

Стационарные конвективные течения
в частично открытой кювете:
Тестирование, расчёты

Дембровский К.О.

Алтайский государственный университет

"Математическое моделирование в механике"
23-25 сентября, г. Красноярск

Исследование конвективных процессов в жидкости в областях со свободными границами, подверженными действию спутного потока газа.

Разработка и верификация численного алгоритма решения задачи конвекции в области с частично открытой границей на основе переменных направлений.

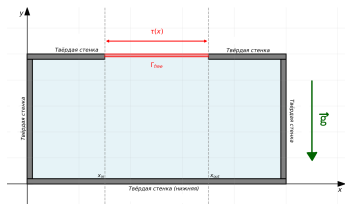
Тестирование численного алгоритма. [2]

Численные исследования стационарных течений этанола в условиях нормальной гравитации и микрогравитации при различных типах зависимости дополнительных касательных напряжений.

¹Воеводин А.Ф., Гончарова О.Н., Протопопова Т.В. Численные методы исследования конвективных течений: реализация метода расщепления по физическим процессам. Известия Алтайского государственного университета. — 2013. — № 1-1(77). — С. 88–93

²Goncharova O.N., Kabov O.A. (2013) Numerical Investigation of the Tangential Stress Effects on Convective Fluid Flows in an Open Cavity. J. Eng. Therm., 22(3), 216–225

Геометрия расчётной области (частично открытая кювета)



Область

$$\Omega = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H\}$$

Свободная граница Γ_f

$$\{(x, y) \mid y = H, x_{in} \leq x \leq x_{out}\}$$

Твёрдые границы Γ_w

$$\{(x, y) \mid x = 0, 0 \leq y \leq H\} \cup \{(x, y) \mid x = L, 0 \leq y \leq H\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, 0 \leq x \leq L\} \cup \{(x, y) \mid y = H, 0 \leq x < x_{in}, x_{out} < x \leq L\}$$

Постановка задачи

Переменные «функция тока – вихрь»

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Система уравнений Обербека-Буссинеска в стационарном случае

$$\begin{cases} \Delta \psi = -\omega \\ u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr Re}^2} \frac{\partial T}{\partial x} \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \Delta T \end{cases}$$

Безразмерные параметры:

$\text{Re} = \frac{U^* h}{\nu}$ — число Рейнольдса,

$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$ — число Прандтля,

$\text{Ra} = \frac{g \beta T^* h^3}{\nu \chi}$ — число Рэлея,

$\text{Ma} = \frac{\sigma_T T^* h}{\rho \nu \chi}$ — число Марангони,

T^* — характерный перепад температуры, $U^* = \frac{\nu}{h}$ — характерный масштаб скорости.

Граничные условия

Твёрдые границы

$$\Gamma_{wall} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{free}$$

Условия прилипания и
непротекания:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

Заданный тепловой режим:

$$\begin{cases} T|_{y=0} = \Theta_0 \\ \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_w \setminus \{y=0\}} = 0 \end{cases}$$

Свободная граница Γ_{free}

Кинематическое условие:

$$\psi = 0$$

Динамическое условие:

$$\omega = \frac{\text{Ma}}{\text{PrRe}} \frac{\partial T}{\partial x} - \tau(x)$$

$$\tau(x) = \begin{cases} A_\tau \\ A_\tau x \\ A_\tau x + A_\tau \end{cases}$$

$$A_\tau = \text{const}$$

Заданный линейный профиль
температуры:

$$T = \Theta_0 + (\Theta_1 - \Theta_0) \frac{x}{L}$$

Численный метод: Метод переменных направлений

Общая схема для $\Phi = \{\omega, \psi, T\}$

$$\frac{\Phi^{k+1/2} - \Phi^k}{0.5\Delta t} = \lambda \left[\left(C\Phi_x^{k+1/2} - B\psi_y\Phi^{k+1/2} \right)_x + \left(C\Phi_y^k + B\psi_x\Phi^k \right)_y + F^k \right]$$

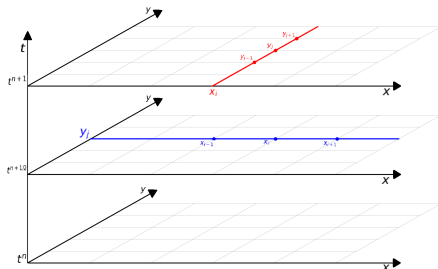
$$\frac{\Phi^{k+1} - \Phi^{k+1/2}}{0.5\Delta t} = \lambda \left[\left(C\Phi_x^{k+1/2} - B\psi_y\Phi^{k+1/2} \right)_x + \left(C\Phi_y^{k+1} + B\psi_x\Phi^{k+1} \right)_y + F^k \right]$$

Φ	C	B	F
ω	1	1	$\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x}$
ψ	1	0	ω
T	$1/Pr$	1	0

Реализация

Применяется метод переменных направлений, имеющий второй порядок аппроксимации. Для реализации этого метода вводится сетка в области Ω : $x_i = i * h_x$, $i = 0, 1, \dots, N_x$, $h_x = \frac{L}{N_x}$, $y_j = j * h_y$, $j = 0, 1, \dots, N_y$, $h_y = \frac{H}{N_y}$.

Для расчёта функции тока на каждом временном (итерационном) шаге применяется итерационная схема. Системы линейных алгебраических уравнений решаются методом прогонки. Тестирование численного алгоритма проведено на известных задачах о свободной конвекции в прямоугольной кювете.



Тест 1: Тестирование на основе точного решения [1]

Тест 1 позволяет сравнить численное решение с формальным точным решением задачи изотермическом случае.

Постановка задачи

$$\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Точное решение для функции тока:

$$\psi(x, y, t) = e^{-4\pi^2 t} x^2(1-x)^2 y^2(1-y)^2$$

Погрешности:

$$\varepsilon_{\psi} = \frac{\max |\psi_a - \psi_n|}{\max |\psi_a|}, \quad \varepsilon_{\omega} = \frac{\max |\omega_a - \omega_n|}{\max |\omega_a|}$$

Полученные результаты

Сетка	ε_{ω}	ε_{ψ}
16 × 16	0.0015551	0.0024734
32 × 32	0.0000971	0.0001541
64 × 64	0.0000060	0.0000096

Результаты из [1]

Сетка	ε_{ω}	ε_{ψ}
16 × 16	0.0042750	0.0008108
32 × 32	0.0005775	0.0001198
64 × 64	0.0000674	0.0000191

Тест 2: Benchmark-задача о свободной конвекции в замкнутой полости при нагреве боковой границы и теплоизоляции верхней и нижней стенок. [1]

Постановка:

$$\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

Левая граница: $T = 1$, правая: $T = 0$

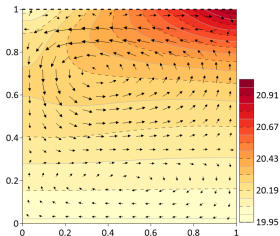
Нижняя и верхняя граница: $\partial T / \partial y = 0$

$$Pr = 1, T^* = 1K, Gr = 10^4, Re = 1, Gr = \frac{Ra}{Pr}, Nu_1 = \int_0^1 \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} dy, \quad Nu_2 = \int_0^1 \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} dx$$

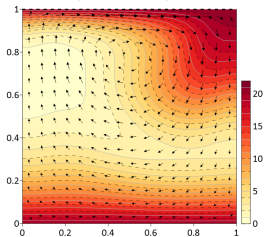
Сетка	ψ_{max}	Nu_1	Nu_2
16×16	6.4767 6.4812	1.7640 1.8288	1.2864 1.2685
24×24	6.4090 6.4205	1.7517 1.7814	1.2379 1.2497
32×32	6.3883 6.3991	1.7492 1.7645	1.2151 1.2298

Результаты тестовых расчётов: сравнение численных характеристик (интенсивности течения ψ_{max} и теплового потока на границах Nu). Цветом выделены результаты работы [1].

Тест 3. Задача о конвекции в открытой кювете [2]



$$\tau = A_\tau, A_\tau = 500, Ra = 74000$$



$$\tau = A_\tau, A_\tau = 500, Ra = 0$$

Постановка

Тест заключается в проведении численного исследования конвекции для жидкости типа этанол ($Pr = 17$, $Ma = 7800$) в квадратной кювете ($L/H = 1$) с полностью открытой верхней границей

Условия: нормальная гравитация ($Ra = 74000$) и невесомость ($Ra = 0$)

Дополнительные касательные напряжения на свободной границе:

$$\tau = A_\tau, \quad \tau = A_\tau x, \quad \tau = A_\tau x + A_\tau, \quad A_\tau = 500$$

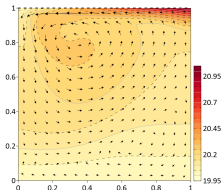
Граничные условия для температуры:

$$T|_{y=0} = \Theta_0 = 20, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0, x=1} = 0$$

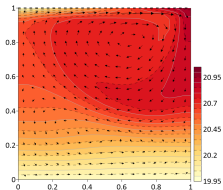
$$T|_{\Gamma_f} = \Theta_0 + (\Theta_1 - \Theta_0) \frac{x}{L}, \quad \Theta_0 = 20, \quad \Theta_1 = 21$$

Тест 3. Задача о конвекции в открытой кювете [2]

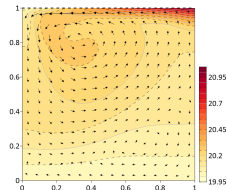
Поле скоростей и распределение температуры



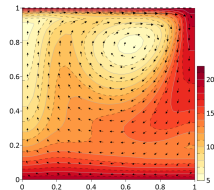
$$\tau = A_\tau x, A_\tau = 500, Ra = 74000$$



$$\tau = A_\tau x + A_\tau, A_\tau = 500, Ra = 74000$$



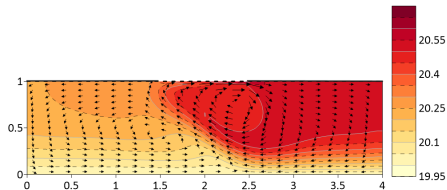
$$\tau = A_\tau x, A_\tau = 500, Ra = 0$$



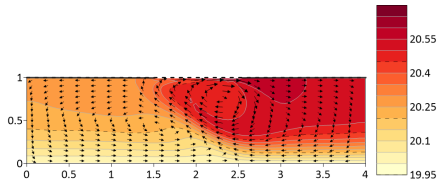
$$\tau = A_\tau x + A_\tau, A_\tau = 500, Ra = 0$$

Численное исследование стационарных конвективных течений в открытой и частично открытой кюветах

Исследование влияния типа зависимости касательных напряжений на структуру течения



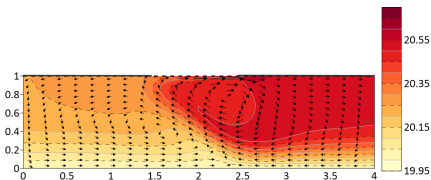
$Ra = 74000$, $Ma = 7800$, $Pr = 17$, $\tau(x) = A_\tau$
 $A_\tau = 500$, $L/H = 4$, протяжённость свободной
границы $L/4$, $T^* = 1K$



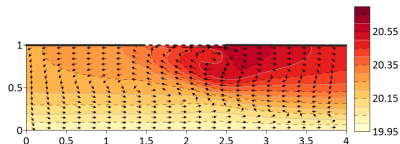
$Ra = 74000$, $Ma = 7800$, $Pr = 17$,
 $\tau(x) = A_\tau \exp[-(\frac{x/L - 0.5}{\sigma})^2]$, $\sigma = 0.2$, $A_\tau = 500$,
 $L/H = 4$, протяжённость свободной границы $L/4$,
 $T^* = 1K$

Численное исследование стационарных конвективных течений в открытой и частично открытой кюветах

Исследование влияния типа зависимости касательных напряжений на структуру течения



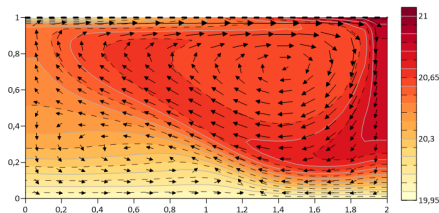
$Ra = 74000$, $Ma = 7800$, $Pr = 17$, $\tau(x) = A_\tau \sin(\pi \frac{x}{L})$
 $A_\tau = 500$, $L/H = 4$, протяжённость свободной
границы $L/4$, $T^* = 1K$



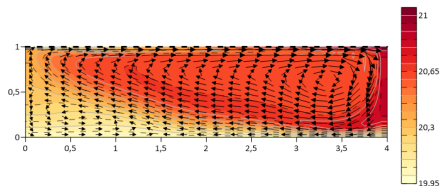
$Ra = 74000$, $Ma = 7800$, $Pr = 17$, $\tau(x) = A_\tau \frac{x}{L}$,
 $A_\tau = 500$, $L/H = 4$, протяжённость свободной
границы $L/4$, $T^* = 1K$

Численное исследование стационарных конвективных течений в открытой и частично открытой кюветах

Исследование влияния геометрических параметров на структуру течения



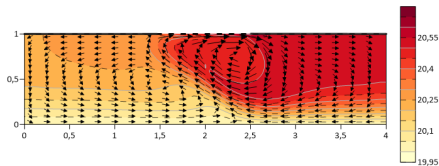
$Ra = 74000$, $Ma = 7800$, $Pr = 17$, $A_T = 500$, $L/H = 2$



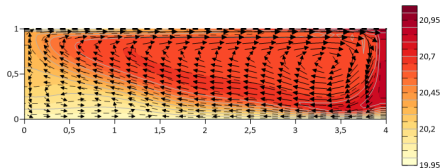
$Ra = 74000$, $Ma = 7800$, $Pr = 17$, $A_T = 500$, $L/H = 4$

Численное исследование стационарных конвективных течений в открытой и частично открытой кюветах

Исследование вихревой структуры течения при изменении протяжённости свободной границы



$Ra = 74000$, $Ma = 7800$, $Pr = 17$, $A_\tau = 500$, $L/H = 4$,
протяжённость свободной границы $L/4$



$Ra = 74000$, $Ma = 7800$, $Pr = 17$, $A_\tau = 500$, $L/H = 4$,
протяжённость свободной границы L

Анализ влияния касательных напряжений и геометрических параметров на структуру течения

Выводы

На основе разработанного численного алгоритма проведены исследования стационарных конвективных течений в кюветах при различных типах зависимости касательных напряжений $\tau(x)$ от продольной координаты и при различном соотношении сторон прямоугольной кюветы; описана вихревая структура течения и её перестройка при изменении вида $\tau(x)$ и геометрических параметров. Исследовано влияние интенсивности дополнительных касательных напряжений на свободной границе на изменение структуры течения. Выявлены различия в вихревых структурах течения и особенности формирования доминирующего вихря в зависимости от типа касательных напряжений.