. Процесс закалки включает моделирование трёхточечного изгиба в случае предварительной механообработки, переноса тепла и расчёта распределения остаточных напряжений в образце. В расчётах учитывался теплообмен с окружающей средой (воздухом), который происходит на боковой и нижней поверхностях образца при заданном коэффициенте теплопередачи, равном 15 Вт/м$^2\cdot$°C. Температура окружающей среды приравнивалась температуре охлаждающей среды и принималась равной 20 °C. В вычислительном эксперименте закалочная среда явно не моделируется, а учитывается в виде зависимости коэффициента теплообмена от температуры между поверхностью образца и закалочной средой. В начальный момент времени температура образца считается равной 900 °C в любой точке расчётной области. Для более точного прогнозирования распределения остаточных напряжений по толщине слоя в расчётной модели теплофизические и механические свойства стали А32 задавались в виде нелинейных функций, зависящих от температуры. Для моделирования пластического изгиба в численный расчёт вводились начальные собственные деформации в качестве источника остаточных напряжений. Моделью упрочнения, позволяющей описать поведение судовой стали, выбрана модель Джонсона – Кука, в которой напряжение пластического течения вычисляется по формуле

$$\sigma = \left(A + B\bar{\varepsilon}_p^n\right)\left(1 + C\ln\dot{\varepsilon}^*\right)\left[1 + (T^*)^m\right], \quad T^* = \frac{T - T_0}{T_m - T_0},$$

где $\bar{\varepsilon}_p$ — эффективная пластическая деформация; $\dot{\varepsilon}^* = \dot{\bar{\varepsilon}}_p/\dot{\varepsilon}_0$ – эффективная скорость пластической деформации; $\dot{\varepsilon}_0 = 1$ с$^{-1}$; A, B, C, n, m – константы, зависящие от свойств материала; T_0, T_m – температуры окружающей среды и плавления материала соответственно.

В результате проведённых вычислительных расчётов были получены распределения температуры в образце, возникающие остаточные напряжения и пластические деформации. Установлено, что в случае применения технологии термоупрочнения с предварительным трёхточечным изгибом металлопрокатов на прессе в поверхностном (нижнем и верхнем) слое формируется слой сжимающих остаточных напряжений, порождаемый пластическими деформациями растяжения. Для образца без пластического изгиба на охлаждаемой поверхности возникают пластические деформации растяжения на глубине примерно 1,4 мм, обусловленные действием градиента температуры по толщине слоя и структурно-фазовых превращений, а во внутренних слоях – пластические деформации сжатия, которые порождают растягивающие остаточные напряжения. При этом собственные деформации сосредоточены от верхней торцевой поверхности до приблизительно чуть больше половины толщины проката. Для оценки достоверности результатов вычислительных экспериментов проведена серия экспериментов по определению распределения остаточных напряжений по толщине листа методом разрезания [4], а вблизи поверхности (нижней и верхней) образца – методом сверления отверстий. Полученные на основе экспериментов результаты качественно подтвердили характер распределения пластической деформации и остаточных напряжений, полученных при математическом моделировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимов А. Б., Шевченко И. П., Ерохина И. С. *Толстолистовой прокат с изменяющимися механическими свойствами по толщине.* Известия вузов. Черная металлургия. 2019. Т. 62. № 8. С. 587–593.
2. Максимов А. Б., Пронина Ю. Г. *Исследование изгиба толстолистового проката с градиентом прочностных свойств по толщине.* Известия вузов. Черная металлургия. 2022. Т. 65. № 1. С. 21–27.
3. ГОСТ 14019-80 *Металлы. Методы испытания на изгиб.* ПМТФ. 1993. Т. 34. № 2. С. 24–31.
4. Келлер И. Э. [и др.] *Способ определения остаточных напряжений в ребре на жестком основании.* Патент на изобретение № RU 2797771 C1 от 08.06.2023.

ФОРМИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА В ТАЮЩЕМ СНЕГЕ ПРИ ОБЪЁМНОМ ПРОГРЕВЕ ПОТОКОМ СОЛНЕЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Н. Сибин[1,2,3], *Т. А. Пекарская*[3]

[1]*Новосибирский национальный исследовательский государственный университет*
[2]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*
[3]*Алтайский государственный университет, Барнаул*

В данной работе на основе уравнений неизотермической двухфазной фильтрации рассматривается задача формирования теплового режима в тающем снеге при объёмном прогреве потоком солнечного излучения. Разработан алгоритм численного решения одномерной задачи. Коэффициент теплопроводности снега и зависимость для интенсивности фазового перехода верифицированы в работах [1, 2] с помощью экспериментальных данных из литературных источников [3].

Тающий снег моделируется сплошной средой, состоящей из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и льда ($i = 3$), составляющего твёрдый пористый скелет. Фильтрация воды и воздуха в пористом ледовом скелете описывается уравнениями сохранения массы для каждой из фаз с учётом фазовых переходов, уравнениями двухфазной фильтрации и теплового баланса для трёхфазной среды [4–6]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{3} I_{ji}, \quad i = 1,2,3, \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} = 0, \tag{1}$$

$$\phi s_i(\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{\overline{k}_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1,2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \tag{2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 c_i \alpha_i\right)\frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 \alpha_i c_i \vec{u}_i\right)\nabla\theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla\theta) - \nu I_{13} + L(y). \tag{3}$$

Здесь $\vec{u}_i$ – скорость i-ой фазы; ρ_i – приведённая плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объёмной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} – интенсивность перехода массы из j-ой в i-ую составляющую в единице объёма в единицу времени; ϕ – пористость снега; s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха ($\alpha_1 = \phi s_1$, $\alpha_2 = \phi s_2$, $\alpha_3 = 1 - \phi$, $s_1 + s_2 = 1$); $K_0(\phi)$ – тензор проницаемости пористой среды; $\overline{k}_{0i}$ – фазовые проницаемости ($\overline{k}_{0i} = \overline{k}_{0i}(s_i) \geq 0$, $\overline{k}_{0i}\big|_{s_i=0} = 0$); $\mu_i = \text{const} > 0$ – динамические вязкости; p_i – давления фаз; p_c – капиллярное давление, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta$, $i = 1,2,3$), $c_i = \text{const} > 0$ – удельная теплоёмкость i-ой фазы при постоянном объёме; $\nu = \text{const} > 0$ – удельная теплота плавления льда; λ_c – теплопроводность снега, $L(y)$ – функция теплового источника, описывающая поглощение солнечной радиации. Ось y направлена вертикально вниз.

Система (1)–(3) дополняется гипотезами $\vec{u}_3 = 0$ (частицы льда неподвижны, структура льда как сплошной среды не уточняется [5]), $\rho_i^0 = \text{const} > 0$, $i = 1,2,3$; $\rho_3^0 < \rho_1^0$; $s_1 \equiv s$ – водонасыщенность ($1 - s = s_2$).

В рассматриваемом подходе важным моментом является корректное определение интенсивностей фазового перехода лёд – вода и лёд – воздух. Следует отметить, что для описания процессов испарения и конденсации молекул пара на межфазной границе «жидкость–пар» используется классическая формула Герца – Кнудсена – Ленгмюра [7, с. 88] и её модификации. В соответствии с формулой интенсивность фазового перехода пропорциональна разности давления жидкости на фазовой границе и давления насыщения. Аналогичный подход используется для описания процесса сублимации в снеге [8].

Для моделирования интенсивности фазового перехода лёд – вода, как правило, используется методология задачи Стефана, т. е. предполагается, что существует межфазная граница, на которой при определённой температуре скачком происходит переход льда в воду. При таком подходе не требуется задавать интенсивность фазового перехода лёд – вода. Многочисленные эксперименты показали (см., например, [9]), что в пористых средах может не быть границы фазового перехода, а, как правило, формируется достаточно большая область фазового перехода. Другой подход к процессу таяния снега подразумевает, что фазовый переход лёд – вода происходит во всей толще снежно-ледового покрова, и для описания распространения тепла нужно использовать уравнение вида (3) с соответствующей правой частью. Близкой по проблематике является задача тепломассопереноса в протаивающих (промерзающих) грунтах. Имеется ряд экспериментальных результатов по зависимости концентрации льда в пористой среде от температуры [9, 10]. В работе [11] для водонасыщенного грунта проведено сравнение модели Стефана и модели из работы [9]. Используемые здесь зависимости для интенсивности фазового перехода лёд – вода опираются на идеи работ [10, 12, 13]:

$$I_{31} \equiv I = \begin{cases} -\lambda_1 \phi \theta s, & \theta < \theta^-, \\ 0, & \theta^- \le \theta \le \theta^+, \\ \lambda_2 (\phi_g - \phi)^2 \exp[\beta(\theta - \theta^+)], & \theta > \theta^+. \end{cases}$$

Здесь θ^+ – температура плавления льда, θ^- – температура замерзания воды, β, λ_1, λ_2 – размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода.

Снег представляет собой светорассеивающую среду в достаточно широком диапазоне спектра солнечного излучения. В монографии [14] сделан обширный литературный обзор и изложена теория радиационного переноса в оптически неоднородных средах. Учёт оптических свойств среды позволяет выявить особенности формирования теплового режима при объёмном прогреве потоком солнечного излучения.

Если температура воздуха снижается до некоторого критического значения θ_{cr}, то вследствие уменьшения вклада длинноволнового излучения атмосферы поверхность будет находиться в состоянии радиационного равновесия. Таким образом, при температуре воздуха $\theta_a > \theta_{cr}$ происходит поверхностное плавление. Достаточно большой по размеру атмосферный лучистый поток обеспечивает перетекание тепла в глубь снежно-ледяного покрова, что совпадает с классической кондуктивной моделью нагрева непрозрачных материалов с образованием в глубине монотонно убывающего температурного профиля.

При достижении радиационного равновесия с температурой воздуха $\theta_a = \theta_{cr}$ вклад энергии в переизлучение с поверхности уравновешивается кондуктивным стоком тепла, расходуемым на поддержание установившегося температурного распределения, которое может иметь также экстремальный характер.

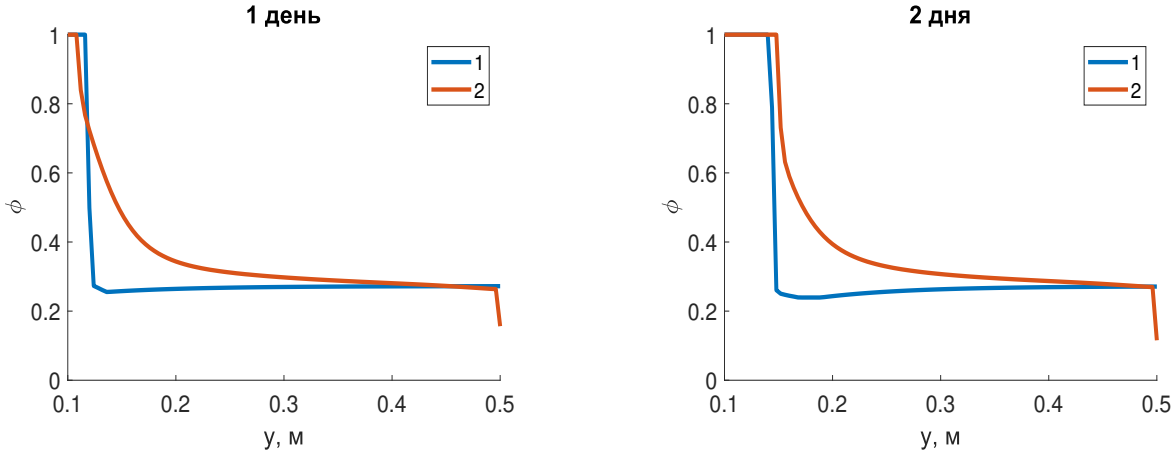
Если $\theta_a < \theta_{cr}$, то условия для поверхностного плавления отсутствуют. В этом случае

в подповерхностном слое снега и льда поглощённая солнечная энергия должна превышать поверхностное эффективное тепловое переизлучение. Это означает, что имеются энергетические возможности для кондуктивного переноса тепла и к поверхности, и в глубину из зоны «перегрева». Внутреннее объёмное поглощение солнечного излучения будет служить тепловым источником, поддерживающим состояние локального «перегрева».

Обычно при анализе теплового режима употребляются два предельных случая оптических параметров: либо непрозрачная среда с поглощением на поверхности, либо прозрачная среда с поглощением потока излучения в объёме по закону Бугера [14]. Применение предельных случаев возможно, но при определённых условиях и далеко не для всех типов снега. Иными словами, имеется обширный класс природных процессов, когда наблюдаемые теплофизические эффекты невозможно объяснить и рассчитать, оставаясь в рамках традиционных подходов. В работе [14, с. 66] для тающего снега функцию теплового источника предлагается определять следующим образом:

$$F = q_0(1 - A)b\exp(-bz).$$

Здесь $z = \max(0, y - l(y,t))$, $0 \le z \le H$, l – верхняя граница снега, H – толщина снега, b – показатель ослабления, A – альбедо слоя снега. В численных расчётах использовались параметры из таблицы 10 работы [14, с. 68]: $q_0 = 375$ Вт/м^2, $b = 14.2$ м$^{-1}$, $A = 96\,\%$ остальные параметры приведены в работах [1, 2].

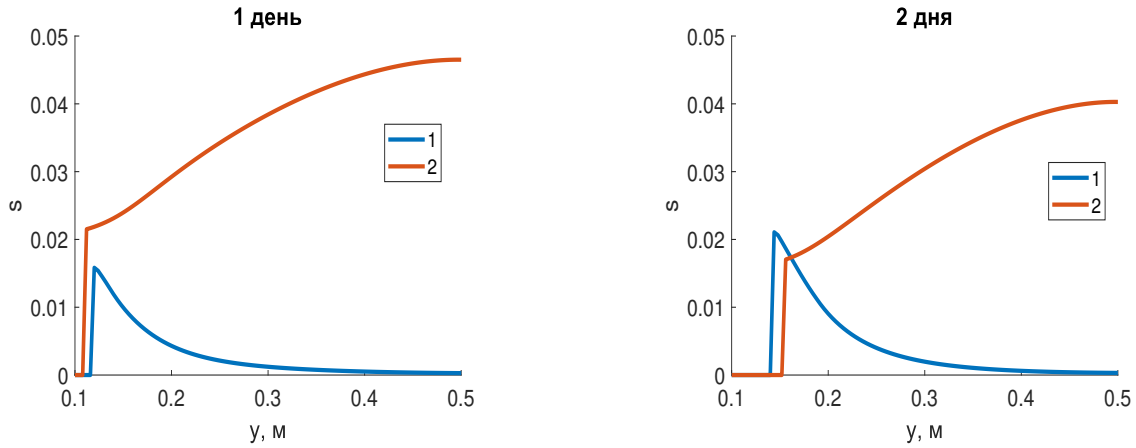


а) б)

Рис. 1: Результаты численного моделирования распределения пористости ϕ по глубине в момент времени 1 день (а), 2 дня (б). Расчёт 1 – без учёта и 2 – с учётом объёмного прогрева потоком солнечного излучения

На рисунках 1 и 2 представлены результаты численного моделирования формирования теплового режима в снеге толщиной 40 см с однородной пористостью $\phi(y,0) = 0.3$, в начальный момент времени снег был полностью сухой, $s(y,0) = 0$, а атмосферная температура отрицательная. Процесс таяния инициировался повышением атмосферной температуры и объёмным прогревом потоком солнечного излучения. На нижней границе снега поддерживалась отрицательная температура и задавалось условие непротекания, имитирующее дно контейнера со снегом. Численное моделирование показало существенное влияние прогрева потоком солнечного излучения в верхних слоях снега для пористости и

по всей области для водонасыщенности. Вода, возникшая при фазовом переходе, не успевает замерзать и скапливается на дне контейнера, что вызывает интенсивное уменьшение пористости вблизи дна (см. рис. 1, вторая линия).



а) б)

Рис. 2: Результаты численного моделирования распределения водонасыщенности s по глубине в момент времени 1 день (а), 2 дня (б). Расчёт 1 – без учёта и 2 – с учётом объёмного прогрева потоком солнечного излучения

Предложенная в данной работе математическая модель подробно описывает физику процессов фильтрации и формирования теплового режима в слое тающего (замерзающего) снега и может применяться при проектировании инфраструктуры в северных регионах, в которых вероятность затопления территорий талыми водами наиболее велика. Величина снежного покрова (снегозапас) влияет на промерзание поверхностного слоя почв и, следовательно, на его впитывающую способность и определяет соотношение между склоновым и грунтовым стоками. Поэтому моделирование состояния снежного покрова в период снеготаяния имеет важное значение при разработке методов расчётов и прогнозов гидрографов весеннего половодья. Особенно актуально использование математических моделей для северных регионов с небольшим количеством гидрологических постов и отсутствием полных рядов наблюдений на них.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер госзадания FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сибин А. Н., Папин А. А. *Тепломассоперенос в тающем снеге.* ПМТФ. 2021. Т. 62. № 1. С. 109–118.
2. Сибин А. Н., Папин А. А. *Моделирование движения растворимой примеси в тающем снеге.* ПМТФ. 2024. Т. 65. № 1. С. 58–69.
3. Waldner P. A. [et al.] *Effect of snow structure on water flow and solute transport.* Hydrological processes. 2008. V. 18. № 7. P. 1271–1290.
4. Sellers S. *Theory of water transport in melting snow with a moving surface.* Cold Regions Science and Technology. 2000. V. 2000. № 31. P. 47–57.

5. Кучмент Л. С., Демидов В. Н., Мотовилов Ю. Г. *Формирование речного стока. Физико-математические модели.* М. : Наука, 1983. 216 с.
6. Colbeck S. C. *A theory of water percolation in snow.* J. Glaciol. 1972. V. 11. № 63. P. 369–385.
7. Нигматулин Р. И. *Динамика многофазных сред. Часть 1.* М. : Наука, 1987. 464 с.
8. Thorpe A. D., Mason B. J. *The evaporation of spheres and ice crystals.* Br. J. Appl. Phys. 1996. V. 17. P. 541–548.
9. Bronfenbrener L. *Non-equilibrium crystallization in freezing porous media: Numerical solution.* Cold Regions Sci. Technol. 2013. V. 85. P. 137–149.
10. Нерсесова З. А. *Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры.* ДАН СССР. 1950. Т. 75. № 6. С. 845–846.
11. Желнин М. С. [и др.] *Экспериментальное и теоретическое исследование механических деформаций в промерзающем влагонасыщенном грунте.* Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 4. С. 19–28.
12. Колесников А. Г. *К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта.* Доклады АН СССР. 1952. Т. 82. № 6. С. 889–891.
13. Alekseeva S. V., Sazhenkov S. A. *Numerical analysis of a one-dimensional model of a meltingfreezing snowpack.* J. Comput. Engng. Mathem. 2021. V. 8. № 4. P. 17–27.
14. Красс М. С., Мерзликин В. Г. *Радиационная теплофизика снега и льда.* Л. : Гидрометеоиздат, 1990. 261 с.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПОРИСТОЙ ЛЕДОВОЙ ПЛАСТИНЕ

Т. А. Сибирякова[1], *К. Е. Найденова*[1], *К. А. Шишмарёв*[1]

[1]*Алтайский государственный университет, Барнаул*

Задачи распространения изгибно-гравитационных волн в ледовых покровах активно исследуются в последние десятилетия в связи с освоением полярных территорий. Лёд по своей природе является неоднородным, поэтому его свойства могут значительно влиять на формы прогибов ледового покрова и распределение напряжений в нём. В результате могут изменяться ледовые нагрузки, а оценки напряжений при операциях с ледовым покровом могут иметь значительные погрешности. Неоднородность льда необходимо учитывать при анализе напряжённо-деформированного состояния ледового покрова. На текущем этапе активно развиваются исследования, посвящённые анализу эффектов неоднородного льда, таких как пористость и изменение толщины. Первые расчёты по периодическим гидроупругим волнам в канале [1] с линейно изменяющейся толщиной показали, что даже небольшое линейное изменение толщины приводит к значительным изменениям в характеристиках гидроупругих волн. Расчёты по исследованию пористых пластин [2] показывают, что пористость имеет эффект демпфирования и может значительно менять распределение напряжений в ледовом покрове, что сказывается на ледовых нагрузках.

Взаимодействие гравитационных волн с пористыми структурами представляет значительный интерес. Примерами таких структур являются вертикальные волнорезы и горизонтальные плавающие или погружённые в воду пластины. Исследования таких структур обычно сосредоточены на анализе их характеристик для увеличения рассеивания энергии волны. Большинство таких задач исследуются в двумерной постановке. В работе [3] была решена задача в трёхмерной постановке. Было получено, что диссипация энергии волны из-за пористости первоначально увеличивается по мере того, как пластина становится более пористой, но достигает максимума, а затем медленно уменьшается по мере дальнейшего увеличения пористости. Модель пористого ледового покрова строилась без учёта гидростатического давления, как в случае с полностью погружённой в воду пластиной.

Линейные волны, генерируемые заданной внешней периодической нагрузкой, действующей на плавающую пороупругую пластину, были исследованы в [2]. В отличие от других моделей пороупругого плавающего льда, было сделано предположение, что скорость проникновения жидкости в плавающую пластину пропорциональна общему гидродинамическому давлению на границе раздела лёд – жидкость, включая составляющую гидростатического давления. В статье [4] было проведено сравнение между моделями в работе [3] без учёта гидростатического давления в законе Дарси и в работе [2] с полным гидродинамическим давлением в законе Дарси для двумерной задачи с плавающей пороупругой пластиной бесконечной протяжённости. Было получено, что скорость затухания волн немонотонна относительно пористости. Показано, что обе модели дают одинаковые результаты для больших частот и малых значений пористости.

В настоящей работе будут рассмотрены периодические гидроупругие волны, распространяющиеся в пороупругом ледовом покрове. Для этого необходимо вычислить дисперсионные соотношения для ледового покрова с учётом пористости. Рассматривается модель пористого льда, описываемая законом Дарси с учётом гидростатического давления.

Известно, что пористость обладает эффектом демпфирования колебаний. Наличие пористости приведёт к тому, что классические действительные дисперсионные соотношения с действительными волновыми числами и частотами не могут являться решением полученных дисперсионных уравнений. Новые решения будут соответствовать действительным волновым числам и комплекснозначным частотам (либо действительным частотам и комплексным волновым числам). Полученные дисперсионные соотношения с комплекснозначными частотами потребуются в дальнейшем для последующего решения нестационарной задачи о движении подводного тела под пористой пластиной, которую предлагается решить в рамках линейной теории гидроупругости методом преобразования Фурье вдоль пластины. В данной работе основной упор делается на вычисление и анализ дисперсионных соотношений для пористой пластины с учётом комплекснозначных частот. Предложен метод определения частот, которые исследуются в зависимости от пористости и параметров пластины. Будет изучено влияние параметров задачи на полученные моды колебаний ледового покрова и соответствующие формы прогибов льда.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-71-01096, https://rscf.ru/project/23-71-01096/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shishmarev K. [et al.] *Hydroelastic waves in a frozen channel with non-uniform thickness of ice.* Water. 2022. V. 14. № 281.
2. Zavyalova K. N., Shishmarev K. A., Korobkin A. A. *The response of a poroelastic ice plate to an external pressure.* J. Siberian Federal University. Mathem. & Phys. 2021. V. 14. № 1. P. 87–97.
3. Meylan M., Bennetts L., Peter M. *Water-wave scattering and energy dissipation by a floating porous elastic plate in three dimensions.* Wave Motion. 2017. V. 70. P. 240–250.
4. Wu Q. Y. [et al.] *Small-amplitude waves in a floating poroelastic plate forcing by vertical pitching plate.* J. Phys. Fluids. 2023. V. 35. № 117127.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА ОРИЕНТАЦИОННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ УПРОЩЁННОЙ МОДЕЛИ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА В АКУСТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

И. В. Смолехо

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В работе исследуется эффект ориентационной термоупругости, возникающий при нагревании одной из границ горизонтального жидкокристаллического слоя. Для исследования используется упрощённая динамическая модель жидкого кристалла в акустическом приближении в двумерном случае [1], описывающая механическое, температурное и электрическое воздействия. Модель включает уравнения поступательного и вращательного движений, уравнения для давления, касательного и моментных напряжений, уравнение теплопроводности; правые части уравнений движения содержат объёмные силы и момент сил, позволяющие учесть электрическое воздействие. Построен алгоритм численного решения определяющй системы, на первом этапе которого вычисляются объёмные силы и момент сил с применением метода прямых и итерационного процесса с рекуррентным пересчётом. Подробно алгоритм электрического воздействия описан в [2]. На втором этапе решения используется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным в сочетании с конечно-разностной схемой распада разрыва Годунова для уравнений акустики и схемой Иванова с контролируемой диссипацией энергии для уравнения теплопроводности. Однако объёмные силы и момент сил не влияют на изменение температуры, поэтому для сокращения времени проведения расчётов положим их равными нулю. Алгоритм реализован в виде параллельной программы, написанной по технологии CUDA.

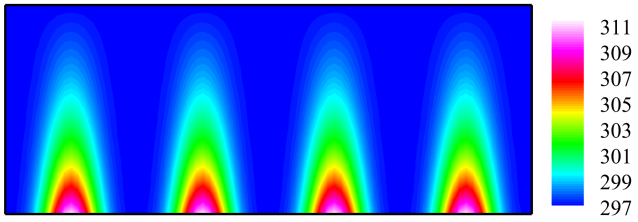


Рис. 1: Нагревание нижней границы: линии уровня температуры T

На рис. 1 приведены результаты воздействия четырёх источников тепла на нижней границе области размерами 200×80 мкм. Радиус действия каждого источника 20 мкм. На рис. 2 видно, как распространяются и отражаются волны давления, начиная от области приложения нагрузки. На рис. 3 представлено векторное поле скоростей. Серия расчётов показала, что в рамках используемой модели невозможно только за счёт воздействия температуры изменить ориентацию молекул. Касательное и моментные напряжения, а также угловая скорость при этом равны нулю, а угол поворота молекул остаётся неизменным. Предполагается, что при учёте сил поверхностного натяжения воздействие температуры изменит ориентацию молекул.

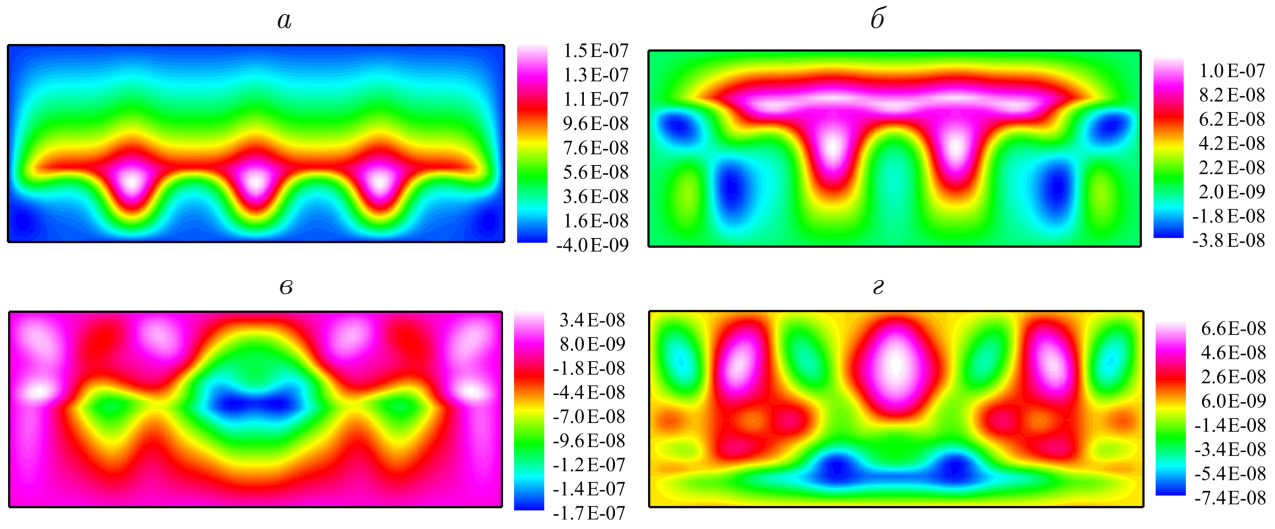


Рис. 2: Нагревание нижней границы: линии уровня давления p
(а – 9 пс, б – 18 пс, в – 36 пс, г – 45 пс)

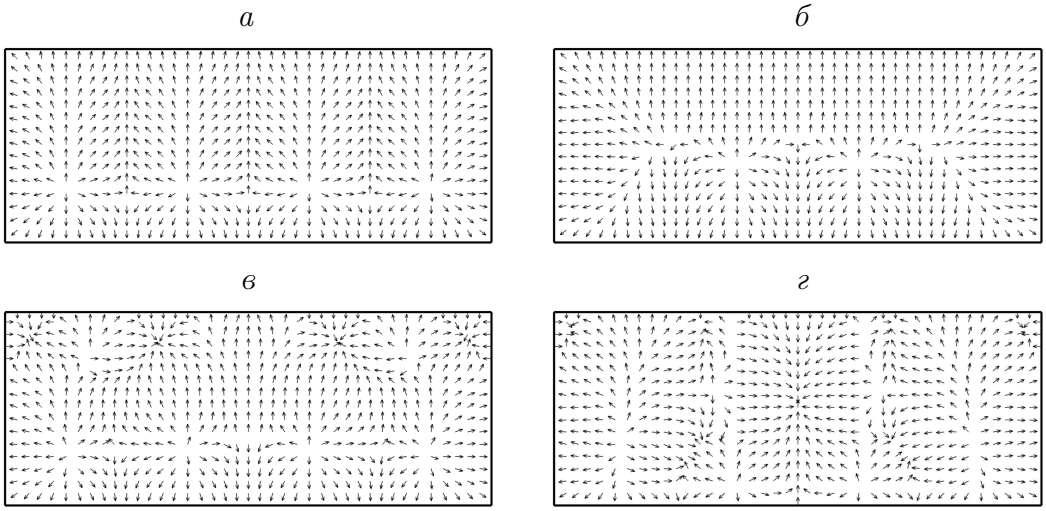


Рис. 3: Нагревание нижней границы: векторное поле скоростей v_1 и v_2
(а – 9 пс, б – 18 пс, в – 36 пс, г – 45 пс)

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sadovskii V., Sadovskaya O. *Acoustic approximation of the governing equations of liquid crystals under weak thermomechanical and electrostatic perturbations.* Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures. Cham : Springer, 2018. V. 87. P. 297–341 (Ser. Adv. Struct. Mater., Chapt. 17).
2. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Smolekho I. V. *Parallel implementation of the algorithm describing the behavior of liquid crystals under the action of electric field.* AIP Conf. Proc. 2018. V. 2025. P. 070005.

КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ В МОДУЛИРОВАННОМ ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ: НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ЗЕРКАЛЬНО-СДВИГОВАЯ СИММЕТРИЯ

Б. Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет

В молекулярных бинарных смесях, обладающих отрицательным коэффициентом термодиффузии, конвекция возникает колебательным образом с характерной частотой ω_H. Эволюция возмущений в кольцевых каналах большого радиуса может приводить к различным квазидвумерным конвективным течениям: неустойчивым стоячим волнам (SW, standing waves), устойчивым протяжённым бегущим волнам (TW, travelling waves), либо режиму стационарной конвекции [1]. Эти режимы хорошо описываются при численном моделировании двумерной конвекции бинарной смеси в горизонтальном слое на основе уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi &= \nabla^2\Psi, \\
\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \mathrm{Pr}\nabla^2\varphi + \mathrm{PrRa}\frac{\partial(T+C)}{\partial x}, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} &= \nabla^2 T, \\
\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial z} &= \mathrm{Le}\nabla^2(C-\psi T),
\end{aligned} \tag{1}$$

где Ψ – функция тока, p – давление, T и C – отклонения температуры и концентрации легкой примеси от их средних значений $\overline{T}$, $\overline{C}$. Числа Релея Ra, Прандтля Pr, Льюиса Le, и параметр разделения смеси ψ заданы стандартным образом:

$$\mathrm{Ra} = \frac{g\alpha A h^4}{\nu\kappa}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \mathrm{Le} = \frac{D}{\kappa}, \quad \psi = -\frac{\beta\kappa_T}{\alpha\overline{T}} = S_T\overline{C}(1-\overline{C})\frac{\beta}{\alpha}, \tag{2}$$

здесь A – характерный градиент температуры, α и β – коэффициенты теплового и концентрационного расширения смеси, ν, κ – коэффициенты вязкости и температуропроводности, D и S_T – коэффициент диффузии примеси и параметр Соре соответственно.

На непроницаемых границах слоя предполагается отсутствие проскальзывания:

$$z = \pm 1/2: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} - \psi\frac{\partial T}{\partial z} = 0\,. \tag{3}$$

Одним из важных свойств решений в случае постоянного градиента температуры является зеркально-сдвиговая симметрия полей функции тока ψ, температуры T и концентрации C, характеризующих эти режимы [1]:

$$\begin{gathered}
\psi(t,x,z) = -\psi(t,x+\lambda/2,-z), \quad T(t,x,z) = -T(t,x+\lambda/2,-z), \\
C(t,x,z) = -C(t,x+\lambda/2,-z),
\end{gathered} \tag{4}$$

где λ – пространственный период конвективной структуры.

Модуляция параметра (вертикальные вибрации [2] или переменное тепловое поле [3]) изменяет свойства решений системы (1), существующих при стационарном воздействии: стабилизирует стоячие волны, рождает квазипериодические режимы модулированных бегущих волн, а также режим модулированной конвекции.

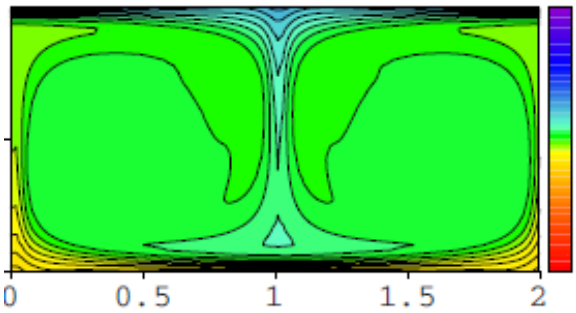
Модуляция разности температур на границах слоя с амплитудой δ и частотой Ω может быть реализована по различным сценариям ($\Delta T = 1 + \delta \sin \Omega t$):

$$\text{A}: \quad T(-1/2) = 1/2 + \delta \sin \Omega t, \qquad T(1/2) = -1/2;$$

$$\text{B}: \quad T(-1/2) = 1/2 + (\delta/2) \sin \Omega t, \quad T(1/2) = -1/2 - (\delta/2) \sin \Omega t.$$

При этом тепловая и концентрационная волны в жидкости, находящейся в основном состоянии механического равновесия, будут обладать разными свойствами симметрии относительно координаты z. В случае B распределения температуры и концентрации представляют собой нечётные функции z. В случае A эти распределения не обладают определённой чётностью, что будет порождать нарушение зеркально-сдвиговой симметрии решений (4) для поля температуры и концентрации.

Распределение концентрации в режиме модулированной конвекции смеси спирт – вода, демонстрирующее нарушение зеркально-сдвиговой симметрии, представлено на рисунке для следующего набора параметров: $\mathrm{Pr} = 10$, $\mathrm{Le} = 0.01$, $\psi = -0.25$, $\lambda = 2$, $\mathrm{Ra} = 2328$, $\delta = 0.2$, $\Omega = \omega_H = 11.246$ (время соответствует минимальному значению вертикальной скорости между конвективными валами $x = 1$).



Для различных сценариев модуляции температуры построены бифуркационные диаграммы решений. Для нелинейных режимов модулированных бегущих волн найдены частоты конвективных колебаний. Режим модулированной конвекции представляет собой синхронный отклик на внешнее воздействие.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-21-00344, https://rscf.ru/project/23-21-00344/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jung D., Matura P., Lücke M. *Oscillatory convection in binary mixtures: Thermodiffusion, solutal buoyancy, and advection.* Europ. Phys. J. E. 2004. V. 15. P. 293–304.
2. Smorodin B. L., Myznikova B. I., Legros J. C. *Evolution of convective patterns in a binary-mixture layer subjected to a periodical change of the gravity field.* Physics of Fluids. 2008. V. 20. № 9. 094102.
3. Smorodin B. L., Lücke M. *Convection in binary fluid mixtures with modulated heating.* Phys. Rev. E. 2009. V. 79. 026315.

О ВЛИЯНИИ РАСХОДА ГАЗА НА ТЕЧЕНИЕ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ

И. В. Степанова, И. Н. Зотов

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Работа посвящена анализу конвективного течения двухкомпонентной жидкости, увлекаемой спутным потоком газопаровой смеси, состоящей из фонового газа и паров испаряющегося из жидкого слоя лёгкого компонента. Математическая модель выводится на основе уравнений Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска, а также уравнений баланса тепла и массы, полученных с помощью законов Фурье и Фика соответственно. При моделировании диффузии лёгкого компонента учитывается эффект Соре – перенос примеси за счёт изменения температуры. Определяющая система имеет вид

$$\begin{gathered} \nu^j u^j_{yy} = \frac{1}{\rho^j_0}\, p^j_x, \qquad g(\beta^j_T \theta^j + \beta^j_C c^j) = \frac{1}{\rho^j_0}\, p^j_y, \\ u^j \theta^j_x = \chi^j(\theta^j_{xx} + \theta^j_{yy}), \qquad u^j c^j_x = D^j \left[c^j_{xx} + c^j_{yy} + \alpha^j(\theta^j_{xx} + \theta^j_{yy})\right], \end{gathered} \tag{1}$$

здесь верхний индекс $j = 1, 2$ обозначает принадлежность характеристики к слою: 1 – для характеристик нижнего жидкого слоя, 2 – для верхнего газопарового; (x, y) – вектор координат; g – ускорение силы тяжести; $u^j(y)$ – горизонтальная компонента вектора скорости; давление $p^j(x, y)$ определено с точностью до гидростатического; $\theta^j(x, y)$ и $c^j(x, y)$ – малые отклонения температуры и массовой концентрации одного из компонентов от их средних равновесных значений. Коэффициенты кинематической вязкости ν^j, температуропроводности χ^j, диффузии D^j, параметр термодиффузии α^j и средняя плотность смеси ρ^j_0 постоянны.

Считается, что рассматриваемая двухслойная система бинарная жидкость – газопаровая смесь занимает горизонтальный протяжённый канал, ограниченный твёрдыми стенками. Для определения характеристик течения следует задать замыкающие соотношения на границе раздела фаз и твёрдых стенках. На недеформируемой границе раздела $y = 0$ считаются выполненными динамическое условие, равенство скоростей, температур и потоков вещества. Концентрация пара является линейной функцией температуры. Кинематическое условие выполняется тождественно в силу вида вектора скорости. Диффузионное испарение с поверхности раздела моделируется посредством условия теплообмена с учётом затрат тепла на парообразование. Массовая скорость испарения M может быть найдена по формуле [1]

$$M = -D^2 \rho_0^2 \Big(\frac{\partial c^2}{\partial y} + \alpha^2 \frac{\partial \theta^2}{\partial y} \Big)\Big|_{(x,0)}. \tag{2}$$

На твёрдых стенках задаётся закон распределения температуры, условия прилипания и отсутствия потока вещества через стенки.

В работе построено точное решение системы (1) при перечисленных граничных условиях в предположении, что температура θ^j и концентрация c^j линейно распределены относительно переменной x в обоих слоях, причём для функций θ^j такой закон сохраняется и для распределения вдоль стенок канала. Существенной особенностью решения является

использование для поверхностного натяжения функции, зависящей от концентрации испаряющейся жидкости квадратично. Согласно экспериментальным данным [2] такая зависимость характерна для водных растворов этилового спирта. Использование квадратичной зависимости поверхностного натяжения позволяет не задавать расход газа в верхнем слое, а рассчитывать его по формуле

$$q = \int_0^L \rho_0^2 u^2 \, dy, \tag{3}$$

где L – толщина газового слоя.

Полученное решение используется для анализа влияния расхода газа в верхнем слое на характер испарительной конвекции для рабочих сред водный раствор этанола – смесь паров этанола и азота. В работе [3] упоминается, что увеличение расхода газа ведёт к интенсификации испарения.

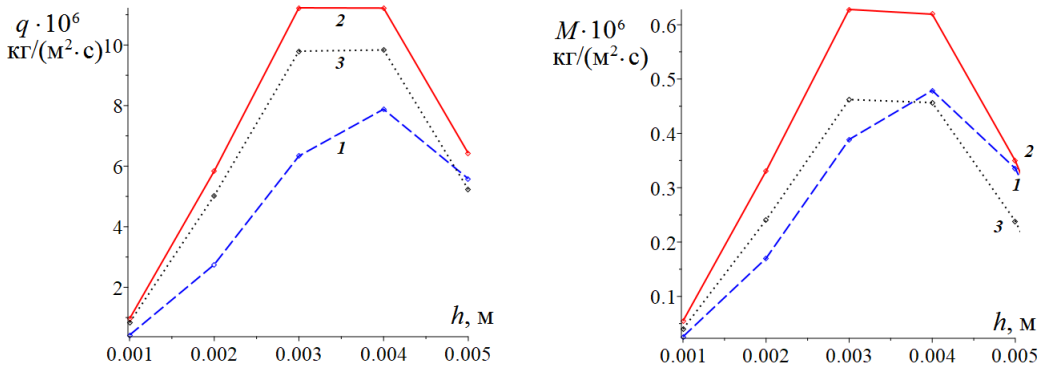


Рис. 1: Зависимости расхода газа q в верхнем слое (слева) и массовой скорости испарения M (справа) от толщины нижнего слоя h. Линия *1* соответствует концентрации этанола в жидкости 40 %, *2* – 60 %, *3* – 80 %

В качестве примера результата, полученного на основе анализа построенного точного решения, на рис. 1 изображены зависимости $M(C_0, h)$, $q(C_0, h)$, где C_0 – концентрация этанола в жидкой фазе, вычисленная в процентах, h – толщина жидкого слоя. Можно видеть, что самая большая массовая скорость испарения достигается при концентрации этанола в жидкой фазе 60 % при толщине слоя жидкости 3 мм. Те же самые значения входных параметров соответствуют и самому большому значению расхода газа, подчёркивая прямую зависимость этих величин друг от друга, что подтверждено экспериментально и теоретически [3].

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 22-11-00243, https://rscf.ru/project/22-11-00243/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н. *Задачи испарительной конвекции (обзор).* ПММ. 2018. Т. 82. № 2. С. 219–260.
2. Стабников В. Н., Ройтер И. М., Процюк Т. Б. *Этиловый спирт.* М. : Изд-во «Пищевая промышленность», 1976.

3. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Laskovets E. V. *Study of the gas flow rate effect on the parameters of evaporative convection regimes using an exact solution.* Int. J. Thermal Sci. 2024. V. 204. P. 109179(1-14).

ПОРОУПРУГАЯ СРЕДА, НАСЫЩЕННАЯ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

М. А. Токарева, А. А. Папин

Алтайский государственный университет, Барнаул

В работе рассматривается квазилинейная система составного типа, описывающая нестационарное изотермическое движение несмешивающихся жидкостей в вязкоупругой среде. Уравнения модели в отсутствие фазовых переходов и с учётом зависимости параметров среды от пористости имеют вид [1–3]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial(1-\phi)\rho_3}{\partial t}+\nabla\cdot[(1-\phi)\rho_3\mathbf{v}_3]=0,\\ \frac{\partial(\rho_i s_i\phi)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_i\phi s_i\ \mathbf{v}_i)=0,\quad i=1,2,\end{gathered}\tag{1}$$

$$s_i\phi(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_3)=-K_0(\phi)\frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i}\,(\nabla p_i-\rho_i\mathbf{g}),\quad i=1,2,\tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_3=-\phi\left(\alpha p_e+\beta\frac{dp_e}{dt}\right),\quad p_e=(1-\phi)(p_3-p_f),\tag{3}$$

$$\nabla p_{tot}=\rho_{tot}\mathbf{g}+\nabla\cdot\left\{(1-\phi)\eta\left[\frac{\partial\mathbf{v}_3}{\partial\mathbf{x}}+\left(\frac{\partial\mathbf{v}_3}{\partial\mathbf{x}}\right)^*\right]\right\},\tag{4}$$

$$p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_3,\quad p_f=s_1p_1+s_2p_2,\quad \rho_{tot}=\phi(s_1\rho_1+s_2\rho_2)+(1-\phi)\rho_3,$$

где $\rho_i,\mathbf{v}_i$ – истинная плотность и скорость i-ой фазы (1, 2 – жидкости, 3 – твёрдый вязкоупругий скелет), ϕ – пористость, $s_i,p_i,k_{0i}(s_i),\mu_i$ – насыщенность, давление, проницаемость, динамическая вязкость жидкой фазы ($i=1,2$), $\mathbf{g}$ – вектор ускорения силы тяжести, α,β – заданные параметры среды, p_{tot} – общее давление, $p_e=p_{tot}-p_f$ – эффективное давление, ρ_{tot} – общая плотность, η – вязкость пористого скелета. Фазовые давления p_1 и p_2 различаются на величину капиллярного скачка: $p_2-p_1=p_c(s_1)$.

В отсутствие капиллярного скачка данная система уравнений является аналогом модели Баклея – Леверетта [4, 5], однако в приведённой постановке учитывается движение твёрдой фазы, поэтому модель является расширенной версией, которая дополняется уравнением неразрывности для твёрдой фазы, законом сохранения импульса для системы и реологическим уравнением для пористости, связывающим эффективное давление и функцию пористости.

Стационарное решение для приведённой системы в отсутствие ускорения свободного падения уравнений имеет вид

$$\phi=\phi^0,\quad s_1=s_1^0,\quad s_2=s_2^0,\quad \mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_3=0,\quad p_1=p_2=p_3=p^0,$$

ϕ^0, s_1^0, s_2^0, p^0 – наперёд известные, заданные положительные постоянные, причём ϕ^0, s_1^0, $s_2^0\in[0,1]$, $s_1^0+s_2^0=1$.

Возмущённое решение ищем в виде

$$\phi=\bar\phi+\phi^0,\quad s_1=\bar s_1+s_1^0,\quad s_2=\bar s_2+s_2^0,\quad \mathbf{v}_1=\bar{\mathbf{v}}_1,\quad \mathbf{v}_2=\bar{\mathbf{v}}_2,\quad \mathbf{v}_3=\bar{\mathbf{v}}_3,$$

$$p_1 = p_1 + p^0, \quad p_2 = p_2 + p^0, \quad p_3 = p_3 + p^0,$$

где $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 = 0$.

Подставляя возмущённое решение в уравнения (1)–(3) и отбрасывая нелинейные слагаемые, придём к следующей линейной системе:

$$\frac{\partial(1-\bar{\phi})}{\partial t} + (1-\phi^0)\nabla\cdot\bar{\mathbf{v}}_3 = 0,$$

$$\phi^0\frac{\partial(\bar{s_1})}{\partial t} + s_1^0\frac{\partial(\bar{\phi})}{\partial t} + \phi^0 s_1^0\nabla\cdot\bar{\mathbf{v}}_1 = 0, \quad \phi^0\frac{\partial(\bar{s_2})}{\partial t} + s_2^0\frac{\partial(\bar{\phi})}{\partial t} + \phi^0 s_2^0\nabla\cdot\bar{\mathbf{v}}_2 = 0,$$

$$s_1^0\phi^0(\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_3) = -K_0(\phi^0)\frac{k_{01}(s_1^0)}{\mu_1}\nabla\bar{p}_1, \quad s_2^0\phi^0(\bar{\mathbf{v}}_2 - \bar{\mathbf{v}}_3) = -K_0(\phi^0)\frac{k_{02}(s_2^0)}{\mu_2}\nabla\bar{p}_2,$$

$$\nabla\cdot\bar{\mathbf{v}}_3 = \phi^0(1-\phi^0)\left(\alpha(\bar{p}_3 - \bar{p}_1) + \beta\frac{\partial(\bar{p}_3 - \bar{p}_1)}{\partial t}\right),$$

$$(1-\phi^0)\nabla\bar{p}_3 + \phi^0\nabla\bar{p}_1 = \eta(1-\phi^0)(\Delta\bar{\mathbf{v}}_3 + \nabla[(\nabla\cdot\bar{\mathbf{v}}_3)].$$

Полученную систему уравнений удаётся свести к одному уравнению высокого порядка для давления жидкой фазы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta^2\bar{p}_1\right) - A\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\bar{p}_1\right) + B\Delta^2\bar{p}_1 - C\Delta\bar{p}_1 = 0,$$

где

$$A = \frac{1}{2\eta(1-\phi^0)}, \quad B = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\tilde{K}}{2\eta\beta\phi^0(1-\phi^0)}, \quad C = \frac{\alpha}{2\eta\beta(1-\phi^0)},$$

$$\tilde{K} = K_0(\phi^0)\left(\frac{k_{01}(s_1^0)}{\mu_1} + \frac{k_{02}(s_2^0)}{\mu_2}\right).$$

Проводится исследование на устойчивость решения задачи.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 23-71-10045, https://rscf.ru/project/23-71-10045/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Athy L. F., *Density, porosity, and compaction of sedimentary rocks.* AAPG Bulletin. 1930. V. 14(1). P. 1–24.
2. Leverett M. C. *Capillary behavior in porous solids.* Transactions of the AIME. 1941. V. 142. № 1. P. 341-358.
3. Tokareva M. A., Papin A. A., *Mathematical model of fluids motion in poroelastic snow-ice cover.* J. Siberian Federal University. Mathem. & Phys. 2021. V. 14. № 1. P. 47–56.
4. Buckley S. E., Leverett M. C. *Mechanism of Fluid Displacement in Sands.* Transactions of the AIME. 1942. V. 154. № 01. P. 107–116.
5. Бочаров О. Б., Пеньковский В. И. *Введение в теорию фильтрации жидкостей и газов в пористых средах: Учеб. пособие.* Новосибирск : Новосибирский госуниверситет, 2005. 132 с.

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАСТВОРА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ РЕАКТОРЕ ХЕЛЕ – ШОУ

В. Ю. Уточкин, Д. А. Брацун

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Центрифугирование представляет собой удобный механизм управления тепло- и массопереносом в жидкой среде. Центробежная и кориолисова силы инерции оказывают на жидкость пространственно-неоднородное воздействие, что может быть использовано в ряде технологических приложений. В последние годы одним из перспективных направлений является разработка микрореакторов, где поведение жидкой среды контролируется центробежными перегрузками [1, 2]. Зачастую в таких устройствах используется квазидвумерная конфигурация Хеле – Шоу, что продиктовано удобством регистрации тепловых и концентрационных полей интерферометрическими методами [3]. Теоретическое описание двумерных течений также весьма удобно в силу простоты уравнений, однако при использовании стандартного подхода это приводит к обращению в ноль силы Кориолиса [4]. Экспериментальные наблюдения течений в полостях с малым аспектным отношением показали, что эффект Кориолиса может быть существенным, поэтому вывод корректных уравнений конвекции во вращающейся полости Хеле – Шоу является актуальной задачей.

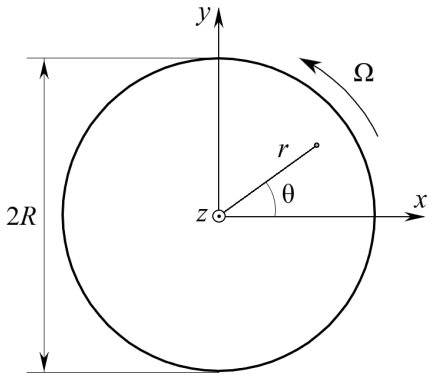


Рис. 1: Схематическое изображение ячейки Хеле – Шоу в полярных координатах

Рассматривается задача о конвекции в ячейке Хеле – Шоу, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, рис. 1. Протекание химической реакции приводит к возникновению вариаций плотности жидкости, связанных с тепловыми или концентрационными неоднородностями. Эволюционные уравнения в приближениях Буссинеска и Хеле – Шоу имеют вид

$$\frac{1}{Sc}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{6}{5r} J(\Phi, \Psi)\right] = \nabla^2 \Phi - 12\Phi - R_\Omega \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{R_C}{r} J(\Psi, C), \tag{1}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{r} J(C, \Psi) = \nabla^2 C + G, \tag{2}$$

где Φ, Ψ – завихренность и функция тока, C – тепловое или концентрационное поле, $J(f, g)$ – якобиан в цилиндрических координатах (r, θ). Безразмерные параметры задачи включают в себя число Шмидта Sc, мощность внутренних источников G, а также два

числа Рэлея R_C и R_Ω, характеризующих плавучесть, связанную с силой Кориолиса и центробежной силой соответственно.

Линеаризация уравнений (1), (2) вблизи состояния равновесия приводит к задаче линейной теории устойчивости. В рамках линейного анализа показано, что при $R_C \neq 0$ спектр включает колебательные возмущения, обусловливающие нестационарный характер течения за порогом устойчивости. Поведение решений вблизи первой бифуркации исследовано методом многих масштабов. Решение амплитудных уравнений вблизи порогового значения R_Ω^* показывает, что потеря устойчивости сопровождается возникновением колебаний. С помощью численного анализа построена карта устойчивости в плоскости управляющих параметров (R_Ω, R_C). Согласно результатам слабонелинейного анализа, равновесие жидкости сменяется движением после прохождения системой бифуркации Хопфа, что иллюстрируется появлением предельного цикла в фазовом пространстве. Наряду с наличием в спектре осциллирующих возмущений, эффект Кориолиса проявляется в азимутальном сносе течения, рис. 2.

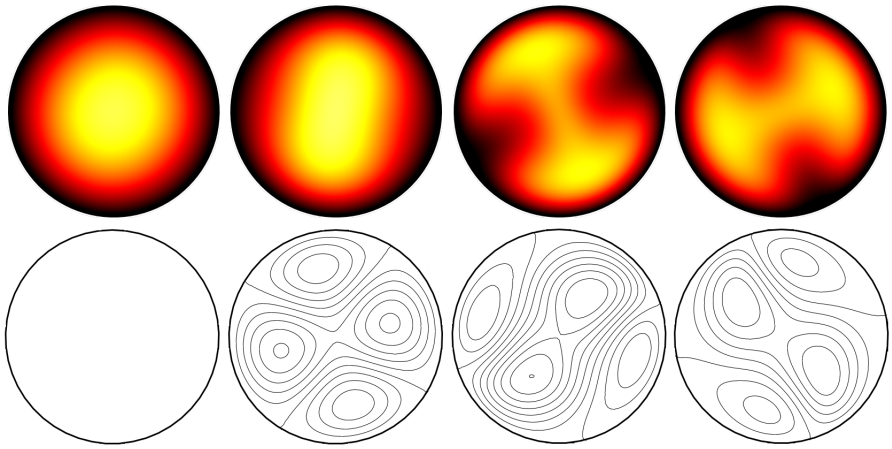


Рис. 2: Поля возмущений концентрации (сверху) и функции тока (снизу) в последовательные моменты времени

Показано также, что увеличение параметра R_C оказывает стабилизирующее влияние на систему.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSNM-2023-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cai Z. [et al.] *A rapid micromixer for centrifugal microfluidic platforms.* Micromachines. 2016. № 7. P. 89.
2. Cummings L. J., Waters S. L. *Tissue growth in a rotating bioreactor. Part II: fluid flow and nutrient transport problems.* Mathem. Med. Biol. 2007. V. 24(2). P. 169–208.
3. Mizev A., Mosheva E., Bratsun D. *Extended classification of the buoyancy-driven flows induced by a neutralization reaction in miscible fluids. Part 1. Experimental study.* J. Fluid Mech. 2021. V. 916. Art. 22.
4. Utochkin V. Y., Siraev R. R., Bratsun D. A. *Pattern formation in miscible rotating Hele-Shaw flows induced by a neutralization reaction.* Microgravity Sci. Technol. 2021. V. 33. Art. 67.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА. МЕТОД ЗОММЕРФЕЛЬДА

А. Г. Фатьянов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Методам решения смешанных задач посвящено значительное количество исследований (отметим среди них [1-4]). В настоящей работе на основе решения задачи дифракции на сегменте зеркала [1] развит новый метод решения динамической задачи для вибрирующего жёсткого штампа, позволяющий проводить расчёты на телесейсмические расстояния. Рассматривается акустический случай. Для наглядности подробно рассмотрена постановка в однородном полупространстве.

Задача распространения волн от вибрирующего жёсткого штампа формулируется в цилиндрической системе координат ($0 \le r < \infty, 0 \le z < \infty$) в осесимметричном случае следующим образом: определить функцию $u(z, r, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \tag{1}$$

краевым

$$u|_{z=0} = f(t) \quad \text{при} \quad r \le r_0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad \text{при} \quad r > r_0 \tag{3}$$

и начальным условиям

$$u = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{4}$$

Здесь r_0 – радиус штампа, V – скорость в среде. Кроме того, потребуется условие выделения единственного физически верного решения, о котором будет сказано ниже.

Решение (1)–(4) строится с помощью конечных интегральных преобразований по времени t и латеральной переменной r:

$$u(z, r, t) = \frac{1}{2T}\sum_{j=-\infty}^{\infty} u(z, r, \omega_j)\exp(-\omega_j \cdot t), \tag{5}$$

$$u(z, r, \omega_j) = \frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} u(z, k_n, \omega_j) J_0(k_n r)/J_1^2(k_n a), \tag{6}$$

где $\omega_j = j \cdot \pi/T$, $k_n = x_n/a$, x_n — корни уравнения $J_0(x) = 0$, T и a — границы расчётной области. В дальнейшем для сокращения записи несущественные индексы будут опускаться.

Рассмотрим для наглядности случай однородного полупространства. Тогда уравнение (1) с учётом (5), (6) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u(z, k_n, \omega)}{dz^2} = \left(k_n^2 - \frac{\omega^2}{V^2}\right) u(z, k_n, \omega). \tag{7}$$

Из (7) элементарно получим

$$u(z, k_n, \omega) = u(0, k_n, \omega) \exp(-\nu_n z) = C_n \exp(-\nu_n z), \tag{8}$$

$$\frac{du(z, k_n, \omega)}{dz} = -\nu_n C_n \exp(-\nu_n z). \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) дают выражения для смещений u и «напряжений» du/dz в зависимости от пока неизвестных коэффициентов C_n, $\nu_n = \sqrt{k_n^2 - \omega^2/V^2}$. Для удовлетворения условий на бесконечности в (8) и (9) используется принцип предельного поглощения: вместо ω^2 берётся $\omega^2 + i \cdot \varepsilon \cdot \omega$, где ε — малая величина [5].

С учётом (8), (9) краевые условия (2) и (3) в спектральной области (k, ω) перепишутся следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n b_n J_0(k_n r) = F(\omega) \quad \text{при} \quad r \le r_0, \tag{10}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n C_n b_n J_0(k_n r) = 0 \quad \text{при} \quad r > r_0. \tag{11}$$

Здесь $F(\omega)$ – спектр функции $f(t)$ и введено сокращение $b_n = 2/\left\langle a^2 J_1^2(k_n a)\right\rangle$. Для поиска неизвестных коэффициентов C_n, следуя Зоммерфельду [1], рассмотрим квадратичные ошибки, соответствующие равенствам (10) и (11):

$$\int_0^{r_0} \left| F - \sum_m C_m b_m J_0(k_m r) \right|^2 r\, dr \quad \text{и} \quad \int_{r_0}^{a} \left| \sum_m \nu_m C_m b_m J_0(k_m r) \right|^2 r\, dr. \tag{12}$$

Сумма обеих ошибок в (12) должна достигать минимума при соответствующем выборе C_m. Дифференцируя по C_n^*, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_m (a_{n,m} + \nu_n^* \nu_m b_{n,m}) C_m = F(\omega) \int_0^{r_0} r J_0(k_n r)\, dr = F(\omega) g_n. \tag{13}$$

Здесь и всюду ниже «звёздочкой» обозначается комплексно-сопряжённая величина. Матрицы $a_{n,m}$ и $b_{n,m}$ с использованием формулы Грина [1] вычисляются точно. При этом в СЛАУ (13) временная частота ω входит как параметр, и

$$g_n = \int_0^{r_0} r J_0(k_n r)\, dr = \frac{r_0 J_1(k_n r_0)}{k_n}\,. \tag{14}$$

Равенство (11) можно умножить на любое вещественное число X, отличное от нуля. В этом случае при минимизации функционала вместо СЛАУ (13) получим

$$\sum_m (a_{n,m}/\mathrm{X}^2 + \nu_n^* \nu_m b_{n,m}) C_m = F(\omega) g_n/\mathrm{X}^2. \tag{15}$$

СЛАУ (15) имеет бесконечное количество математически корректных решений для разных X, но только одно будет давать физически верное решение. Часто единственное

физически правдоподобное решение выбирается на основе асимптотики решения в окрестности края штампа (ребра) [3, 4]. Но известны и другие способы. В работе [2] считается, что известно усилие, приложенное к штампу. Исходя из этого и получается единственное решение. В настоящей работе оно определяется на основе метода Зоммерфельда [1]. При рассмотрении дифракции на зеркале с секторальной выемкой соответствующие величины приводятся к безразмерному виду. Поскольку ν_n имеет размерность, обратную единице длины (м$^{-1}$), то X должен иметь размерность длины (м). Используя равенства (14) и (15), рассмотрим выражение g_n/X^2. Потребуем, чтобы при $r_0 \to 0$ выполнялось условие $g_n/\mathrm{X}^2 \to 1$, т. е. чтобы при точечном штампе ($r_0 = 0$) было сосредоточенное воздействие. Поскольку $J_1(\alpha) \approx \alpha/2$ при малых α, то получим, что $\mathrm{X} = r_0/\sqrt{2}$. Величина X при этом будет иметь размерность длины. Таким образом, размерности в равенствах (10) и (11) будут совпадать. В этом случае

$$f_n = g_n/\mathrm{X}^2 = 2J_1(k_n r_0)/k_n r_0. \tag{16}$$

Выражение (16) соответствует источнику нормальной силы, равномерно распределённой по площади круга на плоской дневной поверхности. Для штампа больших размеров СЛАУ (15) решается с помощью открытого пакета МГУ.

Применительно к вибрационным задачам размер сейсмоисточника (штампа) всегда значительно меньше длины волны. В этом случае получена приближённая явная формула для решения в спектральной области. На дневной поверхности $z = 0$ она выглядит следующим образом:

$$u(0, k_n, \omega) = c\,\frac{F(\omega)}{\nu_n \nu_n^*}\, f_n. \tag{17}$$

Проверка точности формулы (17) производилась путём сравнения с решением СЛАУ (15) в физической области. Для перехода в физическую область использовались формулы (5) и (6). В итоге получилось совпадение результатов с точностью до трёх знаков после запятой.

Зададим на дневной поверхности распределение «напряжений»:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{2}{r_0^2}\, f(t) \quad \text{при} \quad r \le r_0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad \text{при} \quad r > r_0. \tag{18}$$

Решение задачи (1), (4), (18) хорошо известно. С учётом принятых обозначений оно выглядит следующим образом:

$$u(0, k_n, \omega) = \frac{F(\omega)}{\nu_n}\, f_n. \tag{19}$$

Видно, что решение для жёсткого штампа (17) принципиально отличается от решения (19), построенного для источника излучения в виде распределённой силы.

При таком подходе довольно просто учесть слоистость среды. Введём вспомогательную функцию $\beta_n(z)$ такую, что $du_n/dz = \beta_n(z)u_n$. Тогда обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (7) легко сводится к уравнению первого порядка, и с помощью метода дифференциальной прогонки находится $\beta_n(0)$ [6]. В итоге решение, например для штампа малых размеров, будет даваться формулой (17), в которой ν_n заменяется на $\beta_n(0)$.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (проект № 0251-2021-0004).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зоммерфельд А. *Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики.* М. : ИЛ, 1950.
2. Михлин С. Г. *Приложение интегральных уравнений.* М. : Гостехиздат, 1947. 304 с.
3. Партон В. З., Перлин П. И. *Методы математической теории упругости.* М. : Наука, 1981.
4. Бабешко В. А. *Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости.* М. : Наука, 1984. 256 с.
5. Бабешко В. А., Чичинин И. С. *Проблемы вибрационного просвечивания Земли.* М. : Наука, 1977. С. 53–61.
6. Фатьянов А. Г. *Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах.* ДАН. 1990. Т. 310. № 2. С. 323–327.

СОЗДАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОЧНОСТНЫМИ СВОЙСТВАМИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА ПОСРЕДСТВОМ КРИВОЛИНЕЙНОГО АРМИРОВАНИЯ

Н. А. Фёдорова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Для создания новых технологий и типов композитных конструкций необходимы новые методики управления армирующими структурами. В работах [1–3] моделирование армированной среды выполнено в рамках плоской задачи линейной неоднородной теории упругости в условиях термоупругого анизотропного деформирования на основе структурной модели Ю. В. Немировского.

Разработанный подход позволяет производить армирование вдоль семейств криволинейных траекторий. Вычислительные эксперименты показали эффективность такого способа армирования, прочность конструкции возрастает в разы по сравнению с прочностью однородной конструкции [4]. Модель армированной по криволинейным траекториям среды представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент напряжений и интенсивностей армирования. Модель подчинена дополнительному условию рациональности, определяемому технологическим процессом. Это условие постоянства сечений волокон, связывающее интенсивности армирования и углы армирования данным семейством волокон. Такая постановка позволяет формулировать прямую задачу армированной среды (выбраны криволинейные траектории, найти напряжённо-деформированное состояние конструкции) и обратную (заданы условия деформирования конструкции, найти структуры армирования, их реализующие).

Для формулировки задачи о нахождении неизвестных направлений траекторий армирования плоской слоистой конструкции двумя семействами непрерывных волокон записываются уравнения равновесия в усилиях с заданным уровнем деформирования и неизвестными функциями углов армирования [3]. С помощью символьных преобразований строится разрешающая система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций углов армирования $\cos 2\varphi_1$, $\cos 2\varphi_2$ и соответствующих интенсивностей армирования ω_1, ω_2 при условии постоянства сечений волокон, дающих связь между интенсивностями армирования и углами армирования φ_1, φ_2:

$$\frac{\partial(\omega_1 \cos\varphi_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega_1 \sin\varphi_1)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\omega_2 \cos\varphi_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega_2 \sin\varphi_2)}{\partial y} = 0.$$

Иллюстрация решения обратной задачи в осесимметрической постановке приведена на рис. 1, 2. Рассмотрена круглая кольцевая пластина, армированная двумя семействами волокон из одинаковых материалов постоянного поперечного сечения, расположенных симметрично относительно радиальных направлений. Пластина нагружена по внутреннему и внешнему контуру равномерно распределёнными нормальными нагрузками p, q. Задача симметрична, касательные нагрузки на контурах отсутствуют. В численном эксперименте выполнено обезразмеривание разрешающей системы дифференциальных уравнений, краевых и дополнительных условий на прочность конструкции. На рис. 1 приведён вид криволинейных траекторий армирования при $q = 0.35$, $p = 0.13$, на рис. 2 – при $q = 0.2$, $p = 0.1$.

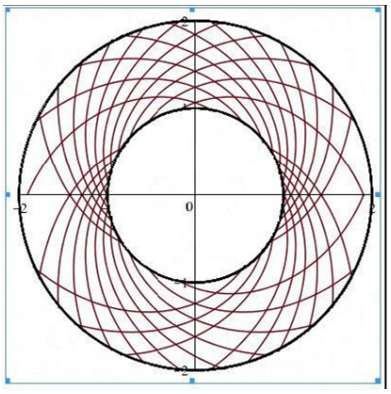


Рис. 1: Криволинейные траектории армирования при $q = 0.35$, $p = 0.13$

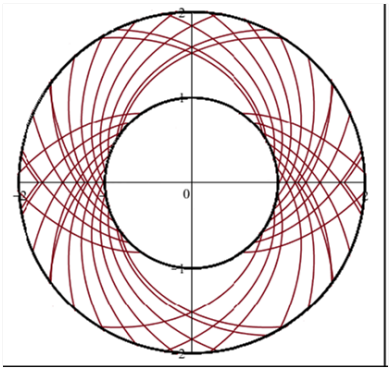


Рис. 2: Криволинейные траектории армирования при $q = 0.2$, $p = 0.1$

На основе численно-аналитических методов получены частные решения разрешающей системы уравнений для эллиптической пластины с двумя семействами нерастяжимых и равнонапряжённых армирующих волокон. На рис. 3 приведён проект армирования эллиптической пластины при условии нерастяжимости семейств волокон, реализующий заданные механические условия.

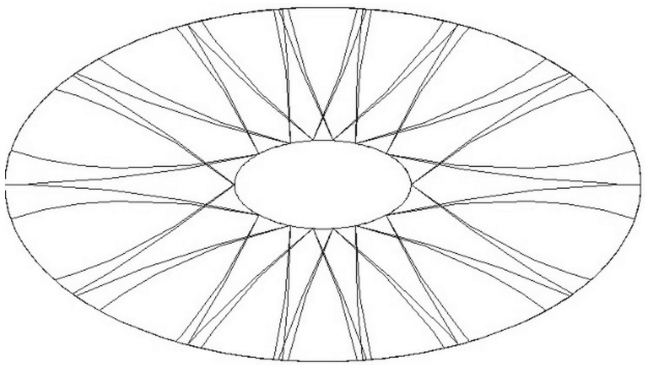


Рис. 3: Армирование эллиптической пластины

При данном подходе моделирования способов армирования композита криволинейными семействами волокон использована послойность (конструкция собирается из тонких криволинейно армированных слоёв), что позволяет применять аддитивные технологии (например 3D-принтеры [1]) с целью изготовления плоских конструкций с заданными прочностными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорова Н. А. *Анализ моделей волокнистых композитов с криволинейным армированием и создание образцов на 3D- принтерах.* Безопасность и мониторинг природных и техногенных систем: материалы и доклады VIII Всероссийской конференции. Красноярск, 16-20 октября 2023 г. С. 24–31.

2. Немировский Ю. В., Федорова Н. А. *Моделирование деформирования плоских авиационных конструкций, армированных двумя семействами криволинейных волокон.* Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета. 2006. № 13(6). С. 38–44.
3. Nemirovsky Yu. V., Feodorova N. A. *Inverse problems of layered-fiber flat structures with curved reinforcement.* AIP Conference Proceedings, 2448. 2021. 020004.
4. Nemirovsky Yu. V., Feodorova N. A. *Strength of curvilinearly reinforced plates in a polar coordinate system.* J. Siberian Federal University. Engineering & Technologies. 2021. № 14(8). P. 952–964.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ И ОБЪЁМНЫЕ ХИМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ В СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧАХ ХЕМОМЕХАНИКИ

А. Б. Фрейдин

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Рассматривается химическая реакция между твёрдым и диффундирующим компонентами, сопровождающаяся объёмным расширением, которое порождает механические напряжения, влияющие на скорость реакции. При этом возможно также изменение реологических свойств материала. К процессам такого типа относятся, например, окисление и литизация кремния, важные для микроэлектроники, работы МЭМС и литий-ионных батарей. Для реакции, локализованной на распространяющемся фронте, обсуждается постановка связанной начально-краевой задачи химия – диффузия – механика. Кинетика фронта описывается на основе концепции тензора химического сродства [1]. Приводятся примеры решения задач, демонстрирующие, что механические напряжения могут ускорять, замедлять и блокировать распространение фронта реакции (см., например, [2]).

Затем описывается процедура анализа устойчивости распространяющегося фронта реакции [3]. Детально исследуется конкуренция глобальной кинетики и роста возмущений фронта. Отмечается, что с потерей устойчивости фронта превращения при приближении к состоянию блокирования могут быть связаны последующие интенсивные пластические деформации и разрушение.

В заключение рассматриваются объёмные реакции и их переход к локализованным [4]. Развивается модель типа модели фазового поля. Показывается, как скалярное сродство химической реакции связано с введённым тензором химического сродства.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ИПМаш РАН (тема № 124041500009-8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Freidin A. B. *Chemical affinity tensor and stress-assist chemical reactions front propagation in solids.* In: ASME Int. Mech. Eng. Congress and Exp. 2013. V. 9: Mechanics of Solids, Structures and Fluids. V009T10A102.
2. Freidin A. B., Rublev I. A., Korolev I. K. *Initial-boundary value problem for the propagating chemical reaction front.* Acta Mechanica. 2024. V. 235. P. 4289–4310.
3. Morozov A., Freidin A. B., Müller W. H. *On stress-affected propagation and stability of chemical reaction fronts in solids.* Int. J. Eng. Sci. 2023. V. 189. 103876.
4. Poluektov M., Freidin A. B. *Localisation of stress-affected chemical reactions in solids described by coupled mechanics-diffusion-reaction models.* Int. J. Eng. Sci. 2024. V. 196. 104006.

ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ С ЖЁСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ С УСЛОВИЯМИ НЕПРОНИКАНИЯ

А. И. Фурцев[1,2]

[1]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*
[2]*Новосибирский государственный университет*

Рассматриваемые задачи равновесия описывают деформируемые тела, содержащие жёсткие включения различной природы: объёмные и тонкие, дополнительно характеризующиеся наличием трещин между включениями и окружающей средой. Предполагается, что тела являются гиперупругими, их деформации могут быть большими, в связи с чем задачи формулируются в рамках нелинейной теории упругости (физически и геометрически нелинейной). Более того, применяются условия взаимного непроникания, которые предотвращают нежелательный эффект взаимопроникновения материи. Рассматриваются два вида указанных условий непроникания: они могут быть как односторонними ограничениями на заранее неизвестные положения точек включений и края окружающей среды, так и глобальными условиями инъективности деформаций.

Для задач равновесия тел, содержащих включения и трещины, обсуждаются краевые задачи с условиями непроникания. Также исследуются сопутствующие задачи минимизации энергии и доказывается, что задачи равновесия имеют решения, являющиеся слабыми по отношению к краевым задачам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фурцев А. И. *Задача о равновесии гиперупругого тела с жестким включением и трещиной с условиями непроникания.* Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21. № 1. С. 17–40.
2. Furtsev A., Rudoy E., Sazhenkov S. *On hyperelastic solid with thin rigid inclusion and crack subjected to global injectivity condition.* Phil. Trans. Royal Society A. 2024. V. 382. P. 20240115.

ЛИГАМЕНТЫ И ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕДАХ: ТЕОРИЯ И ЛАБОРАТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Ю. Д. Чашечкин

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

История внутренних волн прослеживается с античных времен, когда на заре развития мореплавания навигаторы столкнулись с явлением «мёртвой воды» – потерей ходкости судна, составившим основу ряда мифов. Первое описание колебаний свободной поверхности и границы раздела воды и масла в корабельной осветительной лампе в море и в модельном эксперименте с лампой на качелях привёл Б. Франклин (1769 г.). Теорию волн на границе раздела жидкостей начал создавать Дж. Г. Стокс. Решение волнового уравнения и предельную частоту внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости – частоту плавучести – нашёл Рэлей в 1873 г., но эта работа удивительным образом выпала из научного оборота. Частота плавучести была переоткрыта по наблюдениям колебаний стратифицированной атмосферы в начале прошлого века.

Ощущения мореплавателя, сталкивающего с явлением «мёртвой воды», выразительно передал Ф. Нансен в материалах полярной экспедиции 1893–1896 гг. По его приглашению лабораторные исследования генерации волн на поверхности раздела морской и пресной воды при движении модели судна Нансена «Фрам» провёл В. Экман, опубликовавший результаты опытов в последнем томе Трудов экспедиции.

После очередного перерыва цикл работ по изучению различных видов внутренних волн – периодических и присоединённых волн за препятствиями, был выполнен в начале сороковых годов прошлого века в Германии. Следующий перерыв продолжался до начала 60-х годов прошлого века, когда вначале в Англии, а затем и в других странах, начались систематические наблюдения внутренних волн в море и моделирование в лаборатории, дополненное развитием теории. Основные результаты первого цикла активных исследований эффектов стратификации представлены в [1, 2].

Последующие исследования показали, что стратифицированные атмосфера и океан обладают *тонкой структурой*, в которой более однородные слои с погруженными идентифицируемыми волокнами разделены высокоградиентными прослойками. В свою очередь прослойки включают «тонкие листы» и «волокна» [3, 4]. В конце прошлого века структура и динамика неоднородных природных систем стали предметом интенсивных наблюдательных, лабораторных и математических исследований, объём которых прогрессивно увеличивается. Изучаются и собственно волны – периодические течения, в которых параметры мгновенной пространственной структуры (длина волны, волновой вектор) связаны с частотой (мерой локальной временной изменчивости) функциональным (дисперсионным) соотношением, и структура среды. Из всей совокупности волн, существующих в сжимаемых диссипативных вращающихся гетерогенных средах – инерциальных, гравитационных (поверхностных и внутренних), капиллярных, акустических, гибридных, в данной работе внимание уделено результатам теоретических и экспериментальных исследований внутренних волн в толще непрерывно стратифицированной жидкости. Опыты выполнены на стендах УИУ (уникальной исследовательской установки) «ГФК ИПМех РАН» [5].

Научная основа работы – система фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей, все уравнения которой вместе с замыкающим уравнением состояния бы-

ли впервые представлены в [6]. Формы уравнений внутренних волн в различных моделях среды – приближении идеальной, вязкой или многокомпонентной непрерывно стратифицированной среды, приведены в [2, 6–8], других обзорах и книгах. Периодические течения в средах с малыми диссипативными коэффициентами [6–8] в линейном и слабонелинейном приближении анализируются методами теории сингулярных возмущений [8, 9].

Системы уравнений [6–8] включают большое число внутренних масштабов времени и длины. Их значения учитываются при разработке программ расчётов и методик экспериментов при выборе размеров полей наблюдений, ячеек и вида сетки в численных моделях, а также чувствительности, пространственного и временного разрешения измерительных инструментов. Отношения масштабов используются для определения малых параметров при построении решений уравнений методами теории возмущений. Анализ обычно проводится в приближении Буссинеска, когда вариациями плотности пренебрегается везде, за исключением члена с ускорением свободного падения g.

Дисперсионное уравнение для плоских внутренних волн с положительно определённой частотой ω и комплексным волновым вектором $\mathbf{k}$ в глубокой сжимаемой жидкости с постоянным масштабом $\Lambda = |d \ln \rho(z)/dz|^{-1}$, частотой $N = \sqrt{g/\Lambda}$ и периодом плавучести $T_b = 2\pi/N$ имеет вид [10]

$$\left(\omega + i\nu k^2\right)\left[c_s^2 \omega i k^4 \nu - c_s^2 N^2 k_\perp^2 + c_s^2 k^2 \omega^2 + N^2 \omega\left(\omega + i\nu k^2\right) + g^2 k_\perp^2\right] = 0, \qquad (1)$$

где ν – кинематическая вязкость, c_s – скорость звука, $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

Дисперсионное уравнение (1) в пренебрежении эффектами диссипации и сжимаемости переходит в уравнение коротких внутренних волн, не содержащее длину волны [2]:

$$\omega^2 k^2 = N^2 k_\perp^2 \quad \text{или} \quad \omega^2 = N^2 \sin^2 \vartheta, \qquad (2)$$

где угол ϑ обозначает наклон линии распространения луча и гребня поперечной периодической волны к горизонту. Регулярное решение (1) описывает волны [8–10].

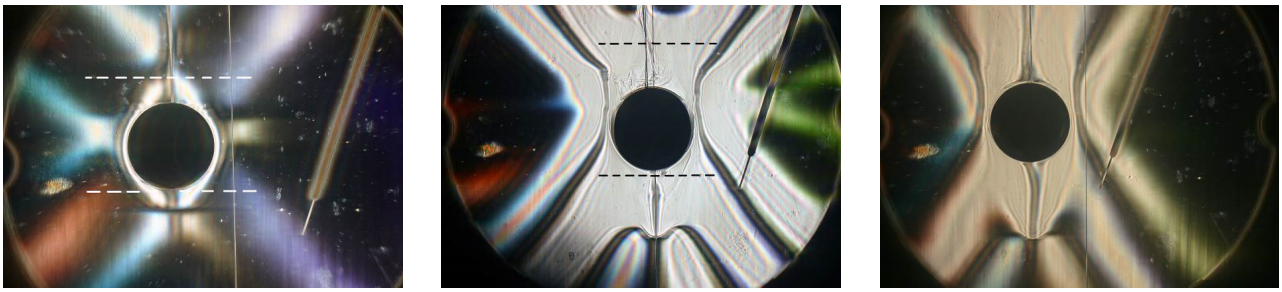
Сингулярное решение дисперсионного уравнения (1) определяет лигаменты, тонкие компоненты течений, которым в эксперименте соответствуют контрастные прослойки и волокна.

Полное решение дисперсионного уравнения позволяет изучать процессы генерации и распространения внутренних волн и лигаментов в среде с произвольной стратификацией, отражения от наклонной жёсткой поверхности и критического уровня $\omega^2 = N^2$ с физически обоснованными граничными условиями прилипания для скорости и непротекания для вещества без привлечения дополнительных констант.

Процесс генерации периодических волн осциллирующей частью плоскости и кольцом на вертикальном цилиндре рассмотрен в [11,12]. Результаты расчётов периодических внутренних волн, просачивающихся в запрещённую область и отражённых от критического уровня [13], совпали с данными позднее выполненных независимых экспериментов [14] с погрешностью в несколько процентов.

Численные решения задачи обтекания горизонтальной полосы в полной постановке, включающие опережающие возмущения, присоединённые внутренние волны, нестационарные вихри, спутный след, высокоградиентные прослойки и волокна, согласуются с данными визуализации картины обтекания равномерно движущейся полосы в лабораторном бассейне и количественно, и качественно [15]. Результаты визуализации поля внутренних волн и сопутствующих лигаментов, формирующих выразительную структуру спутного течения, волн и вихрей при равномерном движении сферы в стратифицированной жидкости, приведены в обзоре [16].

Проведённые опыты показали, что полоса или сфера, осциллирующие в стратифицированной жидкости с постоянной частотой и малой амплитудой, порождают пучки периодических внутренних волн («андреевский крест»), угловые параметры которого согласуются с данными расчётов по линейной теории с уравнением (2). По мере роста амплитуды колебаний источника в волновом пучке становятся всё более выраженными высокоградиентные оболочки, контактирующие с краями тела. В ходе опытов нелинейные взаимодействия всех компонентов [9] усиливают градиенты, результаты действия возмущений накапливаются, и в поле течения возникают тонкие прослойки – лигаменты [17]. Примеры такого течения показаны на рис. 1. Наклон пучков волн согласуется с формулой (2). Лигаменты могут формироваться и непосредственно в волновом поле без контакта с твёрдыми телами или границами жидкости в областях пересечения пучков внутренних волн [18] и в поле присоединённых внутренних волн за цилиндром [19].



а) б) в)

Рис. 1: Теневые фотографии пучков внутренних волн и лигаментов вокруг сферы диаметром $D = 4.5$ см, вертикально осциллирующей в стратифицированной жидкости: (а – в) – $T_b = 11.2, 7.3, 11.2$ с; $H = 1, 2.8, 2.8$ см, $\omega/N = 0.73, 0.8, 0.8$

Из анализа результатов расчётов и данных опытов следует, что периодические течения в непрерывно стратифицированной среде содержат и внутренние волны, и тонкие лигаменты. Современные аналитические и численные методы расчётов и техника эксперимента позволяют проводить согласованное изучение динамики и тонкой структуры внутренних течений на основе полных решений системы фундаментальных уравнений без привлечения дополнительных констант и гипотез.

Сравнения независимо выполненных расчётов и экспериментов с условием избыточности позволяют объективно оценивать точность расчётов и погрешность опытов. Дальнейшее изучение внутренних волн и лигаментов представляет и самостоятельный научный и методический интерес, позволяющий глубже понять природу других видов периодических течений, менее удобных для экспериментального изучения, в частности инерциальных и акустических волн.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124012500442-3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тернер Дж. *Эффекты плавучести в жидкости.* М. : Мир, 1977.
2. Лайтхилл Дж. *Волны в жидкостях.* М. : Мир, 1981.
3. Федоров К. Н. *Тонкая термохалинная структура вод океана.* Л. : ГМИ, 1976.
4. Атмосфера стандартная. Межгосударственный стандарт ГОСТ 4401-81.

5. УИУ «ГФК ИПМех РАН». 2024. Сайт: http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#equip.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика.* М. : Наука, 1986.
7. Чашечкин Ю. Д., Кистович А. В. *Расчет структуры периодических течений в непрерывно стратифицированной жидкости с учетом эффектов диффузии.* Доклады АН СССР. 2003. Т. 393. № 6. С. 776–780.
8. Chashechkin Y. D. *Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows.* Axioms. 2021. V. 10. P. 286.
9. Chashechkin Yu. D. *Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation.* Mathematics. 2021. V. 9. № 6. P. 586.
10. Chashechkin Y. D., Ochirov A. A. *Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field.* Mathematics. 2023. V. 11. P. 4443.
11. Васильев А. Ю., Чашечкин Ю. Д. *Трехмерные периодические течения, образующиеся при колебаниях части наклонной плоскости в неоднородной жидкости.* ПММ. 2012. Т. 76. № 3. С. 418–428.
12. Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д. *Тонкая структура конического пучка периодических внутренних волн в стратифицированном океане и атмосфере.* Известия РАН. ФАО. 2014. Т. 50. №. 1. С. 117–125.
13. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. *Линейная теория распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости.* ПМТФ. 1998. Т. 39. № 5. С. 88–98.
14. Paoletti, M. S., Swinney, H. L. *Propagating and evanescent internal waves in a deep ocean model.* J. Fluid Mech. 2012. V. 706. P. 571–583.
15. Chashechkin Yu. D., Zagumennyi I. V. *2D hydrodynamics of a plate: from creeping flow to transient vortex regimes.* Fluids. 2021. V. 6. № 9. P. 310.
16. Chashechkin Y. D. *Discrete and continuous symmetries of stratified flows past a sphere.* Symmetry. 2022. V. 14. № 6. P. 1278.
17. Chashechkin Yu. D. *Singularly perturbed components of flows –linear precursors of shock waves.* Mathem. Model. Nat. Phenom. 2018. V. 13. № 2. P. 1–29.
18. Teoh S. G., Ivey G. N., Imberger J. *Laboratory study of the interaction between two internal wave rays.* J. Fluid Mech. 1997. V. 336. P. 91–122.
19. Chashechkin Yu. D., Mitkin V. V. *Soaring interfaces, vortices and vortex systems inside the internal waves wake past the horizontally moving cylinder in a continuously stratified fluid.* J. Visualiz. 2006. V. 9. № 3. P. 301–308.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ, СТРУКТУРЫ, ЭНЕРГЕТИКИ И МИКРОЭНЕРГЕТИКИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Ю. Д. Чашечкин, А. Ю. Ильиных

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Необходимость учёта процессов трансформации компонентов полной энергии при расчёте течений жидкостей и газов, впервые отмеченная в 19 веке [1], начала реализовываться только через сто лет. В первом издании трактата [2] впервые были приведены все уравнения механики жидкостей – переноса импульса, вещества и энергии в гетерогенной среде с учётом молекулярных процессов диссипации, дополненные начальными и граничными условиями. В дальнейшем полная система фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей (СФУМГЖ [2]) вошла в основные трактаты и учебники [3]. Интерес к описанию динамики атмосферы, океана, области их взаимодействия стимулировал развитие и общей термодинамики водных растворов или пара [4, 5] и проведение анализа микроструктуры распределения внутренней энергии на поверхности и толще среды. Современные технические методы позволили идентифицировать в картине распределения термодинамических и физических параметров жидкости отдельные ячейки, волокна, слои, оконтуренные оболочками с собственными физическими свойствами [6–9].

Ячейки с минимальными масштабами порядка размеров молекулярных кластеров, формирование которых обусловлено особенностями атомно-молекулярного строения вещества и физическими условиями опытов, включают ассоциаты различной физической и химической природы – кластеры, клатраты, кластраты, бонды, войды и др. Ячейки покрывают свободную поверхность и располагаются в толще жидкости или газа. Картина распределения термодинамических величин непрерывно перестраивается. Одни ячейки («зёрна», «гранулы») исчезают, другие появляются. Длительность существования и размеры ячеек меняются в широких диапазонах. Зрительным образом физической модели «зернистой» структуры жидкости или газа служат изображения фотосферы Солнца [10].

Оболочки ячеек, как и свободная поверхность жидкости в целом, обладают потенциальной поверхностной энергией (ППЭ), которая трансформируется в другие формы при уничтожении поверхности в целом или оболочек отдельных ячеек. Соответственно, процесс формирования оболочек сопровождается захватом и кинетической, и других форм внутренней энергии жидкости, в частности тепловой и химической, и переносом в ППЭ. Процесс формирования границ новых элементов структуры сопровождается локальным замедлением течений.

При уничтожении поверхности ППЭ непосредственно передаётся в другие формы внутренней энергии, а доступная часть поверхностной энергии (ДППЭ) формирует наиболее тонкие компоненты течений – ускоренные/замедленные струйки и плоские слои в картине распределения физических величин.

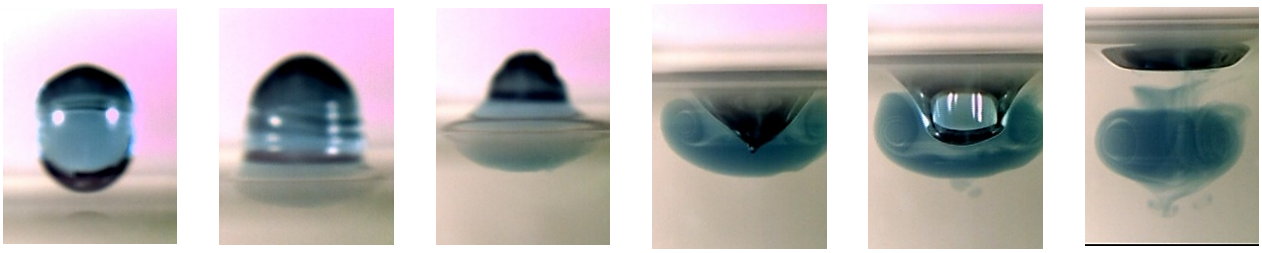
В целом процессы прямой и обратной конверсии ДППЭ являются постоянно действующим механизмом формирования тонкой структуры среды, включающей более однородные слои с погруженными внутренними волокнами и прослойками и разделяющие их резкие прослойки. Тонкие структуры течений зарегистрированы во всех доступных для наблюдений течениях в диапазоне от глобальных космических (галактических) до микроскопических масштабов. Структурированность среды обеспечивает действие нескольких

механизмов передачи энергии в течениях, включающих и макроскопические – радиационный перенос с излучением, трансляционный перенос с потоком, вихрями и волнами, и микроскопические – диффузионные и конверсионные процессы.

В аналитическом описании тонким компонентам течения соответствуют лигаменты – сингулярные решения СФУМГЖ в линейном и слабонелинейном приближениях [11, 12]. Собственные масштабы лигаментов определяют требования к выбору размеров ячеек и вида сетки, обеспечивающей разрешение тонкой структуры при проведении численных расчётов обтекания препятствий [13] и процесса формирования системы слоёв и разделяющих прослоек при боковой многокомпонентной конвекции в непрерывно стратифицированной жидкости [14].

В эксперименте макроскопические проявления действия микромасштабных механизмов переноса энергии отмечаются в закономерностях переноса вещества при слиянии свободно падающей капли окрашенной жидкости с водой. Общий вид картины распределения вещества капли в принимающей жидкости зависит от отношения кинетической En_k и ДППЭ En_σ капли $\mathrm{R}_{En} = En_k/En_\sigma$ [15].

В интрузивном режиме при $\mathrm{R}_{En} < 1$ капля растекается по поверхности и плавно втекает в толщу жидкости, где образует лентикулярное вторжение. Выборки из видеофильма приведены на рис. 1. Тонкое радиальное течение выносит поверхностные слои жидкости за границы пятна контакта. Объединённая свободная поверхность жидкости длительное время сохраняет выпуклую форму. По поверхности принимающей жидкости и капли от границы области контакта распространяются кольцевые капиллярные волны.



$t = -1.75$ мс $t = 3.0$ мс $t = 6.5$ мс $t = 16.25$ мс $t = 20.5$ мс $t = 31.5$ мс

Рис. 1: Втекание капли раствора чернил в толщу жидкости с образованием кольцевого вихря ($D = 4.3$ мм, $U = 0.34$ м/с, $E_\sigma = 4$ мкДж, $E_k = 2.24$ мкДж, $\mathrm{R}_{En} = 1.75$)

Постепенно в теле интрузии формируется кольцевой вихрь. Его спиральную структуру прорисовывает тонкий слой прозрачной принимающей жидкости, которую вовлекает из приповерхностного слоя растущий вихрь. Каверна образуется с задержкой $\Delta t \sim 10$ мс и проталкивает вниз интрузию более плотной жидкости с развивающимся вихрем. Под действием плавучести и градиента давления тяжёлая интрузия полностью трансформируется в погружающееся вихревое кольцо.

При больших скоростях падающей капли, когда $\mathrm{R} > 1$, в импактном режиме слияния образование каверны начинается практически в момент первичного контакта одновременно с формированием вылетающих в воздух тонкой конической струи (эжекты) и капель с вершин тонких струек – шипов. При этом граница раздела между жидкостями сохраняется длительное время. Эволюцию картины течения иллюстрирует серия выборок из видеофильма, приведённая на рис. 2.

В импактном режиме окрашенная капля распадается на систему тонких быстрых струек, составляющих набор радиальных волокон на деформированной поверхности жидко-

сти – стенках каверны и венца. Линейчатая картина струек быстро перестраивается в ретикулярную, составленную из трёх- и более многоугольных ячеек [16]. Жидкость капли, перетекающая вдоль волокон, собирается в узлах сетки, продавливает стенки каверны и формирует короткие вихорьки, которые трансформируются в вихревые петли при схлопывании каверны. Стенки каверны, которую деформируют вихорьки под узлами сетки, имеют сложную изменяющуюся форму (рис. 2, $t = 3.5$ мс).

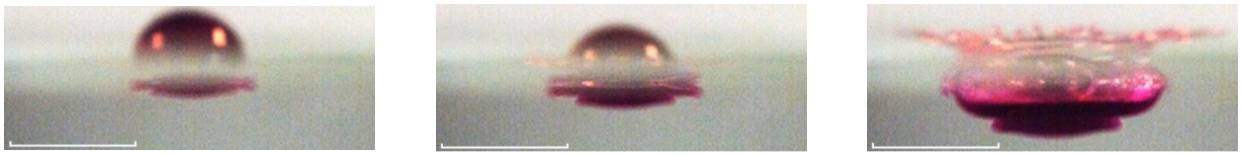
При первичном контакте тонкие волокна начинают пронизывать стенки и дно каверны. Они образуют выделенный границами промежуточный слой, в котором волокна, содержащие вещество капли, разделены принимающей жидкостью.



$t = 0.5$ мс $t = 1.25$ мс $t = 3.5$ мс

Рис. 2: Растекание капли раствора перманганата калия по поверхности каверны и венца в импактном режиме ($\rho_d = 1$ г/см^3, $D = 4.3$ мм, $U = 3.1$ м/с, $E_\sigma = 4.2$ мкДж, $E_k = 200$ мкДж, $\mathrm{R}_{En} = 48$)

Вначале волокна перфорируют всю поверхность каверны, однако уже при $t = 0.5$ мс они сохраняются только в центральной части её дна. Иллюстрирующая выборка из видеофильма приведена на рис. 3.



$t = 0.25$ мс $t = 0.5$ мс $t = 1.25$ мс

Рис. 3: Вид сбоку на картину волокон, пронизывающих дно каверны при растекании раствора перманганата калия по поверхности каверны и венца (условия опытов приведены на рис. 2, длина метки – 5 мм)

Следствием одновременного действия нескольких разномасштабных механизмов передачи, диссипации и конверсии энергии является непрерывная перестройка и локальной, и общей картины течений, обуславливающая нестационарность всех видов течений. Свойства и следствия процессов передачи полной энергии в течениях нуждаются в углублённом теоретическом и экспериментальном изучении.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124012500442-3). Эксперименты проведены на стендах УИУ «ГФК ИПМех РАН».

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomsom W. Tait P. G. *Treatise on natural philosophy.* Oxford, 1867.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. Т. 3. Механика сплошных сред. Гидродинамика и теория упругости.* М.-Л. : Гостехиздат, 1944.
3. Müller P. *The equations of oceanic motions.* Cambridge : CUP, 2006.
4. Feistel R. *Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond.* Ocean Sciences. 2018. V. 14. P. 471–502.
5. Harvey A. H., Hrubỳ J., Meier K. *Improved and always improving: reference formulations for thermophysical properties of water.* J. Phys. Chem. Ref. Data. 2023. V. 52. P. 011501.
6. Эйзенберг Д., Кауцман В. *Структура и свойства воды.* Л. : ГМИ, 1975.
7. Teschke O., De Souza E. F. *Water molecule clusters measured at water/air interfaces using atomic force microscopy.* Phys. Chem. Chem. Phys. 2005. V. 7. № 22. P. 3856–3865.
8. Bunkin N. F. [et al.] *Study of nanostructure of highly purified water by measuring scattering matrix elements of laser radiation.* Phys. Wave Phenom. 2008. V. 6. P. 243–260.
9. Malenkov G. G. *Structure and dynamics of surfaces of thin films and water microdroplets.* Colloid J. 2010. V. 72. № 5. P. 649–659.
10. Сайт: https://umbra.nascom.nasa.gov/images/latest.html.
11. Chashechkin Y. D. *Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows.* Axioms. 2021. V. 10. № 4. P. 286.
12. Chashechkin Yu. D. *Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation.* Mathematics. 2021. V. 9. № 6. P. 586.
13. Chashechkin Yu. D., Zagumennyi I. V. *2D hydrodynamics of a plate: from creeping flow to transient vortex regimes.* Fluids. 2021. V. 6. № 9. P. 310.
14. Sabbah C. [et al.] *Numerical and laboratory experiments of sidewall heating thermohaline convection.* Int. J. Heat Mass Trans. 2001. V. 44. № 14. P. 2681–2697.
15. Chashechkin Yu. D., Ilinykh A. Y. *Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest.* Axioms. 2023. V. 12. № 4. P. 374.
16. Chashechkin Y. D., Ilinykh A. Y. *Fine flow structure at the miscible fluids contact domain boundary in the impact mode of free-falling drop coalescence.* Fluids. 2023. V. 8. P. 269.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КВАДРАТНОЙ МЕМБРАНЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КУПОЛООБРАЗНОЙ НАГРУЗКИ

А. Д. Чернышов[1], *В. В. Горяйнов*[2], *Д. А. Литвинов*[1]

[1]*Воронежский государственный университет инженерных технологий*
[2]*Воронежский государственный технический университет*

В работе [1] в виде быстрых разложений [2] получено точное решение двумерного уравнения Пуассона для случая жёсткого закрепления контура прямоугольной мембраны в горизонтальной плоскости:

$$w(x,y) = -\left[Q_1\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_2\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right)\right]\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) - \\ - \left[Q_3\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_4\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right)\right]\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right), \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b. \tag{1}$$

Выражение (1) справедливо для куполообразной нагрузки [1]:

$$F(x,y) = \left[Q_1\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_2\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right)\right]\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \\ + \left[Q_3\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_4\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right)\right]\frac{x}{a} + \\ + \left[Q_1\left(1 - \frac{y}{b}\right) + Q_2\frac{y}{b}\right]\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + \left[Q_3\left(1 - \frac{y}{b}\right) + Q_4\frac{y}{b}\right]\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right), \tag{2}$$

где Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 – константы, определяемые экспериментально.

В работах [3–5] было показано, что для всех различных габаритных размеров прямоугольников, имеющих одинаковую площадь, наименьшее значение максимального напряжения $\tilde{\sigma}_{\max}$ наблюдается у квадрата. Поэтому представляет интерес исследование распределения напряжений в квадратной мембране.

В качестве материала мембраны выберем конструкционную углеродистую сталь обыкновенного качества марки ВСт3пс [6] с характеристиками [7]: $R_y = 2.35 \cdot 10^8$ Па, $\nu = 0,25$, $E = 2,13 \cdot 10^{11}$ Па, где R_y – расчётное сопротивление материала мембраны. Предполагается, что нагрузка вертикальная, и перемещениями в горизонтальной плоскости пренебрегаем.

Значения параметров a, b, Q_i, $i = 1 \div 4$, подбирались так, чтобы напряжения не превосходили расчётное сопротивление материала мембраны при двухосном напряжённом состоянии [6]:

$$\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2} = \tilde{\sigma} \le R_y, \tag{3}$$

где

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right), \quad \varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

В формулах (3) деформации мембраны описаны согласно [8, 9]. В ходе вычислительных экспериментов получено, что на распределение напряжений в квадратной мембране

влияет вид куполообразной нагрузки: симметричная или несимметричная. Среди всех возможных комбинаций значений Q_i, $i = 1 \div 4$, можно выделить пять наиболее значимых.

1. Если $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4$, то нагрузка (2) симметричная, т. е. нагрузка имеет две плоскости симметрии $x = a/2$ и $y = a/2$, проходящие через центр мембраны параллельно координатным осям. В этом случае квадратная мембрана будет иметь четыре точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$, расположенные в серединах сторон квадрата.

2. Если $Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3 \neq Q_4 \neq 0$, то нагрузка (2) – несимметричная, т. е. плоскостей симметрии нет. При подобной нагрузке у квадратной мембраны будет только одна точка с $\tilde{\sigma}_{\max}$, и расположена она в окрестности середины наиболее нагруженной стороны.

3. Если только один из коэффициентов Q_i, $i = 1 \div 4$, не равен нулю, то нагрузка (2) имеет одну плоскость симметрии, проходящую через диагональ, содержащую нагруженную вершину. В этом случае у мембраны будут две точки с максимальным напряжением $\tilde{\sigma}_{\max}$, расположенные в окрестностях середин сторон, смежных с нагруженной вершиной.

4. Если же только один из коэффициентов Q_i, $i = 1 \div 4$, равен нулю, то нагрузка (2) – несимметричная. У мембраны будут две точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$, расположенные в окрестностях середин сторон, смежных с той нагруженной вершиной, которая находится напротив ненагруженной вершины.

5. При равенстве нулю двух коэффициентов из Q_i, $i = 1 \div 4$, возможны два варианта в зависимости от того, как расположены две нагруженные вершины – на одной стороне квадрата или по диагонали.

Если вершины только одной диагонали квадрата нагружены, причём одинаково (например $Q_1 = Q_4 = 0$ и $Q_2 = Q_3 \neq 0$), то в этом случае имеем симметричную нагрузку (2) с двумя плоскостями симметрии, проходящими через диагонали квадратной мембраны, и мембрана будет иметь четыре точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$, расположенные в окрестностях середин сторон. Если же вершины только одной диагонали квадрата нагружены не одинаково (например $Q_1 = Q_4 = 0$ и $Q_2 \neq Q_3 \neq 0$), то имеем нагрузку (2) с одной плоскостью симметрии, проходящую через диагональ, содержащую обе нагруженные вершины. В этом случае у мембраны будут две точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$, расположенные в окрестностях середин сторон, смежных с наиболее нагруженной вершиной.

Если вершины только одной стороны квадрата нагружены, причём одинаково (например $Q_1 = Q_2 = 0$ и $Q_3 = Q_4 \neq 0$), то в этом случае имеем симметричную нагрузку (2) с одной плоскостью симметрии, проходящей через середину нагруженной стороны квадратной мембраны, параллельно сторонам, и мембрана будет иметь одну точку с $\tilde{\sigma}_{\max}$, расположенную в середине нагруженной стороны.

Если же вершины только одной стороны квадрата нагружены, причём не одинаково (например $Q_1 = Q_2 = 0$ и $Q_3 \neq Q_4 \neq 0$), то в этом случае имеем несимметричную нагрузку (2), и мембрана будет иметь одну точку с $\tilde{\sigma}_{\max}$, расположенную в окрестности середины нагруженной стороны.

В заключение отметим, что при наличии у квадратной мембраны плоскостей симметрии они проходят через центр мембраны. Причём если плоскости симметрии параллельны координатным плоскостям, то точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$ будут располагаться в серединах нагруженных сторон. Если же плоскости симметрии проходят через диагонали квадрата или нагрузка не симметричная, то точки с $\tilde{\sigma}_{\max}$ будут располагаться в окрестностях середин нагруженных сторон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернышов А. Д. [и др.] *Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки.* Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 127–142.
2. Чернышов А. Д. *Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений.* Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 13–24.
3. Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Kovaleva E. N. *Simulation of the stress-deformed state of a rectangular bar using fast trigonometric interpolation in various statements of boundary value problems.* Materials Physics and Mechanics. 2023. V. 51. № 4. P. 160–171.
4. Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Попов М. И. *Исследование погрешности быстрой тригонометрической интерполяции при решении задачи о напряжениях в брусе.* Известия РАН. Механика твердого тела. 2023. № 1. С. 115–128.
5. Горяйнов В. В. [и др.] *Исследование напряжений в прямоугольной мембране, закрепленной по всей длине одной стороны и в углах противоположной стороны.* Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 4. С. 14–25.
6. Еремеев П. Г. *Пространственные тонколистовые металлические конструкции покрытий.* М. : Издательство ассоциации строительных вузов, 2006. 560 с.
7. Сайт http://metallicheckiy-portal.ru/marki_metallov/stk/VSt3ps.
8. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. *Пластины и оболочки.* М. : Наука, 1966. 636 с.
9. Галимов Н. К., Якупов С. Н. *Определение параметров пластического деформирования эллиптических мембран.* Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 90–95.

ГРАНИЦЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ АНОМАЛЬНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ВОЗДУХА В КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ С ПОДВИЖНОЙ КРЫШКОЙ

В. А. Шарифулин[1,2], *Ф. С. Белобородов*[2], *А. Н. Шарифулин*[2], *Т. П. Любимова*[1]

[1]*Институт механики слошных сред УрО РАН, Пермь*
[2]*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

Известно (см. обзор в [1]), что при равномерном подогреве снизу конвективные течения возникают пороговым образом в результате потери устойчивости состояния покоя жидкости при превышении числом Рэлея критического значения Ra_c. При этом в квадратной полости наблюдается вырождение надкритических движений, заключающееся в том, что возможны два устойчивых одновихревых стационарных надкритических режима, отличающихся только направлением циркуляции. Это вырождение снимается при введении несимметричной внешней силы, такой как, например, наклон полости или движение одной из стенок. Наклон рабочей ячейки влияет на конвекцию в ней интегрально по всему объёму жидкости, тогда как движение стенки локально воздействует только вблизи движущегося торца. Эти два способа снятия вырождения принципиально отличаются тем, что наклон полости в отсутствие нагрева не может вызвать движение в жидкости, а движение стенки приводит к появлению одновихревого течения в полости даже в изотермических условиях [2, 3].

Вынужденная тепловая конвекция воздуха в замкнутых прямоугольных областях представляет интерес в связи с тем, что такие полости являются элементами большого числа технических устройств.

В [4–7] показано, что наклон ячейки приводит к тому, что одно из возникающих надкритических течений становится аномальным и возможно лишь в узком диапазоне углов наклона, меньших по абсолютной величине порогового угла. Зависимость предельного угла наклона от надкритичности имеет максимум [5–7], т. е. с ростом числа Грасгофа Gr предельный угол сначала увеличивается, достигает максимума примерно при трёх надкритичностях, а затем с ростом Gr плавно уменьшается практически до нуля в области примерно двадцатикратной надкритичности.

Исследование влияния движения верхней стенки полости на надкритические конвективные режимы было начато в [8], где показано, что движение стенки также приводит к тому, что одно из надкритических течений становится аномальным, существующим лишь при достаточно малых значениях числа Рейнольдса. Расчёт для значения числа Прандтля $\mathrm{Pr} = 1$ и двух значений числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = -2$ и -20 показал, что при первом значении числа Рейнольдса в полости в исследованном диапазоне чисел Рэлея до трёх надкритичностей возможны два устойчивых движения – одновихревое и аномальное двухвихревое, а при втором значении реализуется только нормальное одновихревое течение, совпадающее по форме и направлению циркуляции с течением, реализующимся в отсутствие нагрева, т. е. при числе Рэлея $\mathrm{Ra} = 0$. Критическое значение числа Рейнольдса, выше которого аномальное двухвихревое течение становится невозможным, и его зависимость от надкритичности $r = \mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_c$ не были определены.

В настоящей работе в рамках маломодового приближения методом Галёркина получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, подобная системе Лоренца для

амплитуд отклонений от равновесия в отсутствие движения крышки. Получена бифуркационная кривая, отражающая зависимость критического числа Рейнольдса от интенсивности нагрева, для различных скоростей верхней стенки и надкритичности r. Поверхность стационарных состояний представлена на рис. 1.

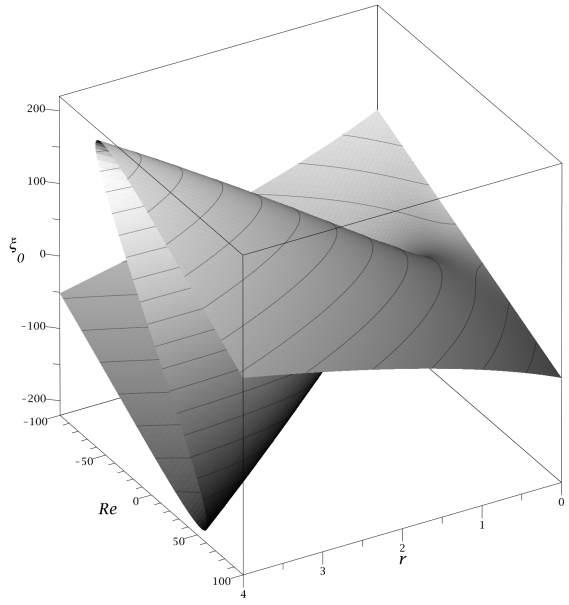


Рис. 1: Поверхность стационарных состояний (r, Re, ψ_m), где ψ_m – значение функции тока, модуль которого максимален

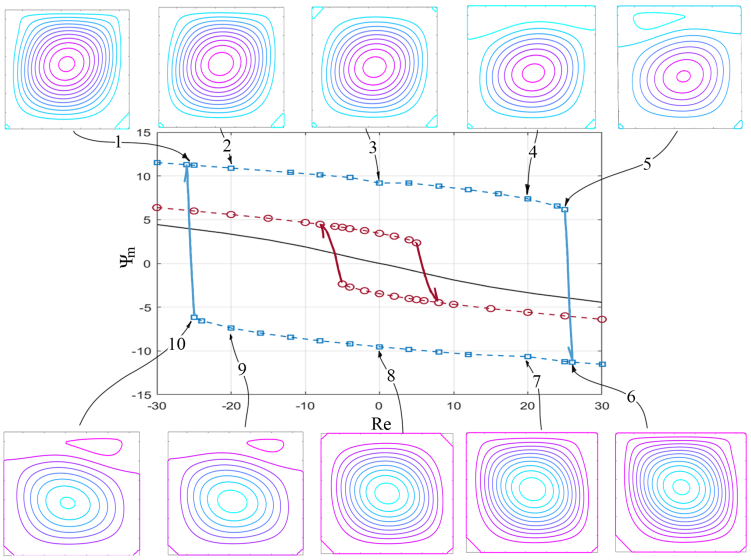


Рис. 2: Зависимость значения функции тока ψ_m, модуль которого максимален, от числа Рейнольдса Re для трёх значений надкритичности r. Сплошная линия соответствует $r = 0,71$; пунктирная с кружками (квадратами) – $r = 1,37$ ($r = 3,71$). На вставках 1, 2, 3, 6, 7, 8 (4, 5, 9, 10) показаны линии тока нормального (аномального) течения

Развитые режимы исследовались методом конечных разностей для надкритичностей до 30 (см. рис. 2). Исследование влияния плавного изменения скорости верхней стенки,

т. е. числа Рейнольдса Re, показало, что для каждого надкритического значения числа Грасгофа существует предельное значение числа Рейнольдса такое, что при изменении числа Рейнольдса в пределах некоторого интервала течение перестраивается, плавно меняя структуру с нормального одновихревого на аномальное двухвихревое и наоборот. Если изменение числа Рейнольдса выходит за пределы указанного интервала, происходит жёсткий гистерезисный переход (помечен на рис. 2 стрелками) от аномального течения к нормальному.

Работа выполнена в рамках крупного научного проекта при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-15-2024-535 от 23.04.2024).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids.* Keter, Jerusalem, 1976. 330 p.
2. Kawaguti M. *Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow in a two-dimensional cavity.* J. Phys. Society of Japan. 1961. № 16(11). P. 2307–2315.
3. Simuni L. *Mixing of two-dimensional laminar jets.* Fluid Dyn. 1966. № 1(1). P. 107–107.
4. Cliffe K., Winters K. *A numerical study of the cusp catastrophe for benard convection in tilted cavities.* J. Comput. Phys. 1984. № 54(3). P. 531–534.
5. Nikitin A., Sharifulin A. *Concerning the bifurcations of steady-state thermal convection regimes in a closed cavity due to the whitney folding-type singularity.* Heat transfer. Soviet research. 1989. № 21(2). P. 213–221.
6. Sharifulin A., Poludnitsin A., Kravchuk A. *Laboratory-scale simulation of non-local generation of a tropical cyclone.* J. Exp. Theor. Phys. 2008. № 107. P. 1090–1093.
7. Sharifulin A. N., Poludnitsin A. N. *The borders of existence of anomalous convection flow in the inclined square cylinder: Numerical determination.* St. Petersburg Polytechnical University. J. Phys. & Mathem. 2016. № 2(2). P. 150–156.
8. Tarunin E. L. *Branching of solutions of convection equations in a closed cavity with a movable boundary when heated from below.* In: Modern Problems of Thermal Gravitational Convection. Minsk, 1976. P. 51–56.

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДАЛЬНЕЙ ОБЛАСТИ ЗАКРУЧЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА

А. В. Шмидт

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Для описания течения в дальних областях закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом привлекается следующая математическая модель [1]:

$$U_0\frac{\partial U_1}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(C_\mu r\frac{e^2}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial r}\right),\quad U_0\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(C_\mu r^3\frac{e^2}{\varepsilon}\frac{\partial W/r}{\partial r}\right),$$

$$U_0\frac{\partial e}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(C_\mu r\frac{e^2}{\varepsilon}\frac{\partial e}{\partial r}\right)-\varepsilon,\quad U_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{C_\mu}{\sigma}\,r\frac{e^2}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right)-C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{e}\,.$$

В уравнениях модели используются следующие обозначения: U_0 – скорость набегающего на тело невозмущённого потока; U_1 – дефект продольной осреднённой компоненты скорости; W – тангенциальная осреднённая компонента скорости; e – кинетическая энергия турбулентности; ε – скорость её диссипации; C_μ, σ, $C_{\varepsilon 2}$ – эмпирические постоянные модели.

С помощью автомодельной редукции

$$U_1=x^\beta U_2(t),\quad W=x^\gamma W_1(t),\quad e=x^{2\alpha-2}K(t),\quad \varepsilon=x^{2\alpha-3}E(t),\quad t=r/x^\alpha$$

исходная модель сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой задаются следующие краевые условия:

$$U_2'(0)=W_1(0)=K'(0)=E'(0)=0,\quad U_2(a)=W_1(a)=K(a)=E(a).$$

Для построения приближённого решения данной краевой задачи на основе подхода [2] асимптотическое разложение решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки a склеивалось при $t=0$ с разложением решения системы ОДУ в точке $t=0$ в степенной ряд. В процессе построения приближённого решения определялись показатель автомодельности α и законы вырождения β и γ.

Полученные значения искомых функций при $t=0$ использовались в качестве данных для пристрелки при решении рассматриваемой краевой задачи методом стрельбы. Проведено сопоставление приближённого и численного решения, а также сопоставление с результатами работы [1].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

ЛИТЕРАТУРА

1. Деменков А. Г., Черных Г. Г. *Численное моделирование вырождения закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом.* Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23. № 5. С. 693–702.
2. Шмидт А. В. *Приближенное решение задачи о течении в дальнем плоском безымпульсном турбулентном следе.* ПМТФ. 2023. Т. 64. № 6. С. 53–59.

КОНВЕКЦИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ С ЭФФЕКТОМ СОРЕ В НАКЛОННОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

И. С. Шубенков[1,2], *Т. П. Любимова*[1,2]

[1]*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*
[2]*Пермский государственный национальный исследовательский университет*

В данной работе исследуются возникновение и нелинейные режимы конвекции бинарной жидкости с эффектом Соре в наклонном пористом слое под действием тяжести и строго вертикального градиента температуры. Рассматриваемая проблема важна для геологических приложений. В первой части работы исследуется линейная устойчивость состояния механического равновесия по отношению к трёхмерным возмущениям. Установлено, что при любом угле наклона слоя трёхмерные возмущения более опасны, чем двумерные, а наиболее опасные возмущения имеют форму продольных валов. Во второй части работы численно методом конечных разностей исследуются нелинейные режимы конвекции, возникающие после потери устойчивости равновесия.

Конвекция в наклонном пористом слое часто вызывает интерес, когда речь идет об эксплуатации геотермальных резервуаров и потоков грунтовых вод [1]. Другими важными областями являются транспортировка загрязняющих веществ, добыча нефти и переработка пищевых продуктов. Как правило, жидкости и газы, насыщающие пористые среды, имеют сложный состав. Это приводит к необходимости учёта эффектов диффузии, термодиффузии и других [2].

Конвекция бинарной смеси, насыщающей горизонтальную полость пористой среды, нагреваемую снизу, изучена Эльхаджаром и др. [3]. Установлено, что при повышении коэффициента разделения выше некоторого критического значения чисто диффузионное равновесное состояние сменяется конвективным движением. Движение является одноячеистым и приводит к разделению компонентов между вертикальными границами полости. Значение числа Рэлея, приводящее к максимальному разделению, оказывается больше, чем для вертикальной полости.

Задачи о тепловой конвекции жидкости в наклонном слое пористой среды обычно исследуются для случая, когда границы слоя поддерживаются при постоянных разных температурах и бесконвективное состояние невозможно. При любых перепадах температур между стенками полости имеется основное стационарное течение, а при повышении перепада температур, в результате неустойчивости основного течения, возникает вторичное течение, наложенное на основное.

В [4, 5] исследовано возникновение и развитие тепловой конвекции в наклонном пористом слое, насыщенном жидкостью, в поле силы тяжести, при строго вертикальном градиенте температуры. Установлено, что при любом угле наклона слоя трёхмерные возмущения более опасны, чем двумерные, причём наиболее опасные возмущения имеют форму продольных валов. Для углов наклона слоя $\alpha < 45^\circ$ критические возмущения являются длинноволновыми, а для $\alpha > 45^\circ$ – ячеистыми.

В настоящей работе исследуется конвекция бинарной смеси жидких углеводородов тетралина и додекана, взятых в равных долях, в бесконечном горизонтальном слое пористой среды под действием строго вертикального градиента температуры.

Постановка задачи. Рассматривается термоконцентрационная конвекция в бесконечном горизонтальном слое пористой среды, насыщенной бинарной смесью тетралина и додекана в равных долях, наклонённом под углом α к вертикали. Ось x направлена вдоль слоя, ось y перпендикулярна стенкам слоя. Система находится в поле силы тяжести. Предполагается, что границы области – твёрдые, идеально теплопроводные, непроницаемые для примеси стенки, на которых задаётся распределение температуры, соответствующее строго вертикальному градиенту температуры.

Предполагается, что вязкость и коэффициенты переноса постоянны, а плотность смеси линейно зависит от температуры T и концентрации примеси C:

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)\right]. \tag{1}$$

Задача рассматривается в рамках уравнений Дарси – Буссинеска [6] с учётом эффекта термодиффузии:

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P - \frac{\nu}{K} \mathbf{V} - \mathbf{g}[(\beta_T (T - T_0) + \beta_C (C - C_0)], \tag{2}$$

$$(\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \mathbf{V} \cdot \nabla T = \lambda^* \nabla^2 T, \tag{3}$$

$$\varepsilon^* \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = \mathrm{D} \nabla^2 C + C_0 (1 - C_0) \mathrm{D}_T \nabla^2 T, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{5}$$

Обезразмерим и линеаризуем по возмущениям уравнения (2)–(5). С целью исключения давления и горизонтальных компонент скорости применим к уравнению импульса операцию $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}_y$ и рассмотрим нормальные монотонные возмущения вида

$$V' = \varphi(y) \cdot e^{i(k_x + k_z)}, \tag{6}$$

$$T' = \theta(y) \cdot e^{i(k_x + k_z)}, \tag{7}$$

$$C' = \xi(y) \cdot e^{i(k_x + k_z)}, \tag{8}$$

где k_x, k_z – волновые числа в направлениях x и z соответственно. Получим уравнение импульса

$$\Delta\varphi + i\zeta k \mathrm{Ra} \cos\alpha \cdot (\theta' - \psi' \cdot \xi') - k^2 \mathrm{Ra} \sin\alpha \cdot (\theta + \psi \cdot \xi) = 0. \tag{9}$$

Расписав основные уравнения по компонентам, исключая V_x и V_z – компоненты скорости, и учитывая (6)–(8), получаем уравнение теплопроводности и уравнение для концентрации в виде

$$\Delta\theta - \mathrm{Ra}\varphi \sin\alpha + i\mathrm{Ra}\frac{\zeta}{k} \varphi' \cos\alpha + \mathrm{Ra}^2 \cos^2\alpha (1 - \zeta^2)(\theta + \psi \cdot \xi) = 0, \tag{10}$$

$$\Delta\eta + \psi\varphi \mathrm{Le} - \psi(\theta'' - k^2\theta) = 0, \tag{11}$$

где $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, $\Delta = \partial_{yy}^2 - k^2$, $\zeta = k_z/k$ – параметр трёхмерности.

Далее для удобства введём новую функцию $\eta = \xi - \theta$, являющуюся комбинацией возмущений концентрации и температуры. Получим систему уравнений для амплитуд φ, θ, η в виде

$$\Delta\varphi + i\zeta k \mathrm{Ra} \cos\alpha \cdot [\theta'(1 - \psi) - \psi \cdot \eta'] - k^2 \mathrm{Ra} \sin\alpha \cdot [\theta(1 + \psi) + \psi \cdot \eta] = 0, \tag{12}$$

$$\Delta\theta - \mathrm{Ra}\varphi\sin\alpha + i\mathrm{Ra}\frac{\zeta}{k}\varphi'\cos\alpha + \mathrm{Ra}^2\cos^2\alpha(1-\zeta^2)[\theta(1+\psi)+\psi\cdot\eta] = 0, \tag{13}$$

$$\Delta\eta + \psi\varphi\mathrm{Le} + (1-\psi)(\theta'' - k^2\theta) = 0. \tag{14}$$

Граничные условия для φ, θ, η имеют вид

$$y = -1, 1: \quad \varphi = 0, \quad \theta = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \tag{15}$$

Линейная устойчивость механического равновесия. Вначале рассматривалась линейная устойчивость состояния механического равновесия системы. Задача (12)–(14) с граничными условиями (15) решалась численно методом построения фундаментальной системы решений. Исследование проводилось при фиксированных значениях отношения разделения и числа Льюиса, соответствующих смеси тетралина и додекана в равных долях: $\psi = 0.694$, $\mathrm{Le} = 150$. Остальные параметры варьировались.

На рис. 1 приведены зависимости минимального критического числа Рэлея от угла наклона слоя при различных значениях параметра трёхмерности ζ. Как видно, абсолютный минимум критического числа Рэлея реализуется при $\zeta = 0$ (валы с осями, направленными вдоль слоя и перпендикулярными оси, относительно которой имеет место наклон слоя), причём эти возмущения являются наиболее опасными во всем диапазоне углов наклона слоя. При переходе через $\zeta \approx 0.88$ кривые меняют характер наклона и появляется скачок. Это связано со сменой локального минимума на нейтральных кривых.

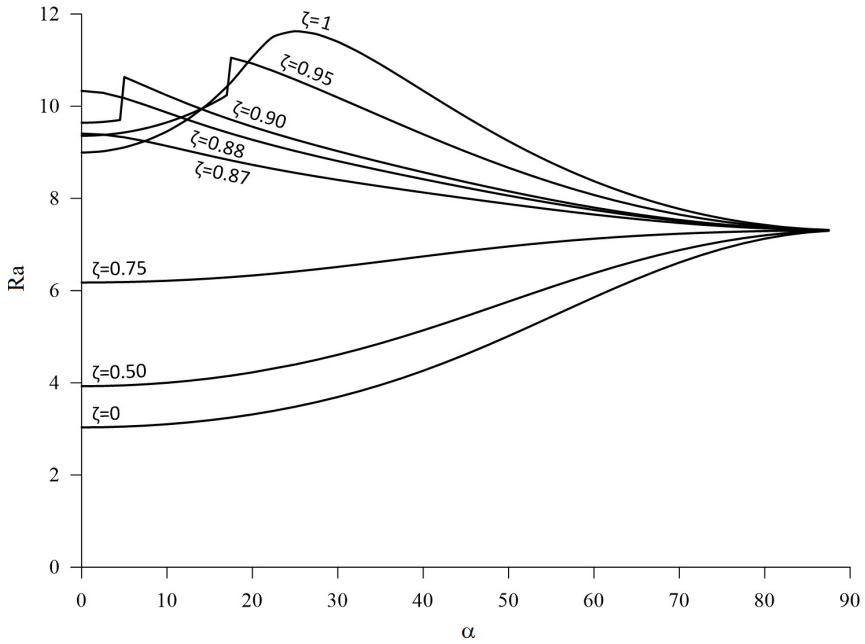


Рис. 1: Зависимости минимального критического числа Рэлея от угла наклона слоя при различных значениях параметра трёхмерности ζ

Анализ зависимостей волнового числа наиболее опасных возмущений от угла наклона слоя для различных значений параметра трёхмерности показал, что при всех углах наклона слоя наиболее опасные возмущения являются ячеистыми.

Проведено также прямое численное моделирование трёхмерных нелинейных режимов конвекции с помощью метода конечных объёмов.

Установлено, что наиболее опасным типом возмущений во всём диапазоне углов наклона слоя являются спиральные возмущения (валы с осями, направленными вдоль слоя и перпендикулярными оси, относительно которой имеет место наклон слоя). Причём, в отличие от задачи о конвекции однокомпонентной жидкости в наклонном пористом слое, где в зависимости от угла наклона слоя могут реализовываться как ячеистые, так и длинноволновые возмущения, в рассмотренном в работе случае конвекции бинарной смеси во всём диапазоне углов наклона слоя наиболее опасные возмущения имеют ячеистую структуру.

Работа выполнена в рамках крупного научного проекта при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-15-2024-535 от 23 апреля 2024 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Matta A. *Thermal convection in an inclined porous layer with effect of heat source.* In: Srinivasacharya D., Reddy K. (Eds.) Numerical heat transfer and fluid flow. Singapore : Springer, 2019. P. 47–54.
2. Collell J. [et al.] *Transport of multicomponent hydrocarbon mixtures in shales organic matter by molecular simulations.* J. Phys. Chem. 2015. V. 119. Iss. 39. P. 22587-2259.
3. Elhajjar B., Charrier-Mojtabi M. C., Mojtabi A. *Separation of a binary fluid mixture in a porous horizontal cavity.* Phys Rev E. 2008. V. 77(2). 026310.
4. Lyubimova T. P., Muratov I. D., Shubenkov I. S. *Onset and non-linear regimes of convection in an inclined porous layer subjected to vertical temperature gradient.* Phys Fluids. 2022. V. 34. 094114.
5. Shubenkov I., Lyubimova T., Sadilov E. *Three-dimensional convection in an inclined porous layer subjected to vertical temperature gradient.* Fluid Dyn. & Mater. Proc. 2024. V. 20(5). P. 1093–1102.
6. Nield D. A., Bejan A. *Convection in porous media.* Springer. 2013.

RESONANCE PROPERTIES OF A BEAM WITH A MOVING BOUNDARY LYING ON AN ELASTIC FOUNDATION

Vladislav L. Litvinov[1,2], *Kristina V. Litvinova*[1,2]

[1]*Lomonosov Moscow State University*
[2]*Samara State Technical University*

Currently, the reliability issues in the design of machines and mechanisms require more and more complete consideration of the dynamic phenomena occurring in the objects being designed. The widespread use in technology of mechanical objects with moving boundaries necessitates the development of methods for their calculation. The problem of oscillations of systems with moving boundaries is associated with obtaining solutions of integro-differential equations and partial differential equations in time-varying domains [1–10]. Such problems are currently insufficiently studied. Their peculiarity is the difficulty of using known methods of mathematical physics suitable for problems with fixed boundaries. The complexity of the solutions obtained is explained by the fact that there is still no sufficiently general approach to analyzing the features of the dynamics of such systems. In connection with the danger of resonance, the study of forced oscillations is of great importance here. Attempts have been made to study this process, but the results obtained are limited mainly to a qualitative description of dynamic phenomena [1–4]. In addition, it is recognized that deterministic modeling of systems cannot be adequate for some types of problems, so it is necessary to move on to probabilistic-statistical modeling, where random variables and stochastic fluctuations are present. When solving here, predominantly approximate methods are used [5–9], since obtaining exact solutions is possible only in the simplest cases [10]. If the damping of transverse vibrations occurs primarily due to the action of external damping forces, then in the case of longitudinal vibrations, the damping is mainly affected by elastic imperfections in the material of the vibrating object [5–10]. The study of viscoelasticity includes an analysis of the stochastic stability of stochastic viscoelastic systems, their reliability, etc. The work examines stochastic linear longitudinal vibrations of a viscoelastic beam with moving boundaries lying on an elastic foundation, taking into account the influence of damping forces. The case of a difference kernel allows us to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integrodifferential equations to studying a system of stochastic differential equations. To estimate the expansion coefficients, it is proposed to use the statistical numerical Monte Carlo method [11].

REFERENCE

1. Savin G. N., Goroshko O. A. *Dynamics of a variable length thread.* Kiev : Naukova dumka, 1962. 332 p.
2. Samarin Yu. P. *On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space.* Appl. Mathem. & Mech. 1964. V. 26. № 3. P. 77–80.
3. Vesnitsky A. I. *Waves in systems with moving boundaries and loads.* Moscow : Fizmatlit, 2001. 320 p.
4. Lezhneva A. A. *Bending vibrations of a beam of variable length.* Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mech. 1970. № 1. P. 159–161.
5. Litvinov V. L. *Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations.* Tr. Institute of Mathematics and Mechanics. Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020. V. 26. № 2. P. 188–199.

6. Anisimov V. N., Litvinov V. L. *Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries*. Vestn. Himself. tech. un-t. Ser. Phys and Mathem. Sci. 2015. V. 19. № 2. P. 382–397.
7. Anisimov V. N., Litvinov V. L. *Mathematical modeling and study of the resonance properties of mechanical objects with a changing boundary: monograph*. Samara : Samar. state tech. un–t, 2020. 100 p.
8. Litvinov V. L., Anisimov V. N. *Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries*. Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2018. № 2. P. 70–77.
9. Litvinov V. L., Anisimov V. N. *Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction*. Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. V. 19. № 4. P. 161–165.
10. Litvinov V. L., Anisimov V. N. *Mathematical modeling and research of oscillations of one–dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph*. Samara : Samar. state tech. un–t, 2017. 149 p.
11. Elepov B. S. [et al.] *Solution of boundary value problems by the Monte Carlo method*. Novosibirsk : Nauka, 1980. 174 p.

Авторские данные

Авдейчик Евгений Валерьевич, Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, **e-mail:** zhenya_avdeychik@mail.ru

Алабужев Алексей Анатольевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Пермский государственный национальный исследовательский университет, **e-mail:** alabuzhev@mail.ru

Андреев Виктор Константинович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** andr@icm.krasn.ru

Анисимова Мария Александровна, Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, **e-mail:** anisimova_mawa@mail.ru

Антонов Артем Михайлович, Институт механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», Нижний Новгород, **e-mail:** artem.antonov@autorambler.ru

Белобородов Филипп Сергеевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** beloborodov.filipp@gmail.com

Белолипецкий Виктор Михайлович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** belolip@icm.krasn.ru

Биллер Анастасия Михайловна, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** kam@icmm.ru

Болдырева Ольга Юрьевна, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, **e-mail:** olga.boldyreva@mail.ru

Брацун Дмитрий Анатольевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** dabracun@pstu.ru

Вахнина Ольга Владимировна, Волгоградский государственный аграрный университет (ВолГАУ), Волгоград, **e-mail:** ovahnina@bk.ru

Вахрамеев Игорь Викторович, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** vahrameevi@mail.ru

Вирц Рудольф Александрович, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** virtsrudolf@gmail.com

Володько Ольга Станиславовна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** olga.pitalskaya@gmail.com

Генова Светлана Николаевна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** sv@icm.krasn.ru

Гилёв Николай Игоревич, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, **e-mail:** gilevnick@gmail.com

Гилёв Павел Вячеславович, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** pavel.gilev.2000@mail.ru

Глухов Антон Александрович, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, **e-mail:** antonglukhov2012@yandex.com

Голубев Василий Иванович, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, **e-mail:** w.golubev@mail.ru

Голых Роман Николаевич, Бийский технологический институт (филиал) АлтГТУ, Бийск, **e-mail:** romangl90@gmail.com

Гончарова Ольга Николаевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** gon@math.asu.ru

Горяйнов Виталий Валерьевич, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, **e-mail:** gorvit77@mail.ru

Губайдуллин Амир Анварович, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, **e-mail:** a.a.gubaidullin@yandex.ru

Губарева Кристина Владимировна, Самарский государственный технический университет, Самара, **e-mail:** r.kristina2017@mail.ru

Гусева Евгения Кирилловна, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, **e-mail:** guseva.ek@phystech.edu

Данилов Павел Дмитриевич, Бийский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова», Бийск, **e-mail:** nopepal@mail.ru

Денисова Ирина Владимировна, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург **e-mail:** denisovairinavlad@gmail.com

Дёмин Виталий Анатольевич, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, **e-mail:** demin@psu.ru

Дёмин Фёдор Витальевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь.

Дёмина Татьяна Витальевна, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь.

Доброхотов Сергей Юрьевич, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** s.dobrokhotov@gmail.com

Дудин Дмитрий Сергеевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** dudin.d@icmm.ru

Дудко Дина Николаевна, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, **e-mail:** d_dina@bk.ru

Епифанов Виктор Павлович, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** evp@ipmnet.ru

Ерёмин Антон Владимирович, Самарский государственный технический университет, Самара, **e-mail:** a.v.eremin@list.ru

Ерофеев Владимир Иванович, Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, **e-mail:** erof.vi@yandex.ru

Жилин Александр Александрович, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Сибирский государственный университет водного транспорта, Новосибирск, **e-mail:** lab20@itam.nsc.ru

Завьялова Кристина Николаевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** : kristina-zavyalova-1996@mail.ru

Зайцев Дмитрий Кириллович, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, **e-mail:** zaitsev-aero@yandex.ru

Зализняк Виктор Евгеньевич, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** vzalizniak@mail.ru

Золотов Олег Александрович, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** ozolot_@mail.ru

Золотова Ольга Павловна, Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева, Красноярск, **e-mail:** zolotova@sibsau.ru

Зотов Игорь Николаевич, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** izotov@sfu-kras.ru

Зубров Иван Евгеньевич, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** i.zubrov@mail.ru

Иванова Елена Александровна, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург **e-mail:** elenaivanova239@gmail.com

Иванцов Андрей Олегович, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** aivantsov@icmm.ru

Ильиных Андрей Юрьевич, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** ilynykh@ipmnet.ru

Ильясов Хисам Хисамович, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** ilyasov@ipmnet.ru

Кадыйров Айдар Ильдусович, Институт энергетики и перспективных технологий ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, **e-mail:** aidarik@rambler.ru

Казаков Александр Леонидович, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, **e-mail:** kazakov@icc.ru

Келлер Илья Эрнстович, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** kie@icmm.ru

Кириллов Павел Иванович, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** Tea2805@mail.ru

Клочков Михаил Юрьевич, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ), Волгоград, **e-mail:** m.klo4koff@yandex.ru

Клочков Юрий Васильевич, Волгоградский государственный аграрный университет (ВолГАУ), Волгоград, **e-mail:** klotchkov@bk.ru

Князева Анна Георгиевна, Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, **e-mail:** anna-knyazeva@mail.ru

Конон Павел Николаевич, Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, **e-mail:** kononpn@mail.ru

Крюкова Ольга Николаевна, Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, **e-mail:** okruk@ispms.ru

Кулагина Алиса Николаевна, Институт энергетики и перспективных технологий ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, **e-mail:** alisakylagina208@gmail.com

Лавринов Виталий Валериевич, Институт оптики атмосферы им. В. Е. Зуева СО РАН, Томск **e-mail:** lvv@iao.ru

Лавринова Лидия Николаевна, Институт оптики атмосферы им. В. Е. Зуева СО РАН, Томск **e-mail:** lnl@iao.ru

Лапшина Кристина Юрьевна, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** krislapshina03@gmail.com

Ласковец Екатерина Валерьевна, Алтайский государственный университет, Барнаул; Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** katerezanova@mail.ru

Лемешкова Елена Николаевна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** elena_cher@icm.krasn.ru

Литвинов Дмитрий Анатольевич, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, **e-mail:** d77013378@yandex.ru

Любимова Татьяна Петровна, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** lyubimovat@mail.ru

Магденко Евгений Петрович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** magdenko_evgeniy@icm.krasn.ru.ru

Макаров Евгений Евгеньевич, Алтайский государственный университет, Барнаул, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** evgeniimakarov1995@gmail.com

Максимов Александр Борисович, Керченский государственный морской технологический университет, Керчь, **e-mail:** aleksandrmks@yandex.ru

Максимова Анна Алексеевна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** sokolova.ann2001@gmail.com

Мердеева Ясмина Рамилевна, Институт энергетики и перспективных технологий ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, **e-mail:** merdeeva04@gmail.com

Мизёв Алексей Иванович, Институт механики сплошных сред ПФИЦ УрО РАН, Пермь, **e-mail:** alex_mizev@icmm.ru

Мошева Елена Александровна, Институт механики сплошных сред ПФИЦ УрО РАН, Пермь, **e-mail:** mosheva@icmm.ru

Найденова Кристина Евгеньевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** kristina-akulova00@mail.ru

Наседкин Андрей Викторович, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, **e-mail:** avnasedkin@sfedu.ru

Наседкина Анна Андреевна, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, **e-mail:** aanasedkina@sfedu.ru

Нестерович Светлана Сергеевна, Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, **e-mail:** lana_mjat@mail.ru.

Николаев Анатолий Петрович, Волгоградский государственный аграрный университет (ВолГАУ), Волгоград, **e-mail:** anpetr40@yandex.ru

Новиков Антон Евгеньевич, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** aenovikov@bk.ru

Новиков Евгений Александрович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** novikov@icm.krasn.ru

Номбре Светлана Борисовна, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, **e-mail:** s.b.nombre@donnasa.ru

Оглезнева Кристина Николаевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** kristina-zavyalova-1996@mail.ru

Очиров Артём Александрович, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** otchirov@mail.ru

Папин Александр Алексеевич, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** papin@math.asu.ru

Парфёнова Елена Сергеевна, Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, **e-mail:** linasergg@mail.ru

Пачева Марина Николаевна, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, **e-mail:** pacheva.m.n@mail.ru

Пашковский Дмитрий Максимович, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, **e-mail:** mr.vivivilka@icloud.com

Пекарская Татьяна Андреевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** pekarskayat@yandex.ru

Перельмутер Михаил Натанович, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** perelm@ipmnet.ru

Петраков Игорь Евгеньевич, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** petrigr@icm.krasn.ru

Петров Игорь Борисович, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, **e-mail:** petrov@mipt.ru

Петухов Дмитрий Сергеевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** petuhovds@mail.ru

Пешков Илья Михайлович, Университет Тренто, Тренто, Италия, **e-mail:** ilya.peshkov@unitn.it

Погосян Вардан Баландурович, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** vardan.pogosyn@yandex.ru

Полянский Дмитрий Дмитриевич, ФГБОУ ВО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», Макеевка, **e-mail:** d.d.polyanskiy@donnasa.ru

Примаков Антон Вадимович, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** primakow@itam.nsc.ru

Пяткова Анна Владимировна, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, **e-mail:** annyakovenko@yandex.ru

Райхер Юрий Львович, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** raikher@icmm.ru

Рогалёв Алексей Николаевич, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** rogalyov@icm.krasn.ru

Роговой Анатолий Алексеевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** rogovoy@icmm.ru

Роменский Евгений Игоревич, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** evrom@math.nsc.ru

Рыжков Илья Игоревич , Институт вычислительного моделирования СО РАН, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** away2004@inbox.ru

Садовская Оксана Викторовна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** o_sadov@icm.krasn.ru

Садовский Владимир Михайлович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** sadov@icm.krasn.ru

Салихова Нелли Камилевна, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** salikhova@icmm.ru

Сибин Антон Николаевич, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** sibin_anton@mail.ru

Сибирякова Татьяна Андреевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** sibiriakova.tatiana@mail.ru

Сираев Рамиль Рифгатович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** romauld@mail.ru

Смолехо Ирина Владимировна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** i_smol@icm.krasn.ru

Смородин Борис Леонидович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, **e-mail:** bsmorodin@yandex.ru

Степанова Ирина Владимировна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** stepiv@icm.krasn.ru

Столбов Олег Валерьевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** sov@icmm.ru

Столбова Ольга Серафимовна, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** sos@icmm.ru

Сторожев Сергей Валериевич, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», Донецк, **e-mail:** s.v.storozhev@donnasa.ru

Токарева Маргарита Андреевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** tma25@mail.ru

Толстова Ольга Львовна, Московский государственный строительный университет, Москва, **e-mail:** olgall1@rambler.ru

Трифонова Ульяна Олеговна, Ярославский государственный университет, Ярославль, **e-mail:** ulya-trifonova02@yandex.ru

Уточкин Владимир Юрьевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** vyutochkin@pstu.ru

Фатьянов Алексей Геннадьевич, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** fat@nmsf.sscc.ru

Фёдорова Наталья Александровна, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** feodorova.natalia@mail.ru, nfeodorova@sfu-kras.ru

Фрейдин Александр Борисович, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, **e-mail:** alexander.freidin@gmail.com

Фурцев Алексей Игоревич, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** furtsev@hydro.nsc.ru; Новосибирский государственный университет, Новосибирск, **e-mail:** a.furtsev@g.nsu.ru

Хлыбов Олег Анатольевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** okhlybov@yandex.ru

Хмелёв Владимир Николаевич, Бийский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова», Бийск, **e-mail:** vnh@bti.secna.ru

Чашечкин Юлий Дмитриевич, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** yulidch@gmail.com

Чернышов Александр Данилович, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, **e-mail:** chernyshovad@mail.ru

Чумаков Юрий Александрович, Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, **e-mail:** yura014@rambler.ru

Шалунов Андрей Викторович, Бийский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова», Бийск, **e-mail:** shalunov@bti.secna.ru

Шапеев Василий Павлович, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** vshapeev@gmail.com

Шарифулин Альберт Нургалиевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** sharifulin@bk.ru

Шарифулин Вадим Альбертович, Институт механики слошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** vadsharif@bk.ru

Шишмарёв Константин Александрович, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** shishmarev.k@mail.ru

Шмидт Алексей Владимирович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** schmidt@icm.krasn.ru

Шмыров Андрей Викторович, Институт механики сплошных сред ПФИЦ УрО РАН, Пермь, **e-mail:** shmyrov@icmm.ru

Шубенков Иван Сергеевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail**: ShubenkovIS@yandex.ru

Litvinov Vladislav Lvovich, Samara State Technical University, Samara, Russia; Moscow State University, Moscow, Russia, **e-mail:** vladlitvinov@rambler.ru

Litvinova Kristina Vladislavovna, Samara State Technical University, Samara, Russia; Moscow State University, Moscow, Russia, **e-mail:** kristinalitvinova900@rambler.ru

Научное издание

Математическое моделирование в механике

Материалы докладов Всероссийской конференции

Техническая подготовка, обработка материалов и научное редактирование:

В. Б. Бекежанова, И. В. Степанова

Компьютерная вёрстка:

Н. Ф. Ильина

Объём данных 20 Мб
Подписано к печати 16.09.2024

Размещено в открытом доступе
на сайте https://mdm2024.tilda.ws/#rec796105776
в разделе `Материалы докладов`

ISBN 978-5-6047078-6-9

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
660036, Красноярск, Академгородок, 50/44.