



Красноярский
математический центр

Всероссийская онлайн-конференция

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ

23-25 сентября 2026 г.

Материалы докладов

Красноярск – 2026

УДК 538.9+53.09+53.04+539+532
ББК 22.25

Материалы докладов Всероссийской онлайн-конференции «Математическое моделирование в механике». – Электронные данные. – Красноярск : ИВМ СО РАН, 2026. – 33 Мб ; 289 с. – Режим доступа: https://mdm2026.tilda.ws/#BookOfAbs. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-6054684-5-5

Содержит статьи по материалам докладов, представленных на Всероссийской онлайн-конференции «Математическое моделирование в механике», г. Красноярск, 23–25 сентября 2026 г.

УДК 538.9+53.09+53.04+539+532
ББК 22.25

Издаётся по решению учёного совета ИВМ СО РАН.

Ответственные за выпуск: В. Б. Бекежанова, И. В. Степанова.

ISBN 978-5-6054684-5-5

© Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2026

Организационный комитет:

Председатель
Садовский В. М. – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, Красноярск
Заместитель председателя
Бекежанова В. Б. – д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, Красноярск
Секретарь оргкомитета
Степанова И. В. – д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, Красноярск

Члены оргкомитета:

Андреев В. К. – д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, Красноярск
Гончарова О. Н. – д.ф.-м.н., АлтГУ, Барнаул
Ерманюк Е. В. – д.ф.-м.н., НГУ, Новосибирск
Любимова Т. П. – д.ф.-м.н., ИМСС УрО РАН, Пермь
Пухначёв В. В. – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИГиЛ СО РАН, Новосибирск
Фрейдин А. Б. – д.ф.-м.н., СПбПУ, Санкт-Петербург
Шайдуров В. В. – академик РАН, д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, Красноярск

Научная тематика конференции предполагает обсуждение актуальных проблем прикладной математики, механики и методов математического моделирования, а также их приложений для описания и прогнозирования природных и технических процессов, протекающих в деформируемых средах. В ходе работы мероприятия представлены оригинальные сообщения по следующим научным направлениям:

- Математические модели механики деформируемых сред
- Поверхностные явления. Термокапиллярная и термоконцентрационная конвекция. Магнитные жидкости
- Внутренние волны. Взаимодействие волн с деформируемыми конструкциями
- Фазовые переходы в подвижных средах
- Методы изучения реологических свойств
- Микроструктурные превращения в упругопластических средах
- Механохимия
- Численные методы механики деформируемых сред.

Конференцию проводит Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, в онлайн-формате при поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2026-735).

СОДЕРЖАНИЕ

Авдейчик Е. В. *Численное исследование осесимметричного квазистатического растекания капли на вращающейся плоскости* 9
Алтынбек уулу Ы., Кучунова Е. В. *Численное моделирование естественной конвекции наножидкости в замкнутой полости* 14
Андреев В. К. *Медленная конвекция на плоской подложке при специальной зависимости поверхностного натяжения от температуры* 19
Андрианов И. К. *Модель оптимального автофретирования в условиях плоского осесимметричного деформирования* 22
Баженов Е. А., Кучунова Е. В. *Применение решёточных уравнений Больцмана (LBM) для моделирования жидкостей и газов* 23
Балданов А. Б., Иванов Р. П. *Численное моделирование закритического деформирования композитных пластин с дефектами типа расслоения* 28
Бекежанова В. Б., Шефер И. А. *Формы неустойчивости стратифицированных течений в двухфазной системе* 30
Бондаренко Г., Магденко Е. П. *О тепловой конвекции в двухслойной системе несмешивающихся жидкостей в цилиндре с верхней свободной границей* 34
Бондаренко Н. С. *Исследование влияния упругих констант ортотропного материала пластины на обобщённые перерезывающие силы в рамках {1,0}-аппроксимации* 35
Боровик К. Г., Луценко Н. А. *О процессах газификации твёрдого пористого горючего в низкотемпературных газогенераторах с сужением и расширением* 38
Бородина К. А., Татосов А. В. *Охлаждение плёнки бинарной жидкости* . . . 40
Володин И. В., Алабужев А. А. *Численное моделирование осреднённой динамики конвекции Марангони в тонком слое жидкости при вертикальных вибрациях* 43
Володько О. С., Лемешкова Е. Н. *Математическое моделирование и метод главных компонент для определения вертикальной структуры внутренних сейш в стратифицированном озере* 46
Гайфуллин А. М. *Вязкие течения с замкнутыми линиями тока* 48
Гилёв П. В., Папин А. А. *Корректность начально-краевых задач для уравнений двухфазной фильтрации в пороупругой среде* 49
Глухов А. А., Дяченко В. Р. *Математическая модель распространения электроупругих волн Лява в анизотропном пьезоактивном функционально-градиентном волноводе с приповерхностной неоднородностью двойного экспоненциального типа* 50
Голубев В. И., Никитин И. С., Шевченко А. В., Маньков Д. К. *Численный расчёт эффективности работы сейсмических барьеров сеточно-характеристическим методом* 53
Гончарова Д. В., Гончарова О. Н. *Характеристики нестационарных двухслойных течений с испарением* 56

Губайдуллин А. А., Болдырева О. Ю., Дудко Д. Н. *Динамика возмущения давления на границе пористой и трещиновато-пористой сред* 58
Губайдуллин А. А., Пяткова А. В. *Совместное действие термоакустических волн и вибрации на течение газа в прямоугольной и цилиндрической кольцевой полостях* 61
Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю. *Математическое моделирование нестационарного течения Куэтта с поперечным потоком и скольжением Навье* 63
Гусева Е. К., Петров И. Б. *Численная оценка механической устойчивости тающего искусственного ледового острова с учётом зависимости прочности льда от температуры* 66
Дембровский К. О. *Стационарные конвективные течения в частично открытой кювете: тестирование, расчёты* 71
Дёмин В. А., Дёмин Ф. В. *К вопросу о тепловой конвекции в гидродинамической системе с границей раздела «свободная жидкость – пористая среда»* . 74
Доброхотов С. Ю. *Асимптотика одномерной задачи о линейных поверхностных волнах, порождённых движущимся по дну бассейна источником* 78
Докукова Н. А., Конон П. Н. *Моделирование динамических смещений балок, колец и цилиндрических пружин из упругих однородных материалов* 79
Дуркин А. А. *Односторонний контакт упругой пластины с входящим углом* . 83
Ерофеев В. И., Лисенкова Е. Е., Герасимов С. И. *Постановка и анализ самосогласованной краевой задачи динамики балки Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании, с движущимся высокоскоростным объектом* 86
Ефимов Е. А. *О динамическом разрушении геоматериалов блочного строения с тонкими прослойками* 88
Затонская В. М., Еленская Н. В., Ташкинов М. А. *Влияние морфометрических характеристик скаффолдов на особенности контактного взаимодействия с костной тканью* 89
Иванов А. В. *Исследование применимости методов доверительной области в статике арочных цепей* 91
Иванова С. В., Гузей Д. В., Минаков А. В. *Систематическое численное исследование применения наномодифицированных ПАВ-полимерных композиций для увеличения нефтеотдачи* 97
Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. *Аналитические и численные решения квазилинейных вырождающихся систем тепломассопереноса* 99
Казанцев П. Н., Смородин Б. Л. *Влияние термодиффузии, магнитофореза и седиментации на конвективную устойчивость магнитной жидкости в ячейке Хеле-Шоу* 101
Клочков Ю. В., Николаев А. П., Вахнина О. В., Андреев А. С., Клочков М. Ю. *Смешанный вариант МКЭ на основе объёмного элемента дискретизации для расчёта оболочек* 106
Князева А. Г. *Химические потенциалы и диффузия в необратимой термодинамике деформируемого тела* 109
Конон П. Н. *Пространственные бифуркации равновесных состояний слоя жидкости на поверхности вращающегося цилиндра* 114

Красняков И. В., Брацун Д. А. *Математическое моделирование роста клеточной ткани в порах скаффолда при прокачивании питательного раствора* . . . 116
Кузнецова Ю. Л. *Математическое моделирование кристаллизации микронных капель раствора соли при испарении* . . . 120
Кучунова Е. В., Невоструев Г. А. *Полулагранжевый метод численного моделирования течения вязкого теплопроводного газа* . . . 126
Лавринова Л. Н., Лавринов В. В. *Модель эволюции фазовых искажений светового поля в турбулентной атмосфере для опережающего формирования волнового фронта на входной апертуре системы* . . . 130
Лавринова Л. Н., Лавринов В. В. *Аспекты опережающего формирования фазовых искажений светового поля на входной апертуре системы* . . . 134
Лазарев Н. П. *Задача о равновесии пластины с тонким жёстким включением, соединённым шарнирно с полностью отслоившимся включением* . . . 138
Ласковец Е. В. *Влияние деформации поверхности и интенсивности испарения на структуру жидкостных плёнок* . . . 139
Лемешкова Е. Н. *О трёхмерном термокапиллярном течении жидкости при квадратичной зависимости поверхностного натяжения от температуры* . 140
Литвинов В. Л., Литвинова К. В. *Математическое моделирование нелинейных продольно-поперечных колебаний каната с подвижной границей* . . . 144
Любимова А. А., Еленская Н. В., Ташкинов М. А. *Математическое моделирование течения жидкости в пористых периодических структурах на основе ТПМП* . . . 145
Любимова Т. П. *Устойчивость равновесия бинарной смеси в длинном цилиндре, совершающем высокочастотные аксиальные вибрации* . . . 147
Лян И. П. *О выборе параметров плоской DEM-модели сыпучего материала в задачах динамики вибрационных транспортно-технологических машин* . . . 148
Мезенцева А. М., Смородин Б. Л. *Распределение микроорганизмов в модулированном поле тяжести при отрицательном гравитаксисе* . . . 154
Мотыгин О. В. *О свободных колебаниях жидкости в цилиндре с пористой радиальной перегородкой* . . . 155
Найденова К. Е. *Исследование устойчивости испарительно-конвективного течения в двухслойной системе бинарных сред* . . . 161
Нарыгин Э. И., Пяткова А. В. *Температурные волны в областях с различной симметрией при учёте фазового перехода* . . . 164
Наседкин А. В., Наседкина А. А., Рыбянец А. Н. *Численное исследование эффективности плоско-вогнутого преобразователя из пористой пьезокерамики* . . . 166
Некрасов О. О., Смородин Б. Л. *Нелинейные электроконвективные течения слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле* . . . 170
Никитин И. С., Голубев В. И., Шевченко А. В., Никитин А. Д. *Комбинированные численные схемы для решения связанных задач термомеханики с фазовыми переходами* . . . 175

Очиров А. А., Чашечкин Ю. Д. *Лигаменты, поверхностные и внутренние волны в стратифицированной жидкости: линейная теория и эксперимент* 179
Павлецов Д. А., Еленская Н. В., Садырин Е. В., Виндокуров И. В., Ташкинов М. А. *Численное исследование влияния деградации полимерных скаффолдов на их механический отклик по данным томографии* 183
Парфёнова Е. С., Князева А. Г. *Изгиб пластины при нанесении покрытия в условиях лазерной технологии* 185
Пашковский Д. М. *Численное моделирование локализации упругих волн в микрополярной среде со случайными свойствами* 188
Пекарская Т. А., Сибин А. Н. *Математическая модель формирования поверхностного стока в снеге и грунте с учётом фазовых переходов и изменения фильтрационных свойств среды* 194
Перельмутер М. Н. *Концентрация напряжений при нестационарном теплообмене* 198
Петраков И. Е., Коянкин А. А. *Расчёт изгиба сборно-монолитной плиты* . . 203
Погосян В. Б., Токарева М. А. *Математическая модель динамики васкулярной опухоли под влиянием хемотаксиса* 206
Пронина Ю. Г., Марков А. М., Качанов М. Л. *Об эффективных свойствах материалов, ослабленных узкими трещинами* 207
Пухначёв В. В. *Дифференциальные связи в динамике несжимаемой жидкости* 209
Роменский Е. И. *Термодинамически согласованная модель деформируемых пористых материалов и её применение к задачам сейсмики* 210
Руженцев И. Д., Фёдорова Н. А. *Математическое и информационное моделирование композитов с криволинейным армированием* 212
Рыжков И. И., Минаков А. В., Харченко И. А., Волкова И. Р., Елсуфьев Е. В., Ситдиков В. Х., Карачаров А. А., Ваганов Р. А., Кукушкин А. А. *Разделение эмульсий дизельное топливо – вода с помощью керамических ультрафильтрационных мембран: эксперимент и математическое моделирование* 216
Савельев Н. А. *Влияние граничных режимов на неоднородность массовой скорости испарения в модели двухслойного конвективного течения* 218
Садовская О. В., Садовский В. М. *Моделирование волн разрушения на основе уравнений динамики блочной среды* 223
Садовский В. М. *Анализ математической модели динамики упругопластического континуума Коссера* 225
Салихова Н. К., Дудин Д. С., Келлер И. Э. *Моделирование остаточных напряжений и собственных деформаций в стенке из АМг5, возведённой по технологии CMT* 228
Сбоев И. О., Любимова Т. П., Рыбкин К. А., Кучинский М. О., Садовникова А. Д. *Численное моделирование влияния твёрдых и газообразных включений на пространственное распределение вероятности кавитационных событий в проточном сонохимическом реакторе* 230

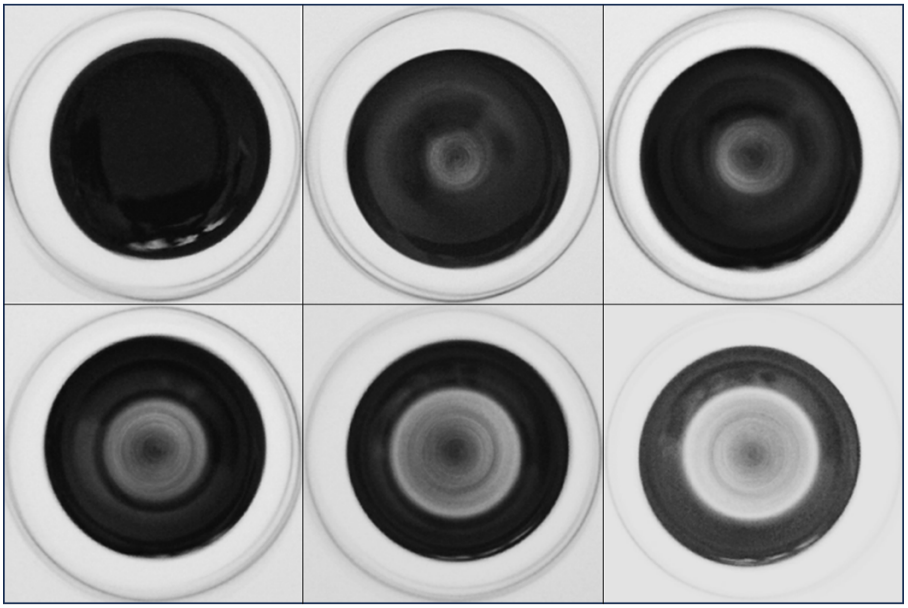
Сибирякова Т. А. *Взаимодействие осциллирующего подводного тела с ледовыми пластинами в области полыньи* 235
Сираев Р. Р., Уточкин В. Ю., Брацун Д. А. *Многофазное моделирование амплификации ДНК при конвекционной ПЦР* 239
Смолехо И. В. *Вычислительный алгоритм для статической модели жидкого кристалла с учётом термомеханических воздействий* 241
Смородин Б. Л. *Гидродинамика в переменных внешних полях: неустойчивости, резонансы и нелинейные эффекты* 243
Степанова И. В. *Влияние управляющих параметров на режимы конвекции при фазовом переходе и нелинейном поверхностном натяжении* 245
Уточкин В. Ю. *Неустойчивость и бифуркации в системе тепловыделяющих микророботов* 248
Фатьянов А. Г. *Динамическая некорректная задача о вдавливании жёсткого штампа малых размеров. Метод регуляризации* 250
Фецов С. С., Луценко Н. А. *О фильтрационном горении пористых сред при наличии примесей плавящихся материалов* 253
Фрейдин А. Б., Михеев Е. В. *О тензорности химического сродства в хемомеханике* 255
Фурцев А. И. *Задачи о гиперупругом теле с отслаивающимися жёсткими включениями при невыпуклых ограничениях на деформации* 259
Хряпенко К. Д., Григорьева А. Л. *Применение физически информированных нейронных сетей для моделирования мгновенного трещинообразования жёсткопластических пластин в условиях растяжения* 260
Чепурнова Е. К., Андрианов И. К., Костиков С. А. *Математическое моделирование теплопереноса с учётом фазового перехода теплоаккумулирующего слоя в стене Тромба* 266
Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Литвинов Д. А. *Особенности распределения напряжений в термоупругой прямоугольной пластине при постоянном температурном моменте* 267
Чехонин К. А. *Новая стратегия математического моделирования в L-DED-лазерных технологиях 3D-печати металлоизделий* 273
Шкадов В. Я., Белоглазкин А. Н., Шишкин И. В. *Трёхпольная модель KSIBL для описания течения плёнок* 277
Шмидт А. В., Юргенсон К. С. *Приближённое решение задачи о развитом турбулентном слое смешения* 278
Kozlov N., Crepaldi Ferrari R., Duguet B., Feumi P. P. *Numerical simulation of thermal convection generated by oscillations in rotating annulus* . . 279
Авторские данные 282

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО РАСТЕКАНИЯ КАПЛИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ

Е. В. Авдейчик

Белорусский государственный университет, Минск

Работа посвящена теоретическому воспроизведению представленных на рисунке результатов экспериментов по получению различных типов форм осесимметричных капель на верхней стороне горизонтального диска, вращающегося с постепенно увеличивающейся угловой скоростью, в условиях земной гравитации. При этом полагается, что реализуемое в ходе экспериментов растекание жидкости является квазистатическим – образуемые формы близки к равновесным при постоянной угловой скорости, совпадающей с реальной скоростью вращения в рассматриваемый момент времени.



Моделирование описанного движения слоёв состоит в численном исследовании характеристик фигур относительного равновесия осесимметричных капель на вращающейся плоскости, перпендикулярной однородному полю силы тяжести, прижимающей жидкость к твёрдой подложке. В число искомых характеристик входят устойчивость к осесимметричным и трёхмерным возмущениям, безразмерный объём жидкости v, краевой угол θ на внешней линии смачивания Θ_1 и безразмерный радиус r_1 данной линии. Перечисленные свойства и величины рассматриваются в зависимости от следующих параметров: 1) от вращательного числа Вебера We, определяющего угловую скорость диска, 2) от безразмерной кривизны X меридианной кривой Γ свободной границы Σ капли в точке O_0, которая принадлежит оси симметрии Λ, если поверхность односвязная, или внутренней линии смачивания – в случае двусвязной свободной поверхности, 3) от расстояния r_0 между O_0 и Λ ($r_0 < r_1$), 4) от угла наклона θ_0 касательной к Γ в точке O_0. Число Бонда Bo полагается фиксированным и равным 1, что достигается выбором характеристического расстояния.

Квазистатическое течение жидкости описывается множеством непрерывно сменяющих друг друга равновесных форм. В начальный момент времени диск покоится: $\tau = 0$, We $= 0$, где τ – безразмерное время. В этот момент и на первом этапе движения слой имеет односвязную свободную поверхность ($r_0 = 0$ и $\theta_0 = 0$). Здесь и далее значения углов указываются в радианах. В процессе растекания в середине капли образуется прогиб, постепенно увеличивающийся и достигающий центра подложки, после чего граница Σ становится двусвязной, при этом в рамках принимаемой модели осуществляются последовательные переходы между следующими типами фигур равновесия: 1) слой с жидкой плёнкой в центре, 2) слой промежуточного вида, 3) слой с сухой центральной областью. Для капель данных типов θ_0 представляет собой краевой угол на внутренней линии смачивания, r_0 является радиусом этой линии. Моделирование осесимметричного растекания капли с образованием форм с жидкой плёнкой в центре в динамической постановке произведено в работе [1]. Результаты экспериментов по неосесимметричному растеканию ограниченных слоёв жидкости, демонстрирующие формирование и увеличение центрального прогиба в односвязной поверхности Σ, приведены в [2].

В соответствии с предположением о гистерезисе динамического краевого угла [3, 4] введём значения углов оттекания θ_{0r} и натекания θ_{0a} на внутренней линии смачивания для капель с двусвязной поверхностью Σ, а также значения углов оттекания θ_r и натекания θ_a на внешнем крае Θ_1. Будем считать, что 1) при $\theta_{0r} < \theta_0 < \theta_{0a}$ (при $\theta_r < \theta < \theta_a$) внутренняя (внешняя) линия смачивания неподвижна, 2) радиус r_0 убывает (возрастает), только если $\theta_0 \geq \theta_{0a}$ ($\theta_0 \leq \theta_{0r}$), 3) радиус r_1 увеличивается (уменьшается) только при $\theta \geq \theta_a$ ($\theta \leq \theta_r$). Значения θ_r и θ_a являются постоянными, характеризуют краевой угол у сухой твёрдой поверхности и определяются свойствами взаимодействующих фаз. Формы с жидкой плёнкой в центре определим как слои, где $\theta_0 = 0$, формы с сухой центральной областью – как слои, где $\theta_{0r} = \theta_r$, $\theta_{0a} = \theta_a$ и $\theta_0 > 0$.

Можно рассмотреть две упрощённые модели образования и разрушения жидкой плёнки в центре. В первом случае $\theta_{0r} = \theta_r = 0$, значение r_0 убывает (возрастает), только когда $\theta_0 = \theta_{0a}$ ($\theta_0 = \theta_{0r} = 0$), увеличение (уменьшение) радиуса r_1 происходит только при $\theta = \theta_a$ ($\theta = \theta_r = 0$), углы $\theta_0 > \theta_{0a}$, $\theta > \theta_a$ не достигаются. Данная модель предполагает, что при отступлении края слоя на месте контакта подложки и капли всегда формируется зона с полной смачиваемостью, содержащая пренебрежимо малый объём жидкости, оставшейся в микроскопических неровностях твёрдой поверхности. В процессе испарения жидкости в данной зоне смачиваемость подложки уменьшается, обеспечивая переходы к слоям промежуточного вида и, при полном испарении, к слоям с сухой центральной областью. Из равенства $\theta_r = 0$ и того, что, согласно [5], на внешней линии смачивания вектор кривизны к Γ направлен внутрь капли, следует, что радиус r_1 в данном случае не может уменьшаться.

Зададим функцию $T(r)$, которая определяет продолжительность последнего непрерывного промежутка безразмерного времени, в течение которого выполнялось $r \leq r_0$ и происходило испарение плёнки жидкости на поверхности диска в точке с радиальной координатой r, что соответствует удалению рассматриваемой точки от Λ на безразмерное расстояние r. Тогда будем полагать, что значение θ_{0a} зависит только от $T(r_0)$ и данная зависимость $\theta_{0a}(T(r_0))$ непрерывна по $T(r_0)$. При $T(r_0) = 0$ и только в этом случае верно $\theta_{0a} = 0$, что определяет слой с жидкой плёнкой в центре. Существует некоторое задаваемое значение $T_0 > 0$, такое что неравенство $T(r) \geq T_0$ соответствует полному высыханию точки с радиальной координатой r на поверхности диска. При $T(r_0) \geq T_0$ выполняется равенство $\theta_{0a} = \theta_a$ и образуется форма с сухой центральной областью.

В соответствии со второй моделью при достаточно быстром оттоке слоя от центра диска реальная внутренняя линия смачивания Θ_2 может отставать от основного объёма жидкости Ω, в результате чего между Θ_2 и Ω образуется тонкая жидкая плёнка Π_2. Случай частичного или полного отрыва Π_2 от основного слоя в рамках настоящей работы не рассматривается. Пусть r_2 – радиус окружности Θ_2, τ_2 – время существования плёнки Π_2 на текущий момент, r_0 – радиус условной линии Θ_0, отделяющей Π_2 от Ω. Примем Θ_0 в качестве внутренней линии смачивания для Ω. По определению имеем $r_2 \le r_0$, где равенства $r_2 = r_0$ и $\tau_2 = 0$ эквивалентны и соответствуют отсутствию плёнки Π_2. В данной модели точка O_0 находится на линии Θ_0. Будем считать, что при $r_2 < r_0$ всегда верно $\theta_0 = 0$, также примем $\theta_{0r} = \theta_r > 0$, $\theta_{0a} = \theta_a$. Зададим и будем полагать известными непрерывные функции $v_2(r_2, r_0, \tau_2)$ и $v_0(\theta_0)$, такие что: 1) $v_2(r_2, r_0, \tau_2) > 0$ при любых $r_2 \le r_0$ и $\tau_2 \ge 0$, 2) значение $v_2(r_0, r_0, \tau_2)$ не зависит от τ_2 (для любого $\tau_2 > 0$ верно $v_2(r_0, r_0, \tau_2) = v_2(r_0, r_0, 0)$), 3) функция $v_0(\theta_0)$ является невозрастающей, 4) $v_0(\theta_0) = 0$ при $\theta_{0r} \le \theta_0 \le \theta_{0a}$, 5) $v_0(\theta_0) > 0$ при $\theta_0 < \theta_{0r}$, 6) $v_0(\theta_0) < 0$ при $\theta_0 > \theta_{0a}$, а также

$$\forall \theta_0 > 0 : \frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\tau} = v_0(\theta_0), \quad \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}\tau} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\tau} & \mid r_2 = r_0 \wedge v_2(r_0, r_0, 0) \ge \dfrac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\tau}, \\ v_2(r_2, r_0, \tau_2) & \mid v_2(r_0, r_0, 0) \le \dfrac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\tau} \vee r_2 < r_0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\forall r_0 \ge 0 : v_2(r_0, r_0, 0) \ge v_0(0) > 0. \tag{2}$$

При $\theta_0 = 0$ ограничений на скорость перемещения линии Θ_0 не налагается. Данная модель может применяться и при отсутствии гистерезиса динамического краевого угла, для чего нужно принять $\theta_{0r} = \theta_r = \theta_{0a} = \theta_a$. Функция $v_2(r_2, r_0, \tau_2)$ характеризует скорость края Θ_2. Функция $v_0(\theta_0)$ описывает зависимость скорости движения линии смачивания от динамического краевого угла на ней. Такие зависимости исследованы, в частности, в работах [6, 7]. В динамической постановке задачи на перемещение линии смачивания могут налагаться также ограничения других видов [8]. Выражения (1) обеспечивают выполнение неравенства $r_2 \le r_0$. Условие (2) необходимо для непрерывности зависимости угла θ_0 от τ. Можно ввести предположение об аналогичном поведении жидкости на внешней линии смачивания. Однако поскольку из [5] следует, что $\theta > 0$, то с учётом введённых допущений отставание жидкой плёнки от отступающего внешнего края капли невозможно. Таким образом, на внешнем крае должно выполняться равенство

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\tau} = -v_0(\theta). \tag{3}$$

При этом условие (3) является единственным на линии Θ_1.

Зависимость числа Вебера We от τ полагается известной, при этом функция $\mathrm{We}(\tau)$ является неубывающей на всём рассматриваемом промежутке времени. Если в соответствии с используемыми моделями в некоторый момент малое приращение времени τ даёт более одного варианта фигур равновесия, то будем считать, что из данных возможных вариантов в реальности образуется форма с наименьшей потенциальной энергией.

Существенное влияние на процесс растекания (см. рисунок) оказывала потеря массы жидкости в результате её испарения. Экспериментальное исследование зависимости времени испарения капли от угловой скорости диска произведено в статье [9]. В рамках настоящей работы для аппроксимации скорости уменьшения объёма жидкости использу-

ется формула следующего вида:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = \int_{t_0}^{t_1} r(t)[k_1 - k_2 \exp(k_3 \mathrm{We}^q r^{2q}(t))]\, dt, \quad k_1 \geq k_2 \geq 0 > k_3, \quad q > 0,$$

где t – безразмерный натуральный параметр естественной параметризации кривой Г; t_0, t_1 – значения параметра t в точке O_0 и на линии Θ_1 соответственно; k_1, k_2, k_3, q – некоторые константы, считающиеся заданными; k_1 описывает предельную скорость испарения жидкости при вариации только относительной скорости газа у свободной поверхности, значение $(k_1 - k_2)$ определяет скорость испарения жидкости при покое газа относительно жидкости; константы k_3 и q характеризуют влияние относительной скорости газа на темп испарения жидкости.

Стоит отметить, что модели, не включающие возможность изменения угла θ, полагающие данный угол постоянным и равным известному статическому краевому углу смачивания для рассматриваемых фаз, не могут обеспечить описания перехода от капли с односвязной свободной поверхностью к слою с двусвязной границей Σ, независимо от того, учитывается или нет испарение жидкости. В случае фиксированной массы капли это обусловлено существованием критического числа $\mathrm{We} = \mathrm{We}_c(v, \mathrm{Bo}, \theta)$, такого что для заданных значений v, Bo и θ: 1) при $\mathrm{We} > \mathrm{We}_c(v, \mathrm{Bo}, \theta)$ слой с односвязной поверхностью Σ не может существовать, 2) при $\mathrm{We} \leq \mathrm{We}_c(v, \mathrm{Bo}, \theta)$ высота капли в середине больше нуля [10, 11].

Исследование устойчивости к осесимметричным и трёхмерным возмущениям производится с использованием принципа минимума потенциальной энергии. При этом с учётом гистерезиса динамического краевого угла вводится дополнительное допущение о неподвижности периметра смачивания при малых возмущениях [12, 13]. Слой полагается неустойчивым к трёхмерным возмущениям тогда и только тогда, когда он неустойчив по отношению к первой гармонике данных возмущений по окружной координате [13].

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ Республики Беларусь «Энергофизические системы и технологии», НИР «Гидродинамические и теплофизические аспекты процессов распыления и нанесения жидких материалов на твёрдые поверхности».

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang X.-L., Qin J., Gao P. *Axisymmetric evolution of thin films in spin coating.* J. of Fluid Mechanics. 2025. V. 1007. A56.
2. Конон П. Н., Кулаго А. Е., Сицко Г. Н., Конон Н. П. *Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске.* Теоретическая и прикладная механика: Международный научно-технический сборник. 2016. Вып. 31. С. 87–94.
3. Илиев С. Д. *Об одной модели гистерезиса капиллярного угла контакта.* Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38. № 4. С. 674–681.
4. Bùtt H.-J., Liu J., Koynov K. [et al.] *Contact angle hysteresis.* Current Opinion in Colloid and Interface Science. 2022. V. 59. 101574.
5. Audzeichyk Y. V., Konon P. N., Mogilevskiy E. I. *Analytical and numerical research of the forms of equilibrium of a liquid limited volume on a rotating horizontal base.* Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials. 2020. V. 51. No. 2. P. 91–96.

6. Shikhmurzaev Y. D. *Moving contact lines in liquid/liquid/solid systems.* J. of Fluid Mechanics. 1997. V. 334. P. 211–249.
7. Winkels K. G., Peters I. R., Evangelista F. [et al.] *Receding contact lines: From sliding drops to immersion lithography.* The European Physical J. Special Topics. 2011. V. 192. P. 195–205.
8. Пухначёв В. В., Семёнова И. Б. *Модельная задача о внезапном движении линии трёхфазного контакта.* Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 4. С. 51–61.
9. Lebedev-Stepanov P. V., Karabut T. A., Chernyshov N. A., Rybak S. A. *Investigation of the shape and stability of a liquid drop on a rotating substrate.* Acoustical Physics. 2011. V. 57. No. 3. P. 320–325.
10. Авдейчик Е. В., Конон П. Н. *Численное исследование относительного равновесия капли с односвязной свободной поверхностью на вращающейся плоскости.* Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 79–90.
11. Полевиков В. К., Денисенко В. М. *Численное исследование равновесных форм капли, вращающейся в гравитационном поле.* Вестник Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина. Серия 1. Физика. Математика. Механика. 1985. № 2. С. 37–41.
12. Audzeichyk Y. V., Konon P. N. *Stability of a bounded liquid layer on a rotating horizontal plane.* Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2023. V. 11. No. 2. P. 11–32.
13. Авдейчик Е. В. *Устойчивость осесимметричной капли жидкости на вращающейся плоскости к распаду на радиальные струи.* Вестник Фонда фундаментальных исследований. 2025. Т. 112. № 2. С. 124–142.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ НАНОЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ

Ы. Алтынбек уулу, Е. В. Кучунова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Рассматривается двумерная квадратная область $\Omega = [0, L]^2$, заполненная наножидкостью Al_2O_3/вода (рис. 1). Течение стационарное, ламинарное; жидкость несжимаемая, ньютоновская. Силы плавучести учитываются в приближении Буссинеска [1].

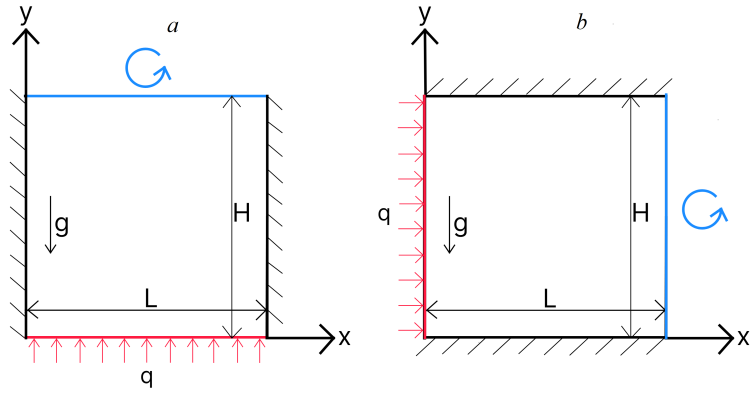


Рис. 1. Схема полости: нагрев снизу (a), нагрев слева (b)

Следующая конфигурация граничных условий соответствует модели нагрева снизу (a) и слева (b) [2].

1. Нагрев снизу ($y = 0$) или слева ($x = 0$): постоянный тепловой поток

$$-k_n \frac{\partial T}{\partial n} = q = \text{const}.$$

2. Охлаждение сверху ($y = 1$) или справа ($x = 1$): конвективный теплообмен

$$-k_n \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_\infty).$$

3. Боковые стенки ($x = 0, 1$) или ($y = 0, 1$): адиабатические (теплоизолированы).

4. Границы: условие прилипания $u = 0$.

Задача обезразмерена по методу неопределенных переменных [1]:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad t_c = \frac{L}{U}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{\Delta T},$$

где характерная скорость $U = \sqrt{\beta \Delta T L}$.

Система уравнений в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \bar{u} = -\bar{\nabla} \bar{p} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Gr}}} \nabla^2 \bar{u} - \left(\frac{1}{\mathrm{Fr}^2} + \bar{T} \right) \mathbf{k}, \tag{1}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Gr}}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \right) = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \bar{\nabla}^2 \bar{T} + 2\mathrm{Ec} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Gr}}} \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}. \tag{3}$$

Здесь ключевыми критериями подобия являются:

1) число Грасгофа: $\mathrm{Gr} = g\beta \Delta T \nu^{-2}$ – отношение сил плавучести к силам вязкости;

2) число Прандтля: $\mathrm{Pr} = \nu/\alpha$ – отношение кинематической вязкости к температуропроводности.

Эффективные свойства наножидкости определяются через объёмную долю ϕ [3–5].

1. Плотность и теплоёмкость:

$$\rho_{nf} = (1-\phi)\rho_f + \phi \rho_p, \qquad (\rho C_p)_{nf} = (1-\phi)(\rho C_p)_f + \phi (\rho C_p)_p.$$

2. Теплопроводность (модель Хо):

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = 1 + 2.7\phi.$$

3. Вязкость (Бринкман):

$$\mu_{nf} = \mu_f (1-\phi)^{-2.5}.$$

Задача (1)–(2) решается методом конечных элементов (FEM) в фреймворке FEniCSx [6, 7]. Для связи давления и скорости используется проекционный метод [8]. Пространственная аппроксимация выполняется элементами Тейлора – Худа (P2-P1), что удовлетворяет условию LBB (Ladyzhenskaya – Babuška – Brezzi). Для программирования в FEniCSx уравнения (1)–(2) приводятся к слабой (вариационной) формулировке путём умножения на тестовые функции и интегрирования по расчётной области. Алгоритм имеет следующий вид: найти $(\mathbf{u}, p, \theta) \in \mathbf{V} \times Q \times \Theta$ такие, что $\forall\, (\mathbf{v}, q, s) \in \mathbf{V} \times Q \times \Theta$:

Шаг 1. Предварительная скорость

$$\left\langle \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n, \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \sigma(\bar{\mathbf{u}}, p^n), \nabla \mathbf{v} \right\rangle = \left\langle (\theta^n - \theta_{\mathrm{ref}})\mathbf{e}_y, \mathbf{v} \right\rangle, \tag{4}$$

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T\right), \qquad \sigma = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{Gr}}} \epsilon(\bar{\mathbf{u}}) - p^n \mathbf{I}, \qquad \bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^*}{2}. \tag{5}$$

Шаг 2. Давление

$$\left\langle \nabla p^{n+1}, \nabla q \right\rangle = \left\langle \nabla p^n, \nabla q \right\rangle - \frac{1}{\Delta t} \left\langle \nabla \cdot \mathbf{u}^*, q \right\rangle. \tag{6}$$

Шаг 3. Коррекция скорости

$$\left\langle \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v} \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \right\rangle - \Delta t \left\langle \nabla (p^{n+1} - p^n), \mathbf{v} \right\rangle. \tag{7}$$

Шаг 4. Температура

$$\sqrt{\mathrm{Gr}}\left\langle\frac{\theta^{n+1}-\theta^{n}}{\Delta t},s\right\rangle+\sqrt{\mathrm{Gr}}\langle(\mathbf{u}^{*}\cdot\nabla)\bar{\theta},s\rangle+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\langle\nabla\bar{\theta},\nabla s\rangle=$$

$$=\langle q_{\mathrm{flux}},s\rangle_{\Gamma_{\mathrm{bottom}}}-\langle\mathrm{Bi}(\theta^{n+1}-\theta_{\mathrm{ref}}),s\rangle_{\Gamma_{\mathrm{top}}},\quad(8)$$

$$\bar{\theta}=\frac{\theta^{n}+\theta^{n+1}}{2}.\quad(9)$$

В результате серии вычислительных экспериментов для двух вариантов конфигурации граничных условий получены показатели эффективности теплообмена (среднее число Нуссельта), см. таблицы 1, 2, и изображения полей скорости и температуры для наглядной демонстрации естественной конвекции внутри квадратной полости, рис. 2, 3.

Таблица 1. Влияние объёмной доли наночастиц Al_2O_3 на среднее число Нуссельта при $\mathrm{Bi}=100$ в случае нагрева снизу

ϕ, %	Gr	Pr	$\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$ (max)	Прирост $\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$, %
0	196 200	6,816	1,30	(базовая жидкость)
1	193 527	6,589	1,97	52,25
2	190 622	6,382	1,63	26,06
3	187 504	6,192	1,73	33,40
4	184 190	6,017	1,34	3,70
5	180 699	5,857	2,10	61,89

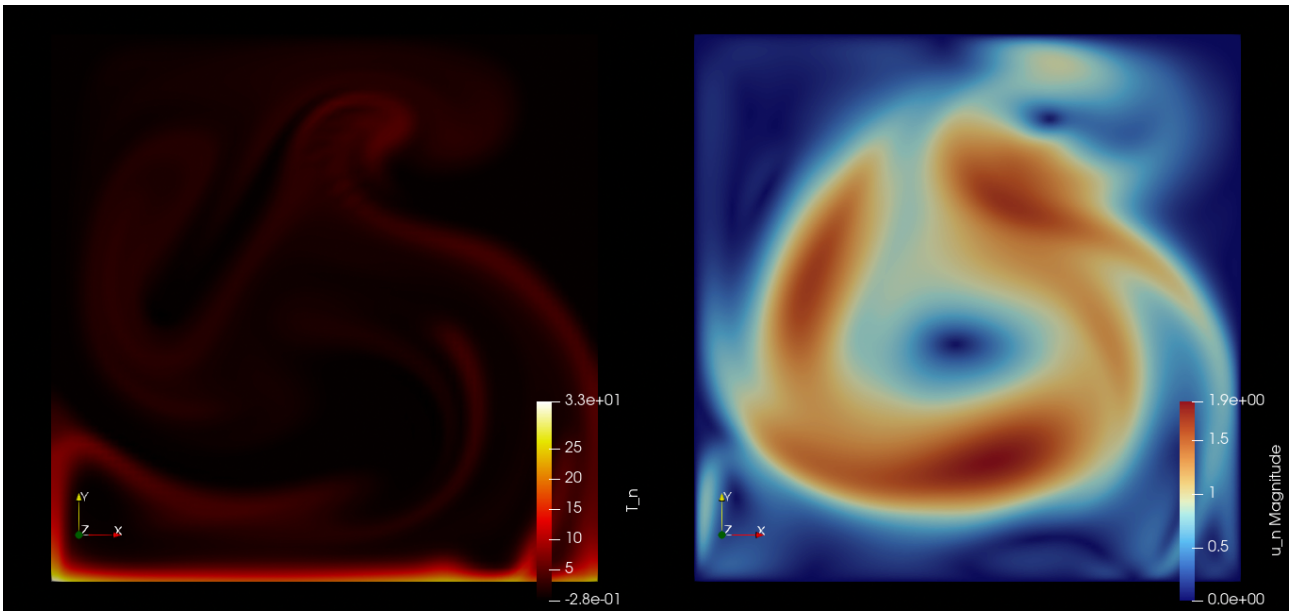


Рис. 2. Температура (слева), скорость (справа) при $\phi=1\,\%$, $\mathrm{Gr}=193527$

Таблица 2. Влияние объёмной доли наночастиц Al_2O_3 на среднее число Нуссельта при Bi = 100 в случае нагрева слева

ϕ, %	Gr	Pr	Nu_{avg} (max)	Прирост Nu_{avg}, %
0	196 200	6,816	2,8616	(базовая жидкость)
1	193 527	6,589	2,9106	1,71
2	190 622	6,382	2,96	3,33
3	187 504	6,192	3,00	4,84
4	184 190	6,017	3,04	6,24
5	180 699	5,857	3,08	7,54

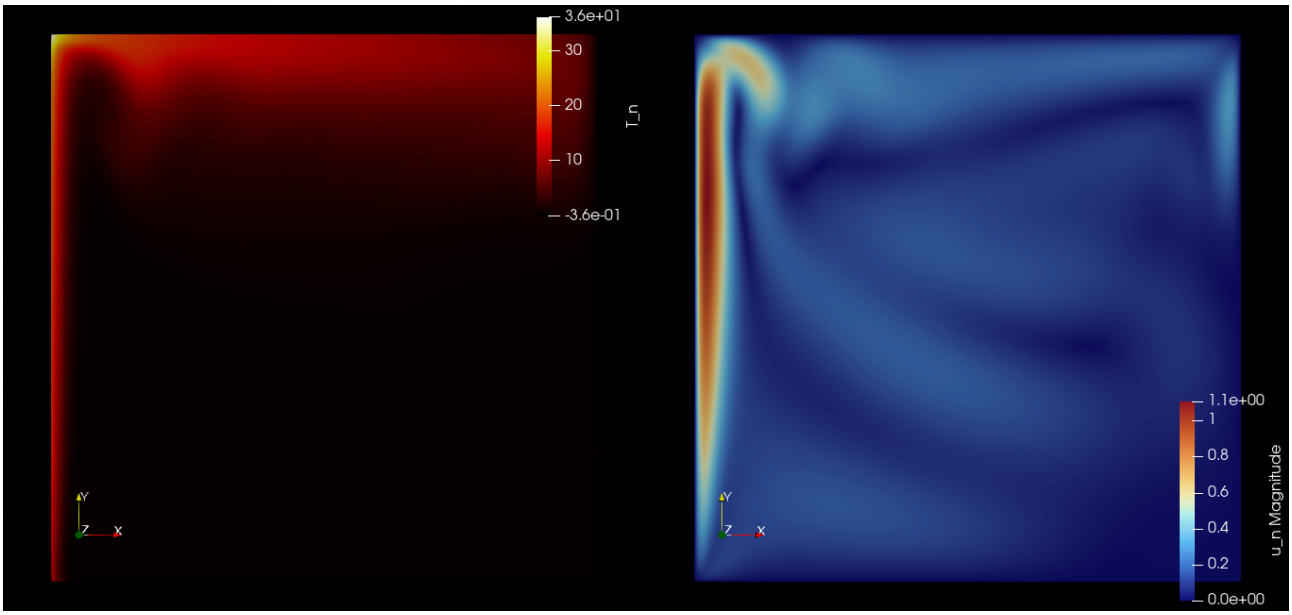


Рис. 3. Температура (слева), скорость (справа) при $\phi = 1\,\%$, Gr = 193527

ЛИТЕРАТУРА

1. Langtangen H. P., Pedersen G. K. *Scaling of differential equations*. Springer Nature. 2016. P. 138.
2. Chelia W., Laouer A., Mezaache E. H., Teggar M., Arıcı M., Ismail K. A. *Investigation of nanofluid natural convection inside a square cavity for two orientations using lattice Boltzmann method*. J. of Nanofluids. 2023. V. 12. No. 4. P. 889–903.
3. Boualit A., Zeraibi N., Chergui T. [et al.] *Natural convection investigation in square cavity filled with nanofluid using dispersion model*. Int. J. of Hydrogen Energy. 2017. V. 42. No. 13. P. 8611–8623.
4. Buongiorno J. *Convective transport in nanofluids*. 2006. V. 128. Iss. 3. P. 240–250.
5. Xuan Y., Li Q. *Heat transfer enhancement of nanofluids*. Int. J. of Heat and Fluid Flow. 2000. V. 21. No. 1. P. 58–64.
6. Baratta I. A., Dean J. P., Dokken J. S. [et al.] *DOLFINx: the next generation FEniCS problem solving environment*. 2023.

7. Langtangen H. P., Logg A. *Solving PDEs in Python: the FEniCS tutorial I*. Springer Nature. 2017. 146 p.
8. Chorin A. J. *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*. Mathematics of Computation. 1968. V. 22. No. 104. P. 745–762.

МЕДЛЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ НА ПЛОСКОЙ ПОДЛОЖКЕ ПРИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В. К. Андреев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Теоретико-групповой анализ [1] уравнений модели термокапиллярного движения выделяет зависимость поверхностного натяжения $\sigma(\theta) = C\theta^{1/2}$, однако она не удовлетворяет всем ограничениям Гиббса: $\sigma(\theta) \geqslant 0$, $\sigma'(\theta) \leqslant 0$, $\sigma''(\theta) \leqslant 0$. В экспериментах число Вебера $\mathrm{We} = \sigma_0 l/\mu\chi \gg 1$, а число Бонда $\mathrm{Bo} = \rho g l^2/\sigma_0 \ll 1$. При этом свободную границу можно считать плоской [2] и $\sigma(\theta) = \sigma_0 + æ_1(b + \eta\theta)^n$, где $\sigma_0 \geqslant 0$, $æ_1, b$ — произвольные постоянные, а η принимает одно из двух значений ± 1. Если интервал изменения абсолютной температуры θ заранее известен, то термодинамическим запретам на $\sigma(\theta)$ можно удовлетворить в широком диапазоне изменения параметров $\sigma_0, æ_1, b$ при любом n (для $n > 1$ следует полагать $\eta = 1, æ_1 < 0$, а для $n < 1$ взять $\eta = -1, æ_1 > 0$). В это семейство попадает и линейная зависимость $\sigma(\theta)$: $\sigma(\theta) = \sigma_0 - æ(\theta - \theta_0)$ с положительными постоянными σ_0, æ, θ_0.

В связи с вышесказанным ограничимся случаем $n = 1/2$, так что

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 + æ_1(\theta_0 - \theta)^{1/2}$$

с постоянными $\sigma_0 > 0$, $æ_1$ и $\theta_0 > 0$, причём величина θ_0 должна быть достаточно большой.

Далее рассматривается конвективное движение на неподвижной поверхности в отсутствие массовых сил. Слой жидкости толщины l обладает плоской свободной границей, нижняя граница — твёрдая подложка. Решение уравнений двумерной конвекции ищется в виде

$$u(x,y,t) = U(y,t)x, \quad v(x,y,t) = V(y,t), \quad p(x,y,t) = P(x,y,t),$$
$$\theta(x,y,t) = T(y,t) - [A(y,t)x^2 + B(y,t)]^2.$$

Если ввести замену $H = A^2$, $G = AB$, $F = B^2 - T$ и перейти к безразмерным переменным, то возникает начально-краевая задача

$$U_t + U^2 + U'V + C(t) = U_{yy}, \quad U + V_y = 0,$$
$$H_t + 4UH + VH' = \mathrm{P}^{-1}H'', \quad G_t + 2UG + VG' = \mathrm{P}^{-1}(G'' + 6H),$$
$$F_t + VF' = \mathrm{P}^{-1}(F'' + 4G), \quad y \in (0,l), \quad t > 0,$$

с граничными условиями

$$U(0,t) = 0, \quad V(0,t) = 0, \quad H(0,t) = A^2(0,t) \equiv H_0(t),$$
$$G(0,t) = A(0,t)B(0,t) \equiv G_0(t), \quad F(0,t) = B(0,t) - T(0,t) \equiv F_0(t),$$

$$\int_0^1 U(z,t)\,dz = 0,$$

$$V(1,t)=0,\quad U'(1,t)=-\mathrm{M}\sqrt{H(1,t)},\quad H'(1,t)+\mathrm{Bi}H(1,t)=0,$$
$$G'(1,t)+\mathrm{Bi}G(1,t)=0,\quad F'(1,t)+\mathrm{Bi}[F(1,t)+\theta_g(t)]+q(t)=0,\quad T(1,t)=1.$$

В уравнениях и граничных условиях

$$\mathrm{P}=\frac{\nu}{\chi},\quad \mathrm{M}=\frac{2æ_1 l}{\mu\nu}\sqrt{\theta_0},\quad \mathrm{Bi}=\frac{\gamma l}{k}$$

суть числа Прандтля, Марангони и Био соответственно.

Упомянутые краевые условия следует дополнить начальными данными:

$$U(y,0)=U_0(y),\ V(y,0)=V_0(y),\ H(y,0)=H_{00}(y),\ G(y,0)=G_{00}(y),\ F(y,0)=F_{00}(y),$$

которые должны для гладкого решения удовлетворять условиям согласования. Например,

$$U_0(y)=0,\quad V_{0y}=0,\quad \int\limits_0^1 U_0(y)\,dy=0,\quad U_{0y}(1)=-\mathrm{M}\sqrt{H_{00}(1)}$$

и т. д.

В этой постановке градиент давления есть функция времени $C(t)$, как и заданные величины $\theta_g(t)$, $q(t)$. Кроме того, в размерных переменных давление выражается формулой

$$\frac{1}{\rho}P(x,y,t)=\nu V_y-\frac{V^2}{2}-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^y V(y,t)\,dy+C(t)\frac{x^2}{2}+C_0(t)$$

с произвольной функцией $C_0(t)$.

Поставленная задача является нелинейной и обратной. При $|\mathrm{M}|\ll 1$ (медленное или ползущее движение) ищем решение этой задачи в виде разложений

$$U(y,t)=\mathrm{M}U^{(1)}(y,t)+\mathrm{M}^2U^{(2)}(y,t)+...,\quad V(y,t)=\mathrm{M}V^{(1)}(y,t)+\mathrm{M}^2V^{(2)}(y,t)+...,$$
$$C(t)=\mathrm{M}C^{(1)}(t)+\mathrm{M}^2C^{(2)}(t)+...,\qquad H(y,t)=H^{(0)}(y,t)+\mathrm{M}H^{(1)}(y,t)+...,$$
$$G(y,t)=G^{(0)}(y,t)+\mathrm{M}G^{(1)}(y,t)+...,\qquad F(y,t)=F^{(0)}(y,t)+\mathrm{M}F^{(1)}(y,t)+...$$

Для первого приближения получим систему

$$\begin{gathered}U_t+C(t)=U_{yy},\quad U+V_y=0,\quad H_t=\mathrm{P}^{-1}H_{yy},\\ G_t=\mathrm{P}^{-1}(G_{yy}+6H),\quad F_t=\mathrm{P}^{-1}(F_{yy}+4G),\quad y\in(0,1),\quad t>0,\end{gathered}\tag{1}$$

с граничными и начальными данными

$$\begin{gathered}U(0,t)=V(0,t)=0,\quad \int\limits_0^1 U(y,t)\,dy=0,\\ H(0,t)=H_0(t),\quad G(0,t)=G_0(t),\quad F(0,t)=F_0(t),\\ U_y(1,t)=-\sqrt{H(1,t)},\quad H_y(1,t)+\mathrm{Bi}H(1,t)=0,\\ G_y(1,t)+\mathrm{Bi}G(1,t)=0,\quad F_y(1,t)+\mathrm{Bi}(F(1,t)+\theta_g(t))+q(t)=0,\\ U(y,0)=U_0(y),\quad V(y,0)=V_0(y),\quad U_0+V_{0y}=0,\\ H(y,0)=H_{00}(y),\quad G(y,0)=G_{00}(y),\quad F(y,0)=F_{00}(y).\end{gathered}\tag{2}$$

Получены следующие результаты.

1. Для стационарного медленного течения найдено точное решение:

$$
\begin{gathered}
U^{(1)}(y)=\frac{C^{(1)}}{2}\left(y^2-\frac{2y}{3}\right),\quad V^{(1)}(y)=-\frac{C^{(1)}}{6}\left(y^3-y^2\right),\\
C^{(1)}=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{H_0}{1+\mathrm{Bi}}},\quad H^{(0)}(y)=H_0\left(1-\frac{\mathrm{Bi}}{1+\mathrm{Bi}}\,y\right),\\
G^{(0)}(y)=-H_0\left(3y^2-\frac{\mathrm{Bi}}{1+\mathrm{Bi}}\,y^3\right)+\alpha y+G_0,\\
\alpha=\frac{2H_0}{(1+\mathrm{Bi})^2}\left(3+3\mathrm{Bi}+\mathrm{Bi}^2\right)-\frac{\mathrm{Bi}}{1+\mathrm{Bi}}\,G_0,\\
F^{(0)}(y)=H_0\left(y^4-\frac{\mathrm{Bi}}{5(1+\mathrm{Bi})}\,y^5\right)-\frac{2}{3}\,\alpha y^3-2G_0y^2+\beta y+F_0,\\
\beta=\frac{1}{1+\mathrm{Bi}}\left[\frac{2}{3}\,(3+\mathrm{Bi})\alpha+2(2+\mathrm{Bi})G_0-q-\mathrm{Bi}(F_0+\theta_g)-\frac{4H_0}{1+\mathrm{Bi}}\left(1+\mathrm{Bi}+\frac{1}{5}\,\mathrm{Bi}^2\right)\right].
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Функция $T^{(0)}(y)$ определяется так:

$$
T^{(0)}(y)=\frac{\left(G^{(0)}(y)\right)^2}{H^{(0)}(y)}-F^{(0)}(y).
$$

2. Для нестационарного движения доказана

Теорема. *Пусть выполнены условия*

$$
|H_0(t)-H_0|\leqslant d_1e^{-\delta_1t},\quad |G_0(t)-G_0|\leqslant d_2e^{-\delta_2t},\quad |F_0(t)-F_0|\leqslant d_3e^{-\delta_3t},
$$

$$
|q(t)-q_0|\leqslant d_4e^{-\delta_4t},\quad |\theta_g(t)-\theta_{0g}|\leqslant d_5e^{-\delta_5t}
$$

с положительными постоянными $d_1,\ldots;\delta_1,\ldots$ *Тогда решение начально-краевой задачи* (1), (2) *при* $t\to\infty$ *экспоненциально сходится с ростом времени к стационарному решению* (3).

Таким образом, стационарное решение является экспоненциально устойчивым при $|M|\ll 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. К., Пухначёв В. В. *Инвариантные решения уравнений термокапиллярного движения.* Численные методы механики сплошной среды. 1983. Т. 14. № 5. С. 2–23.
2. Зейтунян Р. Х. *Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара – Марангони.* УФН. 1998. Т. 168. С. 259–286.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО АВТОФРЕТИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

И. К. Андрианов

Комсомольский-на-Амуре государственный университет

Совершенствование подходов к расчёту напряжённо-деформированного состояния при осесимметричном деформировании в условиях знакопеременного нагружения, а также с учётом нелинейного деформационного упрочнения [1, 2] создало предпосылки для решения проблемы оптимизации процессов автофретирования толстостенных цилиндров. В рамках исследования рассматривается задача расчёта оптимального давления автофретирования p' в толстостенном цилиндре $r_{\text{in}} \leq r \leq r_{\text{out}}$ в условиях плоской деформации. В процессе автофретирования переход упругих деформаций ε^{el} к пластическим ε^{pl} определяется условием пластичности Губера – Мизеса с использованием предела текучести материала σ_γ. Математическая модель оптимизации процесса автофретирования строилась на основании минимизации максимальной интенсивности напряжений σ_i, возникающей при первоначальном нагружении на поверхности, разделяющей области упругого и пластического деформирования:

$$\max_{r_{\text{in}} \leq r \leq r_{\text{out}}} \sigma_i\left(r, p', p''\right) \rightarrow \min_{p_{\text{low}} \leq p' \leq p_{\text{up}}},$$

$$\max_{r_{\text{in}} \leq r \leq r_{\text{out}}} \sigma_i\left(r, p', p''\right) = \sigma_i\left(r, p', p''\right)|_{r=r_\gamma}, \;\; r_\gamma = \{r \,:\, \varepsilon_i^{pl}|_{r=r-0} = \varepsilon_i^{el}|_{r=r+0}, \;\; p'' = 0\},$$

$$p_{\text{low}} = \{p` \,:\, \sigma_i|_{r=r_{\text{in}}} = \sigma_\gamma\}, \;\; p_{\text{up}} = \{p' \,:\, \sigma_i|_{r=_{\text{out}}} = \sigma_\gamma\},$$

где оптимальное решение поставленной задачи определяет давление автофретирования $p^* = p'\left(p'', r_\gamma\right)$, зависящее от рабочего давления при повторном нагружении p'' и положения граничной поверхности r_γ, разделяющей области упругого и пластического деформирования на этапе автофретирования.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-79-10135, https://rscf.ru/project/25-79-10135/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов И. К. *Анализ нагружения толстостенных оболочек в пространстве Ильюшина при автофретировании.* Прикладная математика и механика. 2025. Т. 89. № 2. С. 295–309.
2. Феоктистов С. И. *Моделирование гидравлического автофретирования толстостенных цилиндрических оболочек с учетом упругопластической анизотропии, вызванной эффектом Баушингера.* Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2025. № 2. С. 149–178.

ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЁТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА (LBM) ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Е. А. Баженов, Е. В. Кучунова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Традиционный подход к моделированию динамики жидкостей и газов связан с математическими моделями на основе уравнений Навье – Стокса. Трудоёмкость этого подхода значительно повышается при моделировании среды с нелинейными границами или препятствиями, что ограничивает его применимость к реальным практическим задачам. Эти классические уравнения внесли неоценимый вклад в развитие теории и практики большинства технологических процессов. Однако в последние годы появились новые подходы к математическому моделированию физических процессов и, прежде всего, использование для этих целей дискретных математических объектов.

Первые дискретные модели, описывающие движение жидкостей и газов (HPP и FHP), симулировали поведение каждой частицы вещества, движущейся по квадратной (HPP) или шестиугольной (FHP) регулярной решётке и сталкивающейся с другими частицами [1]. Основными критериями при разработке таких моделей было соблюдение законов сохранения. Макроскопические параметры, такие как плотность, скорость, момент импульса, вычислялись путём усреднения величин, получаемых на микроскопическом уровне. Указанные модели являются очень ресурсоёмкими, и применение их на практике к реальным объёмам жидкости проблематично.

Продолжением и развитием дискретного подхода стала модель решётчатого газа Больцмана (LBM), появившаяся в конце 90-х годов XX века [2]. В этой модели понятие конкретной частицы заменяется плотностью распределения частиц, их взаимодействия описываются оператором столкновений, а не итерационными правилами, плоская сплошная среда разбивается на малые объёмы – ячейки жидкости (газа). Количество материальных частиц в каждой ячейке характеризуется локальной плотностью ρ. Для каждой ячейки предусмотрено наличие девяти направлений (скоростных каналов), по которым могут двигаться частицы. Это сама клетка (нулевое направление) и восемь направлений в сторону соседних клеток. Такая решётка получила название D2Q9 (2 измерения, 9 соседей) [1]. Количество частиц, движущихся по каждому из скоростных каналов i, характеризуется плотностью распределения частиц по скоростным каналам $f_i(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x}$ и t – координаты ячейки потока в пространстве и времени соответственно.

Метод решёточных уравнений Больцмана хорошо зарекомендовал себя в численном моделировании жидкостей. Его популярность связана с простотой применения для моделирования динамики жидкости в областях сложной формы. В работе [3] метод LBM использовался для моделирования ламинарных потоков в канале. Полученные данные показали хорошее согласование с результатами моделирования в пакете ANSYS FLUENT. Авторы [4] модифицировали метод LBM для моделирования естественной конвекции в полости с открытой стенкой в поле внешних сил. Расчёты показали, что учёт силового воздействия повышает точность моделирования. В работе [5] LBM применялся для моделирования вынужденного конвективного теплообмена в микроканалах различной геометрии. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В представленной работе рассматривается конвективное движение жидкости в прямоугольной области $D \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 1, слева). В начальный момент времени $t = 0$ температура

жидкости равна температуре окружающей среды T_0. На нижней границе задан постоянный поток тепла q, на верхней границе задаётся условие теплообмена с окружающей средой, левая и правая границы теплоизолированы:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -q, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=H} = \alpha \left(T(t,x,H) - T_0\right), \quad \forall x \in [0, L];$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0, \quad \forall y \in [0, H],$$

где α – коэффициент теплоотдачи окружающей среды, λ – коэффициент теплопроводности жидкости.

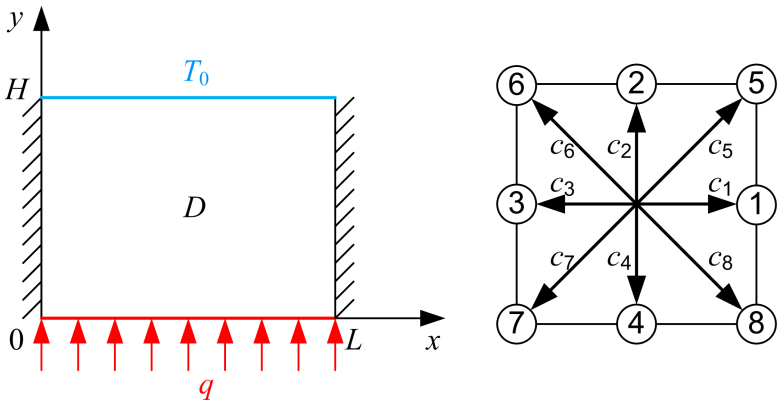


Рис. 1. Область моделирования (слева) и дискретная скорость частиц для модели D2Q9 (справа)

Область моделирования разбивается на декартову решётку D2Q9 (рис. 1, справа). Каждая ячейка решётки $\mathbf{x}$ содержит функции распределения $f_i(\mathbf{x}, t)$ и $g_i(\mathbf{x}, t)$, первая для потока, а вторая для температурного поля [6, 7].

Перейдём к дискретному аналогу уравнения Больцмана. Он описывает эволюцию функций распределения во времени и пространстве:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_v} \left[f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)\right] + \Delta t\, \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F},$$

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = g_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_D} \left[g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{x}, t)\right],$$

где $\mathbf{c}_i = (c_{ix}, c_{iy})$ – дискретный вектор скорости в узле $\mathbf{x} = (x, y)$, Δt – шаг по времени, а $\mathbf{F}$ – вектор внешней силы. Параметр τ_v представляет собой время релаксации потока, τ_D – время релаксации температуры, f_i^{eq} и g_i^{eq} – равновесные функции распределения, определённые как в [8].

Равновесные функции распределения f_i^{eq} и g_i^{eq} можно найти по следующим формулам:

$$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i\, \rho \left(1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2}\right),$$

$$g_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i\, T \left(1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2}\right),$$

где $c_s = c/\sqrt{3}$ – скорость звука в решёточных единицах, w_i – весовые коэффициенты, которые зависят от выбранной модели D2Q9, а именно:

$$w_0 = \frac{4}{9}\,, \quad w_{1-4} = \frac{1}{9}\,, \quad w_{5-8} = \frac{1}{36}\,.$$

Скорость звука $c_s = c/\sqrt{3}$ определяется через скорость решётки c, где $c = \Delta x/\Delta t$. Здесь Δx – шаг решётки, при этом значения $\Delta x = \Delta t = 1$. Время релаксации получается из следующих выражений:

$$\tau_v = \frac{\Delta t}{2} + \frac{\nu}{c_s^2 \Delta t}\,, \quad \tau_D = \frac{\Delta t}{2} + \frac{a}{c_s^2 \Delta t}\,,$$

где ν – кинематическая вязкость в решёточных единицах, a – коэффициент температуропроводности в решёточных единицах.

Макроскопические переменные (плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$, локальная скорость $u(\mathbf{x}, t)$, температура $T(\mathbf{x}, t)$) пересчитываются на каждом временном шаге, их можно найти из функций распределения следующим образом:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t), \quad u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t), \quad T(\mathbf{x}, t) = \sum_i g_i(\mathbf{x}, t).$$

На твёрдых стенках для реализации условия прилипания потока в LBM используется условие отскока (bounce-back) [8]. При этом граница между жидкостью и стенкой проходит между узлами (на полпути), в крайних рядах не происходит релаксации к равновесной функции распределения; вместо этого функции распределения f_i принимают значения функций распределения противоположного направления. Это даёт 2-й порядок точности, автоматическую обработку углов и физически корректное условие прилипания. Отскок описывается формулой

$$f_{\bar{i}}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t),$$

где $\bar{i}$ – направление, противоположное к i. Температура стенки вычисляется через конечные разности 2-го порядка:

$$T_w = \frac{4T_1 - T_2}{3} - \frac{2}{3} G_{lb},$$

где G_{lb} — решёточный градиент температуры:

$$G_{lb} = -\frac{q_{phys} \cdot \Delta x}{k_{phys} \cdot \Delta T_{scale}}\,.$$

Неизвестные g_i восстанавливаются через антиотскок:

$$g_i = -g_{\bar{i}} + 2 w_i T_w.$$

Для корректного моделирования необходимо установить соответствие между безразмерными величинами и физическими параметрами среды.

Приведём результаты расчётов, полученные при моделирования воды. В качестве исходных физических параметров заданы: $\rho_{mod} = 1000$ кг/м^3, $\mu_{mod} = 0.001003$ Па·с, $u_{mod} = 0.01$ м/с, $L_{mod} = 0.1$ м. Вычисления проводились для значения числа Рэлея $\mathrm{Ra} = 10^5$. При таком значении числа Рэлея возникает режим неустойчивой ламинарной конвекции. Поток теряет стационарность, режим движения становится колебательным.

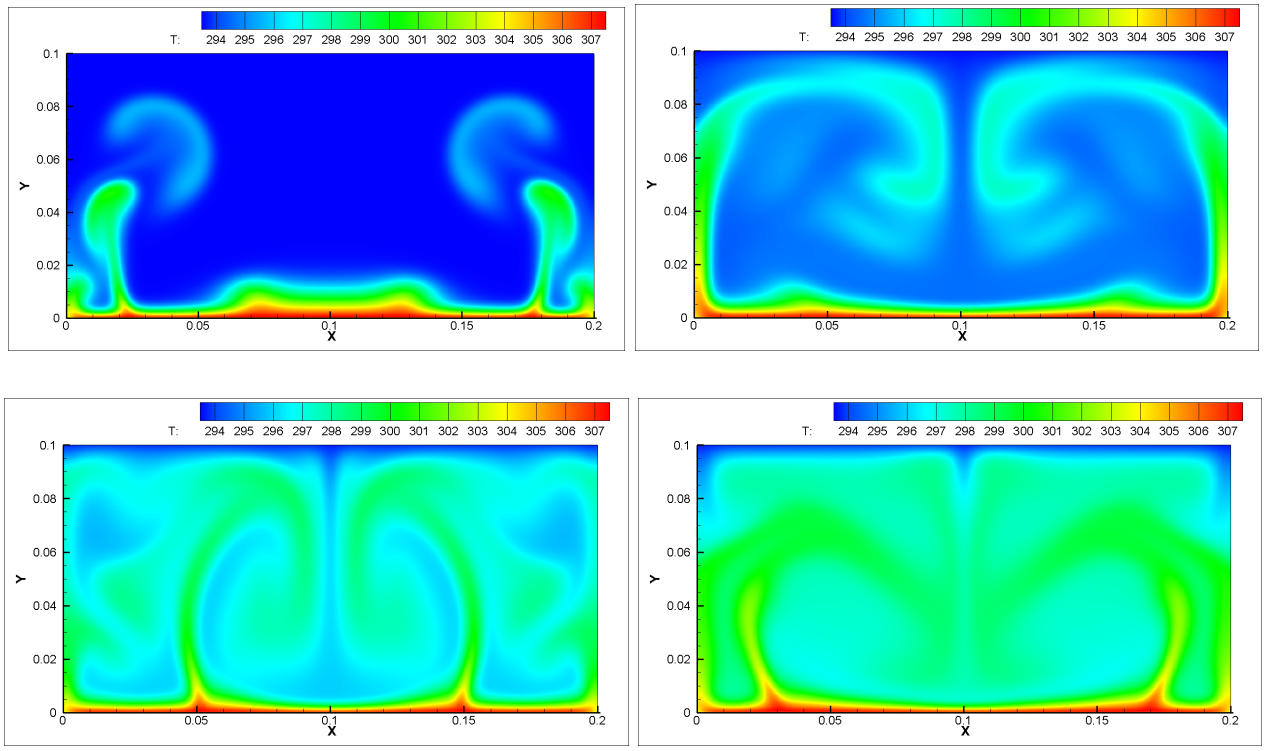


Рис. 2. Вычисленное поле температуры в моменты времени: 1000 с, 2000 с, 3000 с, 4000 с

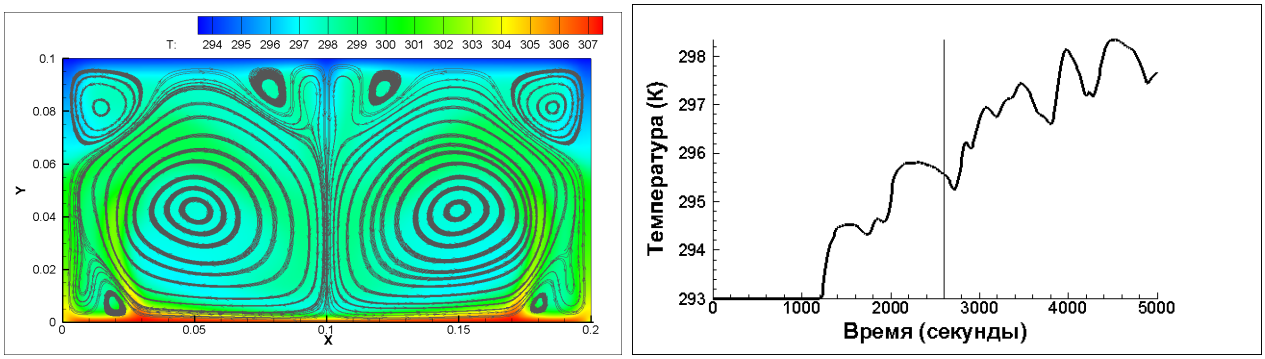


Рис. 3. Линии тока в момент времени 4000 с (слева), график температуры в центре области (справа)

На рис. 2 представлены расчётные поля температуры в различные моменты времени, полученные при использовании решётки размером 400×200 узлов.

На рис. 3 (слева) приведены линии тока в момент времени 4000 с. Расчёты показывают образование двух крупных вихрей и нескольких второстепенных меньшего размера. График зависимости температуры в центре расчётной области от времени приведён на рис. 3 (справа). Характер изменения температуры подтверждает колебательный характер течения. Анализ результатов показал, что максимальное отклонение плотности от опорного значения ρ/ρ_0 не превышает 8 %, что полностью удовлетворяет условиям применимости приближения Буссинеска и корректности использования слабосжимаемой модели LBM.

В ходе проведения компьютерного моделирования получены результаты, совпадающие с теоретическими представлениями о реальном процессе естественной конвекции в жидкости. Это доказывает возможность применения дискретных подходов и, в частности, метода решёточного газа Больцмана для исследования вышеописанного процесса. Существенным преимуществом LBM является то, что это явный метод, допускающий естественное распараллеливание. Последнее особенно актуально в связи с развитием технологий расчётов на графических процессорах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wolf-Gladrow D. A. *Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction.* Paris : Springer, 2005. 312 p.
2. Zhang J. *Lattice Boltzmann method for microfluidics: models and applications.* Microfluidics and Nanofluidics. 2010. V. 10. Iss. 1. P. 1–28.
3. Almalowi S. J., Oztekin A. *Flow simulations using two dimensional thermal lattice Boltzmann method.* J. of Applied Mathematics. 2012. V. 2012. Art. 135173. 12 p.
4. Mohamad A. A., Kuzmin A. *A critical evaluation of force term in lattice Boltzmann method, natural convection problem.* Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 990–996.
5. Liu Y., Cui J., Jiang Y. X., Li W. Z. *A numerical study on heat transfer performance of microchannels with different surface microstructures.* Applied Thermal Engng. 2011. V. 31. P. 921–931.
6. Chelia W., Laouer A., Mezaache E. H. [et al.] *Investigation of nanofluid natural convection inside a square cavity for two orientations using lattice Boltzmann method.* J. of Nanofluids. 2023. V. 12. No. 4. P. 889–903.
7. Laouer A., Djeghiour R. *Lattice Boltzmann simulation of magnetohydrodynamic free convection in a square enclosure with non-uniform heating of the bottom wall.* J. of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences. 2019. V. 59. No. 1. P. 13–28.
8. Mohamad A. A. *Lattice Boltzmann method.* London : Springer, 2011. 178 p.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКРИТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН С ДЕФЕКТАМИ ТИПА РАССЛОЕНИЯ

А. Б. Балданов, Р. П. Иванов

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ

В элементах обшивки, кожухов и защитных покрытий транспортных средств, выполненных из слоистых композиционных материалов, случайные ударные воздействия приводят к образованию комплекса дефектов – сквозных пробоин и внутренних расслоений. Наиболее опасными являются трудно обнаруживаемые межслойные расслоения, способные существенно снижать несущую способность при сжимающих нагрузках [1]. В настоящей работе методом конечных элементов исследуется влияние диаметра сквозного отверстия и диаметра расслоения, глубины его залегания в пакете слоёв на критическую силу потери устойчивости [2]. Рассматривалась численная модель прямоугольной пластины размером 120×180 мм, построенная в ANSYS [3], состоящая из 20 ортотропных монослоёв. Нагружение осуществлялось продольным перемещением верхнего торца; нижний торец шарнирно неподвижен. Сквозное отверстие и круговое расслоение задавались в центре пластины. Расслоение располагалось либо между 15-м и 16-м слоями (внутреннее), либо между 1-м и 2-м слоями (поверхностное). Для описания внутрислойного разрушения применялись критерии максимальных напряжений Цая–Ву и Пака. Межслойное разрушение моделировалось экспоненциальной моделью CHZ с заданием энергий разрушения для нормального отрыва и сдвига [4].

Основные результаты. При внутреннем расположении расслоения (слои 15/16) критическая сила Pmax практически не зависит от размера расслоения и определяется исключительно диаметром отверстия: её снижение составляет около 8,5 % при увеличении от 12 до 24 мм (с 6,8 кН до 6,25 кН). Перемещение расслоения из срединных слоёв к поверхности (слои 1/2) приводит к падению Pmax примерно на 20 % при тех же геометрических размерах дефектов. Для поверхностного расслоения (d=72 мм) без сквозного отверстия: его критическая сила составляет 6,0 кН, что ниже, чем у любого варианта с внутренним расслоением, в том числе с отверстиями диаметром до 24 мм. Таким образом, подповерхностное расслоение без пробоины представляет большую угрозу, чем отверстие с внутренним расслоением.

Работа выполнена за счёт средств гранта РБ № 30-2025-008364 на реализацию программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030»; поддержана грантом «Молодые ученые ВСГУТУ – 2026».

ЛИТЕРАТУРА

1. Bokhoeva L. A., Baldanov A. B., Rogov V. E. *The features of interlayer fracture of composite materials with a variable layup angle under impact loading.* Diagnostics, Resour. Mech. Mater. Struct. 2024. No. 2. P. 50–60.
2. Abrate S. *Impact on laminated composite materials.* Appl. Mech. Rev. 1991. V. 44. No. 4. P. 155–190.

3. ANSYS Inc. *PDF Documentation for Release 15.0.* ANSYS. Inc. 2014. Available at: http://www.ansys.com.
4. Dogan F., Hadavinia H., Donchev T., Bhonge P. S. *Delamination of impacted composite structures by cohesive zone interface elements and tiebreak contact.* Open Eng. 2012. V. 2. No. 4. P. 612–626.

ФОРМЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЕ

В. Б. Бекежанова[1], *И. А. Шефер*[2]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*
[2]*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

Управление режимами течений в многокомпонентных системах представляет одну из наиболее важных проблем при разработке жидкостных технологий различного назначения. Знание условий, в которых возможно развитие неустойчивостей, позволяет обеспечить надёжность работы узлов/участков соответствующего оборудования. В настоящей работе исследуется устойчивость режимов конвективных течений в двухслойной системе жидкость – газ, заполняющей протяжённый канал с твёрдыми стенками. Анализируются формы возможных неустойчивостей и их характеристики.

Рассматривается совместное течение испаряющейся жидкости и спутного парогазового потока в плоском горизонтальном мини-канале. Рабочие вещества не смешиваются, контактируют вдоль общей поверхности Γ и считаются несжимаемыми вязкими теплопроводными средами. Газ прокачивается над слоем жидкости с заданным расходом Q, вызывая формирование сдвиговых напряжений и продольного градиента температуры A на межфазной границе и рост скорости испарения. Изменение температуры поверхности в результате обдува приводит к возникновению термокапиллярных напряжений на Γ, при этом поверхностное натяжение жидкости на Γ описывается линейной зависимостью $\sigma(T)$, где T – температура. На стенках канала приложена линейная тепловая нагрузка с продольными градиентами A_j; здесь и далее индексами $j = 1, 2$ обозначены параметры или функции, соответствующие нижнему (жидкому, $j = 1$) и верхнему (газовому, $j = 2$) слоям. Интенсивность прокачки газа и внешнего температурного воздействия такова, что система слабо отклоняется от состоянии локального термодинамического равновесия, характеризуемого равновесными значениями паросодержания в несущем газе C_0, температуры T_0 и давления p_0.

Для определения характеристик возникающих конвективных режимов формулируется сопряжённая краевая задача в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$,

$$\Omega_1 = \{(x, y) : -\infty < x < \infty,\ -h_1 < y < f(x, t)\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) : -\infty < x < \infty,\ f(x, t) < y < h_2\},$$

с внешними границами $y = -h_2$, $y = h_1$ и внутренней границей раздела $\Gamma = \{(x, y) : y = f(x, t)\}$. Для описания течений в слоях Ω_j используются уравнения конвекции Обербека – Буссинеска, в которых искомыми функциями являются компоненты вектора скорости $\mathbf{v}_j = (u_j, v_j)$, температура T_j и модифицированное давление p_j, задающее отклонение истинного давления j-й среды от гидростатического. Перенос пара в газе моделируется уравнением конвективной диффузии с функцией паросодержания C, определяющей отклонение концентрации пара в фоновом газе от равновесного значения C_0. При постановке условий сопряжения на Γ эта термокапиллярная граница трактуется как поверхность Гиббса, допускающая перенос массы за счёт диффузионного испарения. Вклад испарения учитывается только в условии теплового баланса, конвективный перенос массы через Γ не рассматривается. В уравнениях теплопроводности, молекулярной диффузии и условиях на

границах, контактирующих с газовой фазой, дополнительно учитываются слагаемые, отвечающие эффектам Соре и Дюфура. Прямой и обратный термодиффузионные эффекты проявляются ввиду присутствия испаряемого компонента. Верхняя стенка непроницаема для пара.

Определяющая система уравнений допускает точное частично-инвариантное стационарное решение вида [1, 2]

$$\begin{gathered} u_j = u_j(y), \quad v_j = v_j(y), \quad p_j = p_j(x,y), \\ T_j = T_j(x,y) = (a_1^j + a_2^j y)x + \vartheta_j(y), \quad C = C(x,y) = (b_1 + b_2 y)x + \phi_j(y) \end{gathered} \tag{1}$$

с неизвестными параметрами $a_{1,2}^j$, b_j. Решение (1) может быть использовано для описания установившихся конвективных режимов в двухфазной системе с испарением [2, 3]. Подстановка (1) в уравнения и граничные соотношения позволяет восстановить все искомые функции и параметры в явном виде. Форма границы раздела Γ определяется из динамического условия. Одно из возможных решений $y = 0$, т. е. межфазная поверхность остаётся недеформированной. Способы поддержания плоской формы границы Γ в реальной физической двухфазной системе с точностью до 10 μm описаны в [4].

Рассмотрим инфинитезимальные трёхмерные возмущения $(\mathbf{U}, P, \Theta, S)$ точного решения (1), пропорциональные $\exp[i(\alpha_x x + \alpha_z z - \lambda\tau)]$, где $\mathbf{U} = (U, V, W)$ – вектор возмущений скорости, α_x, α_z – волновые числа вдоль осей x и z соответственно, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ – комплексный декремент, описывающий эволюцию возмущений во времени. В рамках линейной теории задача об устойчивости установившегося течения с испарением в двухфазной системе сводится к решению задачи о собственных значениях вида $\lambda G(\mathbf{V}, P, \Theta, S)^{\mathrm{T}} = J(\mathbf{V}, P, \Theta, S)^{\mathrm{T}}$ относительно декремента λ; здесь G — диагональная матрица, J — якобиан, определяющий правую часть линеаризованной задачи. Поиск собственных значений и соответствующих собственных векторов осуществляется численно с помощью метода ортогонализации [5]. На примере системы сред HFE-7100 – азот исследуется зависимость пороговых характеристик устойчивости и форм возникающих неустойчивостей от различных режимных параметров (геометрии системы, величины расхода Q, интенсивности гравитационного воздействия), анализируется влияние деформируемости Γ на структуру надкритичных конвективных режимов.

Для всех рассмотренных конфигураций с недеформируемой границей раздела линейная теория предсказывает потерю устойчивости в условиях существования на межфазной поверхности температурного градиента A, величина которого зависит от A_j, толщин слоёв и некоторых теплофизических параметров рабочих сред. В изучаемой системе всегда реализуется колебательная неустойчивость: возникающие гидродинамические и тепловые структуры распространяются по потоку с ненулевой фазовой скоростью. Для большинства рассмотренных конфигураций пространственные возмущения являются более опасными, чем плоские. Пространственная неустойчивость проявляется в форме валиковой конвекции, для которой характерно формирование упорядоченных продольных и поперечных структур различной топологии (примеры см. на рис. 1). Установлено стабилизирующее влияние термокапиллярного эффекта. В условиях конкурентного сосуществования термокапиллярного и термогравитационного механизмов при потере устойчивости возникают вихри со сложной симметрией и тепловые структуры с разной локализацией, в том числе с двухрядной упаковкой (рис. 1, б).

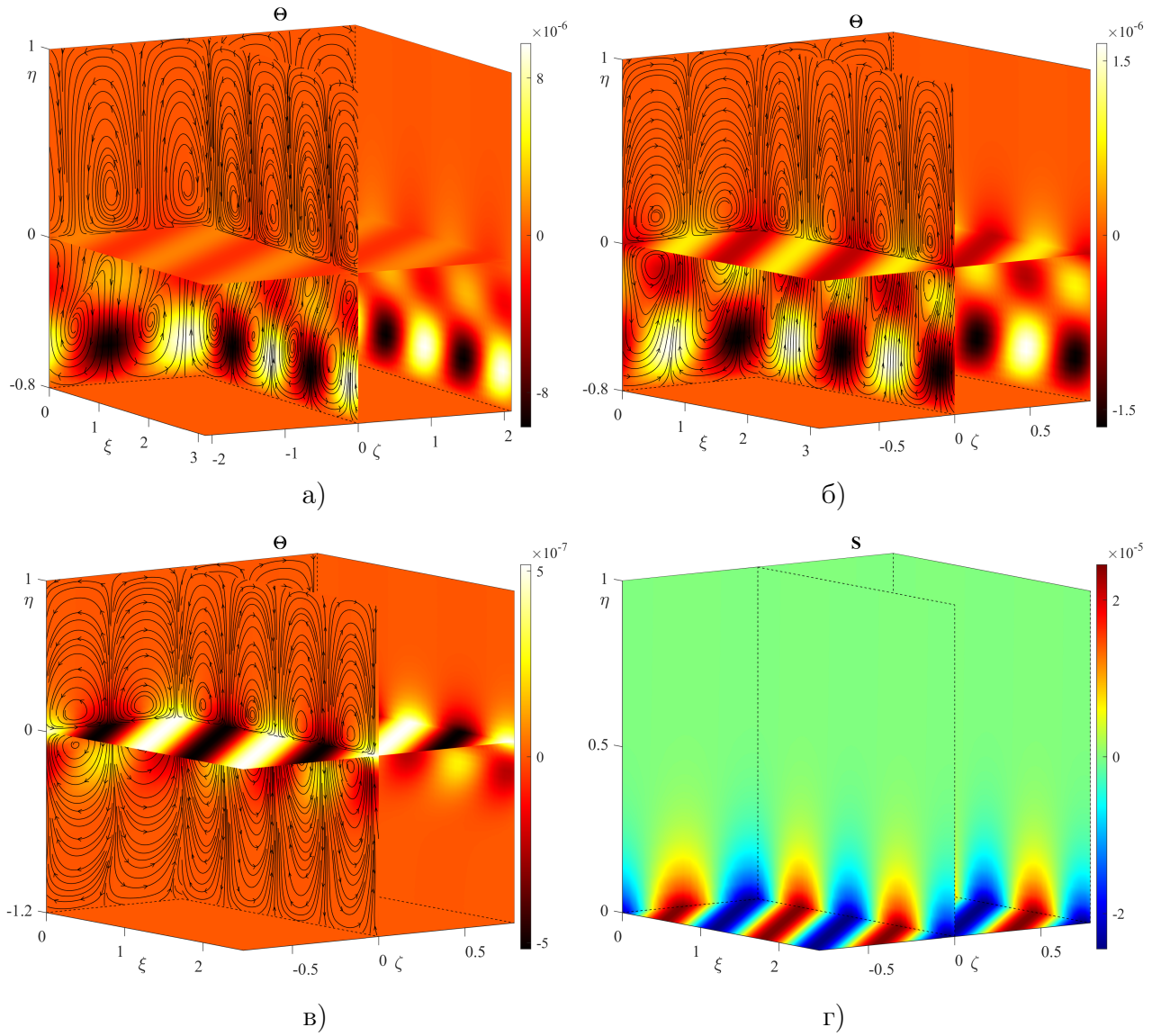


Рис. 1. Типичные формы пространственных возмущений скорости и температуры а) – в) и концентрации пара в газовой фазе (г) при нормальной гравитации: а) – $h_1 = 4$ мм, $\alpha_x = 4$, $\alpha_z = 3$, $A = 3.7$ К/м; б) – $h_1 = 4$ мм, $\alpha_x = 4$, $\alpha_z = 7$, $A = 2.85$ К/м; в), г) – $h_1 = 6$ мм, $\alpha_x = 5$, $\alpha_z = 8$, $A = -0.86$ К/м

Деформация поверхности раздела оказывает стабилизирующее влияние: при малой интенсивности внешней тепловой нагрузки температурный градиент A на Г также мал, в таких условиях основное течение сохраняет устойчивость во всём рассматриваемом диапазоне изменения волновых чисел. В случае деформируемой границы изменение баланса сил, вызванное изменением толщины жидкого слоя, приводит к смене типа наиболее опасных возмущений. При малых h_1 неустойчивость проявляется в форме поперечных валов, отвечающих двумерным (плоским) возмущениям с $\alpha_z = 0$, которые сносятся основным течением. С увеличением h_1 в жидком слое возникают термокапиллярные продольные структуры, отвечающие трёхмерным (спиральным) возмущениям с $\alpha_x = 0$. При пониженной гравитации имеет место обратная смена наиболее опасных мод с увеличением толщины h_1: в системе с тонким жидким слоем сначала реализуются спиральные моды, рост h_1 приводит к тому, что при потере устойчивости развиваются поперечные валы. Разнообразные типы гибридных структур, отвечающих сосуществованию разных механизмов

неустойчивости, являются характерной особенностью режимов испарительной конвекции. Взаимодействие возмущений с основным течением может отражаться на форме возникающих тепловых и гидродинамических структур — они могут деформироваться основным течением, и на направлении их дрейфа — структуры сносятся основным потоком вдоль канала в направлении приповерхностного течения в жидком слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. К. *Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения.* Препринт № 1-10. Красноярск : ИВМ СО РАН, 2010.
2. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. *Stability of exact solutions describing two-layer flows with evaporation at the interface.* Fluid Dyn. Res. 2016. V. 48. No. 6. Art. 061408.
3. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н. *Задачи испарительной конвекции (обзор).* ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 219–260.
4. Lyulin Yu. V., Kabov O. A. *Thermal effect in the evaporation process from the interface of the horizontal liquid layer under a shear gas flow.* Interfacial Phenom. Heat Transf. 2023. V. 1. No. 1. P. 55–64.
5. Годунов С. К. *О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. № 3. С. 171–174.

О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ЦИЛИНДРЕ С ВЕРХНЕЙ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Г. Бондаренко[1], *Е. П. Магденко*[2]

[1]*Сибирский федеральный университет, Красноярск*
[2]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

Рассмотрена задача о возникновении конвекции в двухслойной системе вязких теплопроводных жидкостей с общей поверхностью раздела Г, помещённой в открытый цилиндр. Нижнее основание контейнера является твёрдым, на боковых стенках выполняется условие просачивания жидкости, верхняя граница – свободная поверхность $\Gamma_в$. Предполагается, что Г и $\Gamma_в$ являются деформируемыми, поверхностное натяжение жидкостей линейно зависит от температуры. Вся система находится в поле силы тяжести.

Для описания движения жидкостей используется модель Обербека – Буссинеска. На нижнем основании выполняется условие прилипания и задаётся температура; на поверхности раздела справедливо равенство скоростей и температур сред, условие равенства тепловых потоков; на свободной границе задан теплообмен с окружающей средой. Кроме того, на Г и $\Gamma_в$ выполняются кинематическое и динамическое условия.

Рассмотрен стационарный осесимметрический случай, когда жидкости находятся в состоянии покоя. Исследована устойчивость равновесного состояния при нагреве нижнего основания до некоторой критической температуры, при которой в системе возникает конвективное движение. В рамках линейной теории рассматриваются малые осесимметричные монотонные возмущения полей скорости, давления и температуры типа нормальных волн. Полученная задача решается методом разделения переменных.

Исследована зависимость критического значения температуры нижнего основания цилиндра, при котором возникает конвекция, от геометрических и физических параметров системы. Установлено, что при увеличении интенсивности теплообмена с окружающей средой критическое значение температуры увеличивается по модулю. Аналогичный качественный результат получается при изменении отношения толщин слоёв жидкостей, когда высота верхнего слоя уменьшается по отношению к высоте нижнего.

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2026-735).

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УПРУГИХ КОНСТАНТ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПЛАСТИНЫ НА ОБОБЩЁННЫЕ ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИЕ СИЛЫ В РАМКАХ {1,0}-АППРОКСИМАЦИИ

Н. С. Бондаренко

Донецкий государственный университет

Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную пластину толщины $2h$, отнесённую к безразмерной системе координат x_1, x_2, x_3, определённую с точностью до полутолщины пластины h. Здесь x_1, x_2 – координаты точки в срединной плоскости, x_3 – поперечная координата. Предполагаем, что на пластину действует сосредоточенная сила, приложенная в начале координат и вызывающая состояние изгиба.

В рамках обобщённой теории пластин в варианте {1,0}-аппроксимации искомые и заданные функции раскладываются в ряды Фурье по полиномам Лежандра $P_k = P_k(x_3)$ от толщинной координаты x_3 [1].

Разрешающая система дифференциальных уравнений, описывающая состояние изгиба ортотропных пластин при действии сосредоточенной силы в рамках {1,0}-аппроксимации, включает в себя [1]:

- уравнения равновесия в перемещениях

$$L_{k1}\gamma_1 + L_{k2}\gamma_2 + L_{k3}w_0 = -m_k^*\delta(x_1, x_2) \quad (k = 1,\, 2);$$
$$L_{31}\gamma_1 + L_{32}\gamma_2 + L_{33}w_0 = -q^*\delta(x_1, x_2), \tag{1}$$

где γ_1, γ_2, w_0 – обобщённые перемещения пластины, из которых γ_1, γ_2 являются аналогами углов поворота нормали; w_0 – аналог прогиба; L_{kj} – дифференциальные операторы второго порядка; $\delta(x_1, x_2)$ – двумерная дельта-функция П. Дирака; $m_k^* = \text{const}$, $q^* = \text{const}$;

- соотношения упругости в перемещениях

$$M_1 = D_1\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1} + \nu_{21}\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right); \quad M_2 = D_2\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2} + \nu_{12}\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right);$$
$$H = D_{12}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\right); \quad Q_{k0} = \Lambda_k\left(\gamma_k + \frac{\partial w_0}{\partial x_k}\right) \quad (k = 1,\, 2), \tag{2}$$

где M_1, M_2, H_{12}, Q_{10}, Q_{20} – обобщённые внутренние силовые факторы, из которых M_1, M_2 являются аналогами изгибающих моментов; H_{12} – аналог крутящего момента; Q_{10}, Q_{20} – аналоги перерезывающих сил;

$$D_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad D_2 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad D_{12} = \frac{2G_{12}}{3\sqrt{E_1E_2}};$$
$$\Lambda_k = \frac{5G_{k3}}{3\sqrt{E_1E_2}} \quad (k = 1,\, 2),$$

E_1, E_2 – модули Юнга для направлений x_1, x_2 соответственно; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига, характеризующие изменение углов между главными направлениями x_1 и x_2, x_1 и x_3, x_2 и x_3 соответственно; ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона ($E_2\nu_{12} = E_1\nu_{21}$).

На упругие константы ортотропного материала пластины не наложено дополнительное ограничение в виде «гипотетического» модуля сдвига. То есть в общем случае выполнено

$$G_{12} \neq \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2\left(1+\sqrt{\nu_{12}\nu_{21}}\right)}\,.$$

Методика решения задачи основана на применении двумерного интегрального преобразования Фурье к разрешающей системе дифференциальных уравнений (1). В результате получается система линейных алгебраических уравнений, решением которой являются трансформанты искомых функций (обобщённые перемещения). При обращении трансформант применяется специальная G-функция [2].

Оригиналы обобщённых перемещений имеют вид

$$\gamma_k = \sum_{m=0}^{14} \beta_{km} K_m \quad (k = 1,\, 2); \quad w_0 = \sum_{m=0}^{14} \beta_{3m} K_m, \tag{3}$$

где коэффициенты β_{km} зависят от упругих констант ортотропного материала и коэффициентов при дельта-функциях в правых частях уравнений системы (1); функции K_m представляют собой ряды, содержащие интегралы от специальных G-функций.

Подставляя обобщённые перемещения (3) в два последних соотношения (2), получим выражения для обобщённых перерезывающих сил:

$$Q_{k0} = \Lambda_k \left(\sum_{m=0}^{14} \beta_{km} K_m + \sum_{m=0}^{14} \beta_{3m} K_{m,k} \right) \quad (k = 1,\, 2)\,, \tag{4}$$

где $K_{m,k}$ представляет собой частную производную от функции K_m по переменной x_k; $K_{m,k}$ находится с использованием формулы дифференцирования для специальной G-функции [2].

Анализ результатов. Численные исследования посвящены выявлению влияния упругих констант ортотропного материала пластины на обобщённые перерезывающие силы (4). На рис. 1, 2 представлены графики Q_{10}, Q_{20} соответственно, построенные вдоль оси абсцисс x_1 при $x_2 = 0$. Предполагается действие сосредоточенной силы, для которой коэффициенты в правых частях системы (1) имеют вид

$$m_1^* = m_2^* = q^* = 1.$$

Рассмотрены такие варианты материалов пластины (табл. 1):

- *И* – модельный изотропный материал [3] (пунктирные линии на рис. 1, 2);
- *О* – ортотропный материал (волокнистый стеклопластик ВМ-1) [4] (сплошные линии на рис. 1, 2).

В табл. 1 константы E_k, G_{km} приведены с точностью до 10^{10} Па.

Таблица 1. Механические характеристики материалов

Материал	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{12}
И	4,76	4,76	4,76	2,071	2,071	2,071	0,149
О	4,76	2,07	1,45	0,531	0,501	0,434	0,149

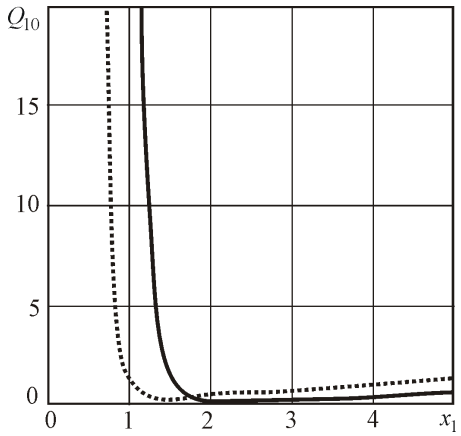


Рис. 1. Обобщённая перерезывающая сила Q_{10}

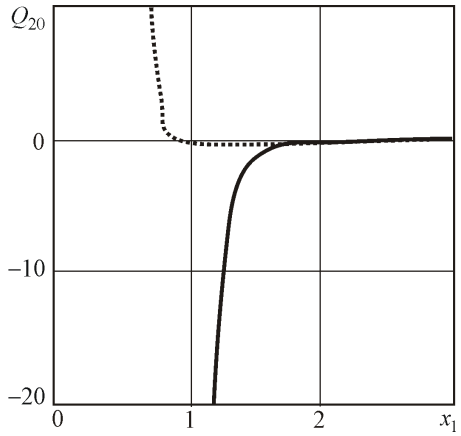


Рис. 2. Обобщённая перерезывающая сила Q_{20}

Заключение. Из построенных графиков видно, что механические характеристики ортотропного материала пластины при отсутствии «гипотетического» модуля сдвига в случае действия сосредоточенной силы, приводящей к изгибу, оказывают существенное влияние на величину обобщённых перерезывающих сил. Особенно значительным это влияние является в окрестности сосредоточенного силового воздействия.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках госзадания (шифр FRRE-2026-0021).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пелех Б. Л., Лазько В. А. *Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений.* Киев : Наукова думка, 1982. 296 с.
2. Хижняк В. К., Шевченко В. П. *Смешанные задачи теории пластин и оболочек.* Донецк : ДонГУ, 1980. 128 с.
3. Нескородев Р. Н. *Решение задачи изгиба ортотропной плиты в уточненной постановке.* ЖТПМ. 2017. № 3–4 (60-61). С. 60–68.
4. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. *Анизотропия конструкционных материалов.* Л. : Машиностроение, 1980. 247 с.

О ПРОЦЕССАХ ГАЗИФИКАЦИИ ТВЁРДОГО ПОРИСТОГО ГОРЮЧЕГО В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ГАЗОГЕНЕРАТОРАХ С СУЖЕНИЕМ И РАСШИРЕНИЕМ

К. Г. Боровик, Н. А. Луценко

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

Низкотемпературные газогенераторы применяются для получения потока газа с необходимыми характеристиками и широко используются в различных приложениях [1–3]. В настоящей работе объектами исследования являются двухкамерные низкотемпературные газогенераторы (НТГГ), которые обеспечивают получение газовой смеси с заданными температурой и калорийностью. Подобные НТГГ состоят из двух камер: в первой из них размещается твёрдое топливо, продукты сгорания которого образуют горячую газовую смесь. Горячий газ из первой камеры проходит через слой твёрдого пористого горючего во второй камере, инициируя процесс газификации. Поскольку разложение твёрдого вещества требует затрат энергии, температура газа на выходе из устройства оказывается значительно ниже, при этом поток на выходе содержит газообразные продукты газификации пористого горючего. Камеру, в которой располагается твёрдое пористое горючее и происходит газификация, в дальнейшем будем называть газификатор. Он имеет вид цилиндра с непроницаемыми нетеплопроводными боковыми стенками и входом и выходом, расположенными друг напротив друга.

В основу математического описания рассматриваемого процесса положена модель двух взаимодействующих взаимопроникающих континуумов [4]. В качестве основных уравнений используются уравнения энергии для твёрдой и газообразной фаз, уравнение движения в виде закона сохранения импульса, а также уравнения неразрывности и состояния совершенного газа. Более подробное описание модели дано в работе [5]. Газ, который поступает в газификатор, полагается инертным и имеет заданные значения температуры и скорости фильтрации на входе.

Для численной реализации данной модели используется программный пакет OpenFOAM, в котором был разработан решатель на основе метода конечных объёмов и алгоритма SIMPLE [6]. Этот решатель позволяет проводить исследование динамики процессов в газификаторах с переменных поперечным сечением, в том числе с плавным сужением в средней части и последующим плавным расширением, а также в газификаторах со ступенчатыми расширениями.

Основной задачей является исследование влияния геометрии газификатора на равномерность потока горючих продуктов газификации, покидающих газогенератор, и на другие характеристики процесса. В ходе численных экспериментов показано, что применение газификаторов с плавным сужением/расширением не улучшает ключевые характеристики работы газогенератора [7]. Для такой конфигурации газификатора было выявлено три режима газификации горючего в зависимости от степени сужения: 1) полная газификация с плавным течением газа, практически полностью совпадающая с газификацией в газификаторах с постоянным сечением; 2) полная, но замедленная газификация, сопровождающаяся образованием застойных зон и вихрей, которые влияют на процесс газификации и замедляют его; 3) неполная газификация с возникновением застойных зон и вихрей, при которой разложение твёрдого пористого горючего очень сильно замедляется и процесс

становится близок к стационарному. Показано, что при скруглении углов сужения и расширения можно добиться полной газификации даже в тех случаях, где ранее застойная зона мешала процессу газификации.

Аналогичные режимы газификации были также обнаружены и в газификаторах со ступенчатым расширением. При небольших степенях расширения не наблюдается значительных отличий от газификации в газификаторах с постоянным сечением, и основные характеристики процесса, такие как температура газа и отношение массовых расходов продуктов газификации и инерта, остаются неизменными. Однако при таких конфигурациях в зоне расширения всегда присутствует вихревая область в случае, когда угол расширения не имеет скругления. Также показано, что из режима неполной газификации процесс с течением времени может перейти в режим замедленной газификации, который завершается полным разложением твёрдого горючего.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 26-19-00231, https://rscf.ru/project/26-19-00231/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karpov A. I., Leschev A. Y., Lipanov A. M., Leschev G. A. *Production of the fire extinguishing mixture by solid propellant propulsion.* J. Loss Prev. Process Ind. 2013. V. 26. No. 2. P. 338–343.
2. Seo Y. -D., Chung S. H., Yoh J. J. *Automotive airbag inflator analysis using the measured properties of modern propellants.* Fuel. 2011. V. 90. No. 4. P. 1395–1401.
3. Salgansky E. A., Lutsenko N. A. *Effect of Solid Fuel Characteristics on Operating Conditions of Low-Temperature Gas Generator for High-Speed Flying Vehicle.* Aerosp. Sci. Technol. 2021. V. 109. Art. 106420.
4. Нигматулин Р. И. *Основы механики гетерогенных сред.* М. : Наука, 1978. 336 с.
5. Lutsenko N. A., Borovik K. G. *Gasification of Solid Fuels in Low-Temperature Gas Generator: A New Computational Model and A Study of The Effect of Gasifier Length.* Int. J. Heat. Mass Transf. 2024. V. 231. Art. 125876.
6. Патанкар С. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.* М. : Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
7. Lutsenko N. A., Borovik K. G. *Effect of Geometry Modifications on Operating Performance of Low-Temperature Gas Generators for Advanced High-Speed Flight Vehicles.* Int. Commun. Heat. Mass Transf. 2026. V. 172. Art. 110463.

ОХЛАЖДЕНИЕ ПЛЁНКИ БИНАРНОЙ ЖИДКОСТИ

К. А. Бородина, А. В. Татосов

Тюменский государственный университет

Всестороннее изучение плёночных течений приобретает всё большую значимость [1]. В настоящей работе исследуется поведение плёнки жидкости, содержащей летучий компонент при неоднородном охлаждении. В рассматриваемой нестационарной задаче деформации плёнки выделены масштабы времени, связанные с развитием полей скорости, температуры и концентрации, с изменением высоты слоя, а также диффузией летучего компонента. В зависимости от первоначальной толщины, деформация плёнки может как опережать развитие поля концентрации, так и отставать от него [2].

Тонкий слой однородного раствора расположен на плоской горизонтальной поверхности $z = 0$. Газ над плёнкой содержит пары летучего компонента. В некоторый момент времени подложка охлаждается, что приводит к деформации плёнки (рис. 1).

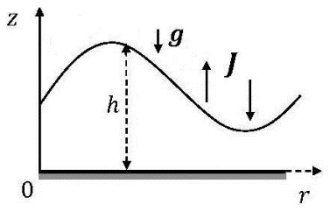


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Система уравнений движения и граничные условия имеют вид [3]

$$\partial \boldsymbol{v}/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\nabla p/\rho + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0;$$

$$\partial C/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla C = D\nabla^2 C, \quad \partial T/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla T = \chi\nabla^2 T,$$

$$z = 0: \qquad \boldsymbol{v} = 0, \quad T = T_s, \quad \partial C/\partial z = 0;$$

$$z = h: \qquad -(p - p_a) + 2\mu\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} + 2k_R\gamma = 0,$$

$$2\mu\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau} = \nabla\gamma\cdot\boldsymbol{\tau},$$

$$-k\boldsymbol{n}\cdot\nabla T = JL_v,$$

$$\rho D\boldsymbol{n}\cdot\nabla C = -J\,(1 - C)\,.$$

Здесь $\boldsymbol{v}$, p, ρ, T – скорость, давление, плотность и температура жидкости соответственно; C – массовая концентрация летучего компонента в растворе; D, k и χ – коэффициенты диффузии, теплопроводности и температуропроводности; μ, $\nu = \mu/\rho$ – динамическая и кинематическая вязкости; γ – коэффициент поверхностного натяжения, L_v – скрытая теплота парообразования, p_a – внешнее атмосферное давление, k_R – кривизна свободной поверхности, $\boldsymbol{D}$ – тензор скоростей деформаций; $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ – нормальный и тангенциальный единичные векторы к свободной поверхности; $\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения, J – интенсивность массообмена. Кинематическое условие на свободной поверхности имеет вид

$$\partial h/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\,(-z + h) = -J/\rho.$$

Начальные условия соответствуют однородной жидкости в состоянии покоя $t = 0$:

$$h = h_0,$$

$$0 < z < h: \quad \boldsymbol{v} = 0, \quad T = T_0, \quad C = C_0.$$

Температура подложки задана в виде стационарной функции $T_s = T_s(x, y)$.

Интенсивность массообмена зависит от параметров свободной поверхности жидкой плёнки, а также от давления паров над ней. Вследствие неоднородного нагрева, подвижности границы, а также испарения в газовом слое, помимо диффузионного происходит и конвективный перенос летучего компонента. Считая скорости и градиенты плотности паров малыми, учитываем только процесс диффузии

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = D_v \nabla^2 \rho_v,$$

где ρ_v – плотность паров летучего компонента, D_v – коэффициент диффузии в газе. Начальные и краевые условия имеют вид

$$t = 0, \quad z > 0: \ \rho_v = \rho_{v0}; \quad z = 0: \ D_v \partial \rho_v / \partial z = -J.$$

На рис. 2 представлены результаты расчётов с параметрами для водного раствора изопропанола (IPA).

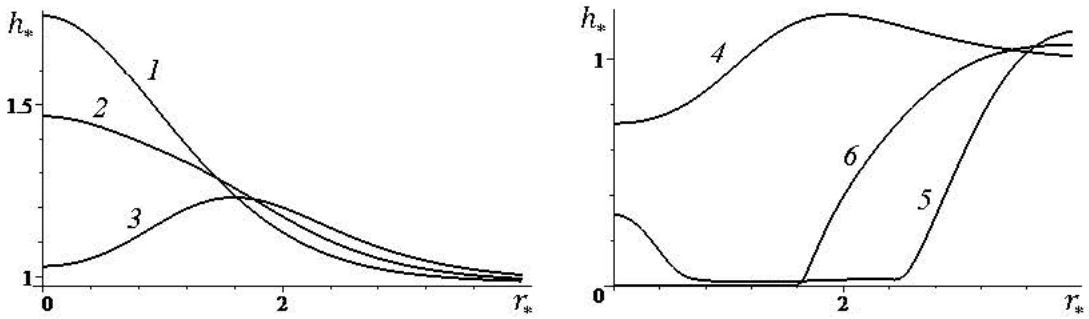


Рис. 2. Профили жидкого слоя $h_* = h/d$ от радиальной координаты $r_* = r/a$ в последовательные моменты времени $t = 187,\ 375,\ 562$ (сек) – кривые 1, 2, 3; $t = 625,\ 875,\ 1125$ (сек) – кривые 4, 5, 6

Начальные температура, массовая концентрация IPA и толщина плёнки: $T_0 = 293$ K, $C_0 = 0.35$, $d = 2 \cdot 10^{-1}$ мм. Охлаждение жидкости при контакте с твёрдым дном локализовано, $T_s = T_0 - \theta e^{-r^2/a^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; характерный размер зоны $a = 5$ мм, характерное понижение температуры $\theta = 5$ K. Жидкая плёнка вначале проявляет характерный термический эффект, который проявляется изгибом свободной поверхности вверх. Изменение концентрации на этом временном интервале невелико. Плёнка остается выпуклой достаточно долго. В это время происходит конденсация паров летучего компонента, его доля в растворе возрастает с течением времени. Концентрационный эффект становится преобладающим, и начинается уменьшение толщины плёнки в центре (рис. 2). Охлаждение плёнки раствора, содержащей летучий компонент, приводит к последовательному термо- и концентрационно-капиллярному разнонаправленным течениям. При растекании жидкости в центре наблюдается кратковременное возвышение уровня. В дальнейшем плёнка

растягивается, образуя ровный жидкий слой, толщина которого на несколько порядков меньше первоначальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н. *Задачи испарительной конвекции* (*обзор*). Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. № 2. С. 219–260.
2. Бородина К. А. *Динамика термокапиллярного течения бинарной гомогенной плёнки раствора с учетом диффузии паров летучих компонентов.* Вестник Башкирского университета. 2020. Т. 25. № 3. С. 472–477.
3. Simanovskii I. B., Nepomnyashchy A. A. *Convective Instabilities in Systems with Interface.* Gordon and Breach. London, 1993. P. 21–44.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСРЕДНЁННОЙ ДИНАМИКИ КОНВЕКЦИИ МАРАНГОНИ В ТОНКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ВИБРАЦИЯХ

И. В. Володин[1], *А. А. Алабужев*[1,2]

[1]*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*
[2]*Пермский государственный национальный исследовательский университет*

Рассматривается динамика тонкой, бесконечной в продольном направлении, вязкой, несжимаемой жидкой плёнки на плоской горизонтальной твёрдой подложке (см. рис. 1). Верхняя поверхность плёнки свободна и деформируема, над ней находится невесомый газ. Поперек слоя задан постоянный вертикальный отрицательный температурный градиент. Нижняя подложка совершает вертикальные гармонические колебания.

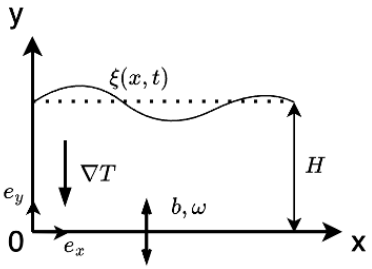


Рис. 1. Геометрия задачи

Рассматривается однослойная модель с пассивной газовой фазой. Предполагается, что вибрационное воздействие высокочастотное, т. е. период вибраций много меньше характерного вязкого времени, но сравним с характерным временем эволюции плёнки. Задача решается в длинноволновом приближении, используется метод разделения полей на пульсационную и осреднённую части [1–3]. В результате введения иерархии времён появляются две системы уравнений. Динамика пульсационной системы определяется вибрационным слагаемым. Осреднённая динамическая система состоит из двух уравнений жёсткого типа, описывающих координату $\bar{\xi}$ и температуру $\bar{T}$ поверхности раздела.

Безразмерная постановка задачи включает капиллярное число C, число Галилея G, число Прандтля Pr, число Марангони Ma, число Био Bi, а также безразмерные амплитуду B^* и частоту Ω внешних вибраций:

$$\mathrm{C} = \frac{\alpha H}{\rho\nu^2}, \qquad G = \frac{gH^3}{\nu^2}, \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi},$$

$$\mathrm{Ma} = -\frac{d\alpha}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{H^2}{\rho\nu^2}, \qquad \mathrm{Bi} = \frac{qH}{\kappa}, \qquad B^* = \frac{b}{H}, \qquad \Omega = \frac{H^2}{\nu}\,\omega,$$

где H — толщина плёнки в невозмущённом состоянии, ρ и ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости, χ — коэффициент температуропроводности, $\alpha(T)$ — коэффициент поверхностного натяжения, $\partial T/\partial y$ — характерный поперечный градиент температуры, g — ускорение свободного падения, q — коэффициент теплообмена со средой на свободной

поверхности, κ — теплопроводность твёрдой подложки, b и ω — амплитуда и частота колебаний подложки. В рассматриваемой задаче используется аппроксимация, в которой $\mathrm{C} = \epsilon^{-2}\mathrm{Ca}$, $\mathrm{Bi} = \epsilon^2\beta$, $B = \epsilon^{-1}B^*$, где ϵ – малый параметр.

Осреднённая система имеет вид

$$\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{t}} = \frac{\partial}{\partial X}\left\{\frac{\bar{\xi}^3}{3}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial X} + \frac{\mathrm{Ma}}{2}\bar{\xi}^2\frac{\partial f}{\partial X} - \frac{(B\Omega)^2}{2}\left[(Q_1\bar{\xi}^2\Big(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial X}\Big)^3 + Q_2\bar{\xi}^3\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial X}\frac{\partial^2\bar{\xi}}{\partial X^2}\right]\right\}, \tag{1}$$

$$\bar{\xi}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{t}} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial X}\left(\bar{\xi}\frac{\partial\bar{T}}{\partial X}\right) - \frac{1}{2\,\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial X}\right)^2 - \frac{\beta}{\mathrm{Pr}}f + \\ + \left(\frac{\bar{\xi}^3}{3}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial X} + \frac{\mathrm{Ma}}{2}\bar{\xi}^2\frac{\partial f}{\partial X}\right)\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\bar{\xi}^4}{8}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial X} + \frac{\mathrm{Ma}}{6}\bar{\xi}^3\frac{\partial f}{\partial X}\right), \tag{2}$$

где $f = \bar{T} - \bar{\xi}$, $\bar{\Pi} = G\bar{\xi} - \mathrm{Ca}\,\partial_X^2\bar{\xi} + 2{-}1(B\Omega)^2\mathrm{Re}\{\tilde{H}\}$, а $Q_1, Q_2, \tilde{H}$ — зависящие от частоты коэффициенты, полученные из решения задачи для пульсационного течения [3], $\mathrm{Re}\{\cdot\}$ – операция взятия действительной части.

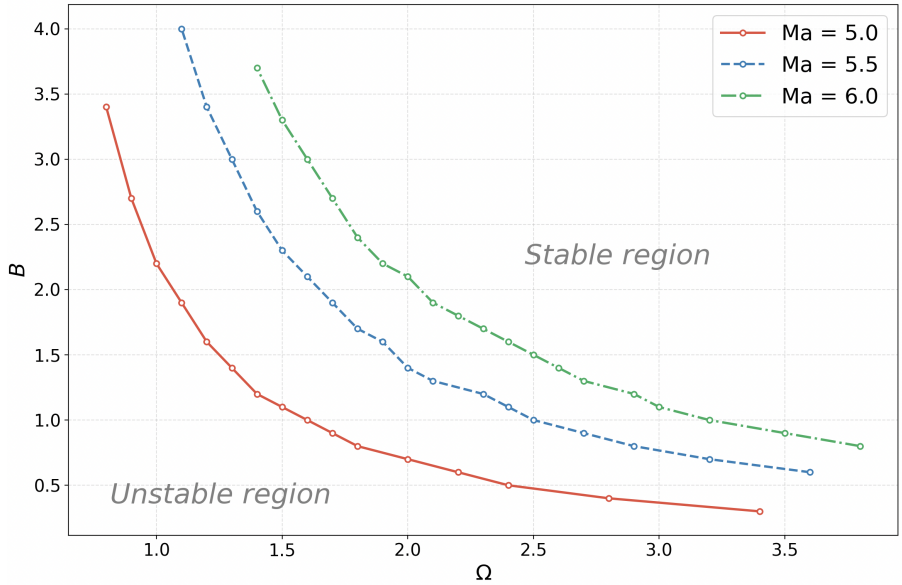


Рис. 2. Нейтральные кривые устойчивости течения при разном значении числа Марангони. Параметры задачи: $\mathrm{Ca} = 2.5$, $G = 3.0$, $\mathrm{Pr} = 7.0$, $\beta = 1$

Система (1), (2) была проинтегрирована численно с использованием пакета `py-pde` схемой Radau IIA [4,5] на одномерной периодической сетке из 100 точек. Были построены нейтральные кривые устойчивости на плоскости (B, Ω) при нескольких значениях числа Марангони и числа Галилея, включая условия пониженной гравитации и невесомости. Карты устойчивости приведены на рис. 2, 3. Увеличение Ma сужает область устойчивости, тогда как увеличение G расширяет её. Примечательно, что вибрационное воздействие способно стабилизировать плёнку даже при $G = 0$, т. е. в полном отсутствии силы тяжести.

Дополнительно был проведён слабонелинейный анализ вблизи линейного порога развития неустойчивости. Полученная система второго порядка по малому параметру решалась численно. Было уточнено предсказание линейной теории вблизи порога: при $B = 0.1$

и $B = 1.0$ решение остается устойчивым во всем диапазоне критических волновых чисел, тогда как при $B = 2.0$ оно становится неустойчивым. Таким образом, слабые вибрации повышают порог неустойчивости, тогда как достаточно сильные вибрации его понижают.

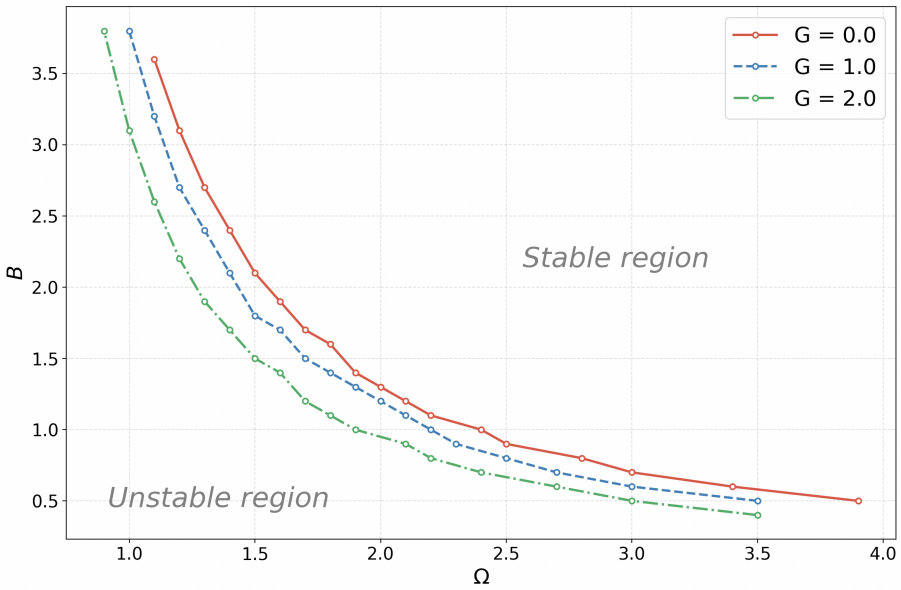


Рис. 3. Нейтральные кривые устойчивости течения при разном значении числа Галилея. Параметры задачи: Ca = 2.5, Ma = 5.0, Pr = 7.0, $\beta = 1$

Полученные результаты развивают предыдущее исследование линейной устойчивости [3], в котором уравнения (1), (2) были впервые получены, и согласуются с более ранними работами по вибрационной стабилизации тонких жидких плёнок [2].

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (номер темы 124021600038-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. *Маятник с вибрирующим подвесом.* Успехи физических наук. 1951. Т. 44. № 1. С. 7–20.
2. Shklyaev S., Khenner M., Alabuzhev A. A. *Enhanced stability of a dewetting thin liquid film in a single-frequency vibration field.* Phys. Rev. E. 2008. V. 77. Art. 036320.
3. Volodin I., Alabuzhev A. *Linear stability of Marangoni convection in a thin film under vertical vibrations.* Microgravity Sci. Technol. 2025. V. 37. Art. 48.
4. Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems.* Springer Series in Computational Mathematics. Berlin : Springer, 1996. 614 p.
5. Zwicker D. *py-pde: A Python package for solving partial differential equations.* J. of Open Source Software. 2020. V. 5. No. 48. Art. 2158.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОД ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ВНУТРЕННИХ СЕЙШ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОЗЕРЕ

О. С. Володько, Е. Н. Лемешкова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Объектом исследования в настоящей работе является стратифицированное озеро Шира (Республика Хакасия), которое представляет собой уникальный водоём с ионным составом, близким к морской воде. При относительно небольших размерах (длина 9.4 км, ширина 5 км, средняя и максимальная глубины – 11.2 м и 25 м соответственно) гидродинамические процессы, происходящие в нём, могут быть экстраполированы на более масштабные морские объекты, что обуславливает высокий научный интерес к изучению циркуляции вод в озере Шира. Внутренние волны играют ключевую роль в формировании гидродинамических режимов в стратифицированных водоёмах [1]. Для их описания применяются как аналитические модели, так и численные расчёты. В предыдущих работах авторов для озера Шира была определена горизонтальная структура внутренних волн при различных сценариях ветрового воздействия [2], а также проведён анализ вертикальной структуры сейш на основе линейной модели с различной аппроксимацией стратификации [3]. В настоящей работе для определения вертикальной структуры внутренних сейш были найдены как аналитические, так и эмпирические моды, выделенные методом главных компонент (МГК).

Для теоретического анализа использовалась линеаризованная система уравнений движения стратифицированной жидкости в длинноволновом приближении на ровном дне в гидростатическом предположении и приближении Буссинеска. С помощью метода разделения переменных исходная система была сведена к задаче Штурма – Лиувилля для вертикальной скорости. Также были получены соотношения для горизонтальных скоростей. Стратификация озера аппроксимировалась пятислойной моделью с кусочно-постоянным распределением частоты Брента – Вяйселя [3]. Решение строилось в виде комбинации тригонометрических функций на каждом слое с их последующим сшиванием на границах слоёв.

Для выделения основных мод изменчивости с помощью метода главных компонент были использованы значения скорости, полученные двумя способами: по натурным измерениям акустическими допплеровскими профилографами течений (ADCP) в летний период 2015 года и по результатам численного моделирования на основе модели ROMS [4].

Аналитическое решение даёт классическую структуру бароклинных мод: для вертикальной скорости первая мода не имеет узлов во внутренней толще воды, вторая характеризуется одним узлом, третья — двумя узлами. Полученные с помощью МГК первые три моды вертикальной и горизонтальных компонент скорости хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями. При этом гидродинамическая модель ROMS адекватно воспроизводит ключевые особенности модальной структуры, наблюдаемые при анализе натурных измерений. Высокая согласованность эмпирических мод, полученных как по данным натурных измерений, так и по результатам численного моделирования на основе ROMS, с аналитическими решениями свидетельствует о достоверности полученных результатов.

Это подтверждает физическую обоснованность выделенных с помощью МГК профилей и применимость длинноволнового приближения для описания внутренних сейш в озере Шира. Предложенный комплексный подход, сочетающий аналитические методы, численное моделирование и статистический анализ натурных данных, может быть применён для исследования волновой динамики в других стратифицированных водоёмах.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2026-735).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hutter K., Wang Y., Chubarenko I. P. *Physics of Lakes. V. 2: Lakes as Oscillators*. Springer Science & Business Media. 2011.
2. Volodko O. S., Lemeshkova E. N. *Vertical structure of internal seiches in a stratified lake*. J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2025. No. 18(5). P. 687–693.
3. Volodko O. S., Lemeshkova E. N., Malcev E. D. *The dynamic of internal waves in lake Shira*. Int. Phenomena and Heat Transfer. 2025. No. 13(3). P. 61–77.
4. ROMS [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: https://www.myroms.org.

ВЯЗКИЕ ТЕЧЕНИЯ С ЗАМКНУТЫМИ ЛИНИЯМИ ТОКА

А. М. Гайфуллин

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского, Жуковский

Рассмотрено нестационарное течение в области с замкнутыми линиями тока при больших числах Рейнольдса. Для случая медленноменяющегося по времени течения завихренность является в главном приближении функцией от функции тока и времени. Из уравнений Навье – Стокса для завихренности получено интегродифференциальное уравнение. Анализ этого уравнения показал, что существуют три класса автомодельных по времени течений. Первый класс соответствует стационарным течениям. Для таких течений справедлива теорема Бэтчелора о постоянстве завихренности внутри рециркуляционного течения [1]. Второй класс соответствует автомодельным течениям, линейный размер которых растёт пропорционально корню из времени, а циркуляция вихревого течения меняется по степенному закону с изменением времени. Третий класс – экспоненциальные автомодельные течения: их линейный размер остаётся постоянным с изменением времени, а циркуляция экспоненциально возрастает. Исследуются конкретные примеры нестационарных задач, решение которых при больших временах выходит на автомодельный режим: диффузия двух противоположно закрученных вихрей [2], течение около пластины с движущейся против потока поверхностью [3, 4]. В задаче о диффузии двух вихрей, начиная с некоторого момента времени, размер рециркуляционного течения растёт как корень из времени. Циркуляция каждого вихря уменьшается обратно пропорционально корню из времени. Приводится объяснение физического механизма потери циркуляции вихрей. В задаче об обтекании пластины с движущейся против потока поверхностью топология течения зависит от относительной скорости движения поверхности. При малых относительных скоростях наблюдается стационарное течение Садовского с постоянной завихренностью внутри рециркуляционной области [5]. Начиная с некоторых относительных скоростей движения поверхности пластины, размер области рециркуляционного течения и циркуляция по границе завихренной области растут как корень из времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. *On steady laminar flow with closed streamlines ft large Reynolds number.* J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt. 2. P. 177–190.
2. Гайфуллин А. М., Зубцов А. В. *Диффузия двух вихрей.* Известия РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 126–142.
3. Гайфуллин А. М. *Обтекание пластины с движущейся против потока поверхностью.* Известия РАН. МЖГ. 2006. № 3. С. 60–66.
4. Гайфуллин А. М., Зубцов А. В. *Асимптотическая структура нестационарного течения около полубесконечной пластины с подвижной поверхностью.* Известия РАН. МЖГ. 2013. № 1. С. 88–101.
5. Садовский В. С. *Плоские вихрепотенциальные течения невязкой жидкости и их приложения.* Труды ЦАГИ. 1989. Вып. 2447. 108 с.

КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

П. В. Гилёв, А. А. Папин

Алтайский государственный университет, Барнаул

Математическая модель двухфазной фильтрации в пороупругой среде описывается следующей системой уравнений [1, 2]:

$$\frac{\partial s_i \phi \rho_i^0}{\partial t} + \nabla \cdot (s_i \phi \vec{u}_i \rho_i^0) = 0, \tag{1}$$

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \vec{g} \rho_i), \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$p_2 - p_1 = p_c(x, s), \quad s = \frac{s_1 - {s_1}^0}{1 - {s_1}^0 - {s_2}^0}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial (1-\phi) \rho_3^0}{\partial t} + \nabla \cdot [(1-\phi) \vec{u}_3 \rho_3^0] = 0, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} - \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e \right), \tag{5}$$

$$\nabla p_{tot} - \operatorname{div} \left[\eta (1-\phi) \left(\frac{\partial \vec{u_3}}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \vec{u_3}^*}{\partial \vec{x}} \right) \right] = \rho_{tot} \vec{g}. \tag{6}$$

Здесь s_i, p_i, ρ_i^0, $\vec{u}_i$ – насыщенности, давления, истинные плотности и скорости i-х фаз соответственно ($i = 1, 2$); $K_0(\phi)$ – тензор проницаемости; k_{0i} – относительная фазовая проницаемость; μ_i – коэффициенты динамической вязкости; $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; ϕ – пористость; p_c – капиллярный скачок; $\vec{u}_3$ – скорость пористого скелета; $a_1(\phi)$, $a_2(\phi)$ – коэффициенты объёмной вязкости и объёмной сжимаемости соответственно; $p_e = p_{tot} - (s_1 p_1 + s_2 p_2)$, $p_{tot} = (1-\phi) p_s + \phi (s_1 p_1 + s_2 p_2)$ – эффективное и полное давление; $\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_3^0 + \phi(s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0)$ – общая плотность; η – коэффициент динамической вязкости. Данная модель является обобщением известной модели Маскета – Леверетта [3]. В работе исследуются вопросы разрешимости начально-краевых задач для данных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2024–2026) (госзадание FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилев П. В., Папин А. А. *Фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в тонком пороупругом слое.* Сибирский журнал индустриальной математики. 2024. Т. 27. № 2. С. 20–33.
2. Гилев П. В. *Единственность решения задачи двухфазной фильтрации в пороупругом тонком слое.* Математические заметки. 2025. Т. 118. № 4. С. 630–634.
3. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* 1983. 320 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН ЛЯВА В АНИЗОТРОПНОМ ПЬЕЗОАКТИВНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ВОЛНОВОДЕ С ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ДВОЙНОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

А. А. Глухов, В. Р. Дяченко

Донецкий государственный университет

Исследования электроупругих волн Лява имеют фундаментальное значение для развития теории волновых процессов и находят практическое применение в различных научных и технических областях [1]. В частности, результаты этих исследований востребованы в сейсмологии и геофизике, твердотельной акустоэлектронике, диагностике композитных конструкционных материалов методами неразрушающего контроля, а также при разработке датчиков различной направленности и компонентов микроэлектроники. В свою очередь, создание новых модификаций неоднородных пьезокерамических сред для специальных практических приложений, в том числе функционально-градиентных пьезокерамических волноводов данного типа на основе использования аддитивных технологий, ставит новые задачи перед исследователями. В доминирующем числе случаев в исследованиях по динамическому деформированию функционально-градиентных материалов и конструкций из этих материалов применяются модели одноосной градиентности с зависимостью физико-механических характеристик материалов от одной пространственной координаты в рассматриваемой среде [2, 3]. Одним из популярных способов описания одноосной градиентности на данный момент является использование однофакторной либо многофакторной экспоненциальной зависимости [4–6]. В работах [7, 8] предложена новая эффективная модель двойной экспоненциальной приповерхностной неоднородности для трансверсально-изотропных и пьезоактивных функционально-градиентных материалов.

В настоящей работе представлены вывод и методика (анализ) математической модели процесса распространения обобщённых электроупругих волн Лява в волноводе, образованном тонким функционально-градиентным пьезокерамическим слоем и неоднородной пьезоактивной подложкой из материала класса 6 мм. Свойство поперечной неоднородности физико-механических параметров пьезоактивного материала слоя описывается однофакторным экспоненциальным законом одноосной градиентности:

$$c_{ij}^{(c)} = c_{ij0}^{(c)} \cdot \exp(\mu x_1), \quad e_{ij}^{(c)} = e_{ij0}^{(c)} \cdot \exp(\mu x_1),$$

$$\varepsilon_{ij}^{(c)} = \varepsilon_{ij0}^{(c)} \cdot \exp(\mu x_1), \quad \rho^{(c)} = \rho_0^{(c)} \cdot \exp(\mu x_1),$$

тогда как свойство приграничной локализованной неоднородности поперечно-поляризованного пьезоактивного материала подложки вдоль координаты по её толщине описывается двойным экспоненциальным законом:

$$c_{ij}^{(n)} = c_{ij0}^{(n)} \cdot f(\lambda, \beta, x_1), \quad e_{ij}^{(n)} = e_{ij0}^{(n)} \cdot f(\lambda, \beta, x_1),$$

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij0}^{(n)} \cdot f(\lambda, \beta, x_1), \quad \rho^{(n)} = \rho_0^{(n)} \cdot f(\lambda, \beta, x_1),$$

$$f(\lambda, \beta, x_1) = \exp(\lambda \exp(\beta x_1)).$$

Такой способ описания отражает наличие локализованной вблизи границы раздела сред зоны существенных изменений в значениях физико-механических параметров пьезоактивного материала с асимптотическим сглаживанием темпа этих изменений в глубине подстилающего полупространства и стремлением величин указанных параметров к постоянным значениям.

В рамках разработанной методики было выполнено интегрирование методом Эйлера системы дифференциальных уравнений для амплитудных компонент комплексных функций динамических упругих перемещений и потенциала квазистатического электрического поля в сдвиговых горизонтально-поляризованных волнах. Далее реализован численно-аналитический итерационный алгоритм для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных волновых уравнений с переменными коэффициентами и получения её базисных частных решений в форме векторных экспоненциальных рядов. Заключительный этап подразумевает получение аналитического представления дисперсионной функции для обобщённых электроупругих волн Лява из краевых условий на свободной от механических усилий контактирующей с разреженным газом или вакуумом поверхности слоя и условий идеального электромеханического контакта слоя с подложкой.

Результатами исследований являются расчётные соотношения для кинематических, силовых и энергетических характеристик обобщённых электроупругих волн Лява. Представлен ряд результатов вычислительных экспериментов, в рамках которых описаны изменения в дисперсионных, кинематических и энергетических свойствах обобщённых электроупругих волн Лява, обусловленные факторами неоднородности компонентов рассматриваемой волноводной структуры.

Работа выполнена в рамках госзадания «Алгоритмизированные численно-аналитические методы исследования моделей комплексного деформирования инновационных материалов и конструкций с усложнёнными свойствами» (№ FRRE-2026-0021).

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И. А. *Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике.* М : Наука, 1966. 168 с.
2. Жаворонок С. И. *Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 1.* Механика композиционных материалов и конструкций. 2021. Т. 27. № 2. С. 227–260.
3. Жаворонок С. И. *Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 2.* Механика композиционных материалов и конструкций. 2022. Т. 28. № 1. С. 36–86.
4. Bhavar V., Kattire P., Singh R. K. P. *A review of functionally gradient materials (FGM's) and their applications.* IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. V. 229. Art. 012021.
5. Boggarapu V., Gujjala R., Ojha S. [et al.] *State of the art in functionally graded materials.* Composite Structures. 2021. V. 262. Art. 113596.
6. Birman V., Byrd L. W. *Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures.* Appl. Mech. Rev. 2007. V. 60. No. 5. P. 195–216.
7. Болнокин В. Е., Глухов А. А., Сторожев В. И. *Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-*

градиентном геомассиве. Журнал теоретической и прикладной механики. 2022. № 3(80). С. 14–19.

8. Карасев Д. С., Сторожев С. В., Шалдырван В. А. *Интегрирование уравнений распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентной пьезокерамике с двойной экспоненциальной неоднородностью*. Журнал теоретической и прикладной механики. 2023. № 2(83). С. 48–55.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ СЕЙСМИЧЕСКИХ БАРЬЕРОВ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В. И. Голубев[1,2,3], *И. С. Никитин*[1,2], *А. В. Шевченко*[1,2], *Д. К. Маньков*[3]

[1]*Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный*
[2]*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва*
[3]*Московский государственный строительный университет (НИУ)*

Сейсмические волны, возникающие при землетрясениях и достигающие дневной поверхности, представляют опасность для зданий, расположенных в сейсмически активных регионах. Возникающие при этом интенсивные нагрузки на опоры и несущие элементы конструкций могут вызывать повреждения, которые в тяжелых случаях могут привести к полному нарушению целостности строения [1].

В настоящее время одной из перспективных технологий снижения этого типа нагрузок является использование специальных искусственно созданных сейсмических барьеров [2]. Они могут представлять собой простые полые траншеи с прочными стенками (для предотвращения обрушения) или быть заполненными другими материалами: гравием, расширяющимся заполнителем, смесью грунта и бентонита [3]. Одним из перспективных типов наполнителей являются рыхлые гранулированные материалы [4] или гидравлические асфальтобетоны [5], которые обеспечивают различное механическое поведение при сжимающих и растягивающих нагрузках.

Действуя как своего рода частотный фильтр, сейсмические барьеры могут эффективно отражать падающие поверхностные волны [6]. Однако это свойство во многом зависит от физических и геометрических параметров барьера и сейсмического воздействия. Таким образом, проектирование сейсмических барьеров на основе знания региональной сейсмичности является возможным решением. С развитием современных вычислительных систем становятся возможными численные эксперименты. Использование более подробных механических и математических моделей позволяет достаточно точно описывать реальные динамические деформационные процессы.

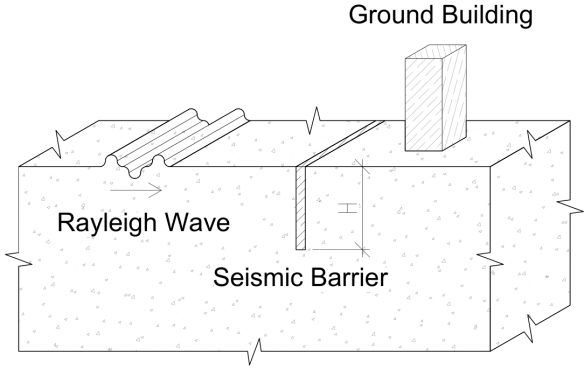


Рис. 1. Постановка задачи о воздействии поверхностной волны Рэлея на наземное сооружение, защищённое сейсмическим барьером

В настоящей работе был выполнен численный расчёт процесса взаимодействия поверхностной волны Рэлея с сейсмическим барьером. Геометрия расчётной области представлена на рис. 1. Для описания динамического поведения приповерхностной части геологического массива использовалась модель линейно упругой среды, имеющая следующие механические параметры: плотность среды и скорости продольной и поперечной волн. Внутрь этой среды погружён сейсмический барьер, описываемый в рамках модели бимодульной упруговязкопластической среды со следующими параметрами: плотностью среды, скоростями продольной и поперечной волн, пределом текучести, временем релаксации напряжений, модулями растяжения и сжатия. Эта модель способна описать динамический бимодульный эффект гидравлического асфальтобетона [5] и расширяющихся заполнителей [4] и, при необходимости, имеет перспективы обобщения на случай больших деформаций.

Введём следующие обозначения: ρ – плотность среды, $\boldsymbol{v}$ – вектор скорости, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, K – модуль всестороннего сжатия, $\boldsymbol{e}$ – тензор скоростей деформаций, $\boldsymbol{s}$ – девиатор тензора напряжений, σ – среднее напряжение, μ – коэффициент Ламе, $\boldsymbol{e}_{vp}$ – тензор скоростей вязкопластических деформаций, τ – время релаксации напряжений, $F(\boldsymbol{s})$ – функция вязкости, σ_s – предел текучести, $H(x)$ – функция Хэвисайда. Тогда полная определяющая система уравнений бимодульной упруговязкопластической среды имеет вид

$$\begin{gathered}
\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma},\\
\frac{\partial \sigma}{\partial t} = K\left(\boldsymbol{e}:\boldsymbol{I}\right),\\
\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t} = 2\mu\boldsymbol{e} - 2\mu\left(\boldsymbol{e}:\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{I}/3 - 2\mu\boldsymbol{e}_{vp},\\
\boldsymbol{e}_{vp} = \frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}}\left\langle\frac{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}}{\sigma_s} - 1\right\rangle\Big/\tau,\\
K = K_+ + \left(K_- - K_+\right)H\left(-\sigma\right), K_+ \ll K_-.
\end{gathered} \tag{1}$$

Для численного решения полученной полулинейной гиперболической системы уравнений (1) использовалась построенная ранее явно-неявная расчётная схема [7], реализуемая в виде поточечной корректировки значений искомых функций после решения линейной упругой задачи сеточно-характеристическим методом [8] на параллелепипедных расчётных сетках.

Описанная вычислительная технология была применена для моделирования процесса распространения волн Рэлея в однородной среде с плотностью 2000 кг/м^3, скоростью P-волн 134 м/с и скоростью S-волн 77 м/с. Расчётная область имела размеры $1000\times1000\times300$ м. Для получения подробной волновой картины шаг пространственной сетки был выбран равным 20 см. Для генерации поверхностной волны Рэлея использовалось численное решение начально-краевой задачи о приложении динамической вертикальной нагрузки с временно́й зависимостью в виде импульса Рикера.

По результатам серии вычислительных экспериментов было показано, что эффективность работы сейсмического барьера сильно зависит от длины падающей на него волны Рэлея. Максимальный коэффициент защиты достигается при глубине барьера, равной длине падающей волны, и дальнейшее увеличение глубины барьера нецелесообразно.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-19-00404, https://rscf.ru/project/25-19-00404/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shahzada K., Noor U. A., Xu Z.-D. *In the wake of the March 28, 2025 Myanmar earthquake: A detailed examination.* J. of Dynamic Disasters. 2025. V. 1. Iss. 2. Art. 100017.
2. Jiang H., Zhao C., Chen Y., Liu J. *Novel Frame-Type Seismic Surface Wave Barrier with Ultra-Low-Frequency Bandgaps for Rayleigh Waves.* Buildings. 2024. V. 14. Art. 2328.
3. Boualam B., Nouredine B., Salah M., Daniel D. *Vertical dynamic impedance for vibrations isolation of foundations using in-filled trenches.* J. of GeoEngineering. 2023. V. 18. Iss. 2. P. 071–082.
4. Chakrabortty P., Jauhari N., Kumar R., Barbieri D.M. *Sustainable Vibration Screening with Dual Trenches Infilled with Geofoam and Aggregate: Full-Scale Field Experiments.* In: Kioumarsi, M., Shafei, B. (eds) The 1st International Conference on Net-Zero Built Environment. Lecture Notes in Civil Engineering. 2025. V. 237.
5. Li C., Song Z., Wang F. [et al.] *Seismic response characteristics of asphalt concrete core walls based on a bimodulus dynamic constitutive model.* Construction and Building Materials. 2025. V. 493. Art. 143171.
6. Dudchenko A. V., Dias D., Kuznetsov S. V. *Vertical wave barriers for vibration reduction.* Arch. Appl. Mech. 2021. V. 91. P. 257–276.
7. Nikitin I. S., Golubev V. I., Shevchenko A. V. *Numerical Schemes for Problems in the Dynamics of Elastoviscoplastic Media with an Arbitrary Hardening-Softening Function.* Comput. Math. and Math. Phys. 2026. V. 66. P. 1005–1017.
8. Petrov I. B., Golubev V. I., Shevchenko A. V. [et al.] *Three-Dimensional Grid-Characteristic Schemes of High Order of Approximation.* Dokl. Math. 2024. V. 110. P. 457–463.

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ИСПАРЕНИЕМ

Д. В. Гончарова[1], *О. Н. Гончарова*[2]

[1] *Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*
[2] *Алтайский государственный университет, Барнаул*

Конвективные течения в двухслойной системе «жидкость – газопаровая смесь» изучаются на основе нестационарного обобщения [1] точного решения уравнений конвекции Обербека – Буссинеска, в которых учитываются взаимообратные эффекты термодиффузии в газопаровой фазе. Данное решение было построено для описания установившихся однонаправленных течений в системе, заполняющей бесконечный канал и находящейся под действием поперечно направленной силы тяжести и продольного градиента температуры при испарении диффузионного типа на плоской термокапиллярной границе раздела [2, 3]. Задача о построении нестационарного обобщения решения Остроумова – Бириха, имеющего групповую природу [4], всесторонне исследована в [5] и успешно решается в случае двумерных постановок, что приводит к содержательным результатам, касающимся, в частности, построения решения для описания испарительной конвекции в двухфазной системе [1].

Пусть на твёрдых непроницаемых стенках канала выполняются условия прилипания, отсутствует поток пара на верхней стенке, и задаются линейные распределения температуры. На термокапиллярной границе раздела, остающейся прямолинейной во все моменты времени, выполняются кинематическое и динамическое условия, условия непрерывности скорости и температуры, условия баланса тепловых потоков и массы, а также соотношение для концентрации насыщенного пара. Замыкает постановку условие, задающее расход газопаровой смеси. Движение возникает из заданного начального состояния.

Характерной особенностью решения, помимо того, что только продольная компонента скорости отлична от нуля, является линейная зависимость от продольной координаты функций температуры жидкой и газопаровой сред и концентрации пара. В результате своеобразной процедуры расщепления по этой координате возникает цепочка взаимосвязанных начально-краевых задач для нахождения неизвестных функций (скорости, продольных градиентов и аддитивных составляющих функций температуры и концентрации), зависящих от времени и поперечной координаты. Искомые функции определяют динамику и процесс тепломассопереноса в жидком и газопаровом слоях.

Разработан численный алгоритм решения цепочки начально-краевых задач для дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Численно исследованы структура и характеристики течений в системе «этанол – воздух – пар», их эволюция и изменение массовой скорости испарения при различных вариантах зависимости от времени параметров, определяющих граничный тепловой режим. Описаны топологически разные типы течений, распределения температуры и концентрации пара.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2024–2026) (госзадание FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бекежанова В. Б., Степанова И. В. *Нестационарный аналог решения Бириха для описания течений с испарением.* Рукопись. Красноярск. 2025. 5 с.
2. Гончарова О. Н., Резанова Е. В. *Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела.* ПМТФ. 2014. Т. 55. Вып. 2. С. 68–79.
3. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Laskovets E. V. *Study of the gas flow rate effect on the parameters of evaporative convection regimes using an exact solution.* Int. J. of Thermal Sciences. 2024. V. 1204. Art. 109179.
4. Пухначев В. В. *Теоретико-групповая природа решения Бириха и его обобщения.* Симметрия и дифференциальные уравнения: Сб. тр. Международной конференции «Симметрия и дифференциальные уравнения». Красноярск: ИВМ СО РАН. 2000. С. 180–183.
5. Пухначев В. В. *Нестационарные аналоги решения Бириха.* Известия АлтГУ. 2011. № 1–2. С. 62–69.

ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ПОРИСТОЙ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕД

А. А. Губайдуллин, О. Ю. Болдырева, Д. Н. Дудко

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Изучение поверхностных волн в пористых средах, насыщенных жидкостью или газом, актуально для задач геофизики, сейсморазведки, строительства и материаловедения. Это позволяет моделировать поведение грунтов, диагностировать пористые материалы, повышать эффективность добычи нефти/газа, разрабатывать звукоизоляционные покрытия, контролировать качество поверхностей. Для геофизики и сейсморазведки актуальность исследования волн на границах пористых сред объясняется необходимостью корректной интерпретации сейсмических данных, оценки рисков при землетрясениях.

Численно исследовано распространение волн давления вдоль границы пористой и трещиновато-пористой сред. Рассмотрены случаи, когда граница между средами является плоской, имеет синусоидальный профиль или является ломаной линией. Задача рассмотрена в двумерной постановке. Исследование проведено с использованием двухскоростной модели пористой среды и трёхскоростной модели трещиновато-пористой среды.

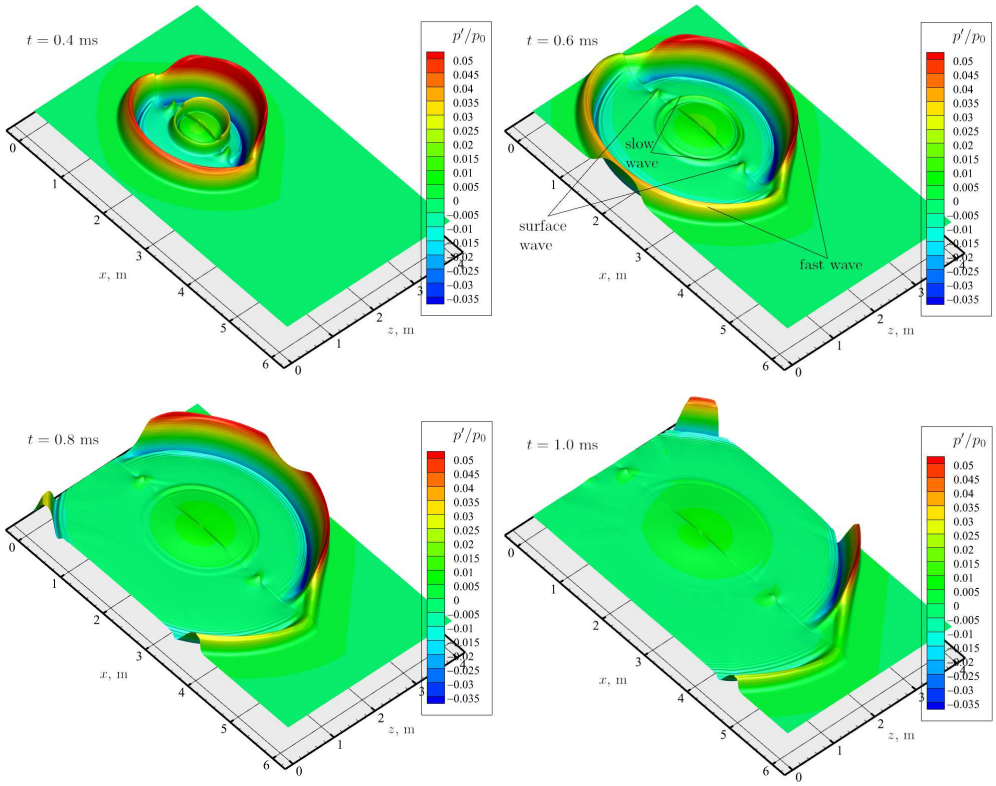


Рис. 1. Поля безразмерного полного давления при распространении возмущения в пористой/трещиновато-пористой средах для нескольких моментов времени

На границе раздела «пористая среда – трещиновато-пористая среда» использовалось условие «открытые поры». Возмущение задавалось источником, расположенным на границе раздела сред или вблизи неё.

При возбуждении возмущения в каждой из сред формируются объёмные волны – быстрые и медленные продольные волны, поперечные волны, которые распространяются радиально от источника внутрь каждого полупространства. Также формируется поверхностная волна, распространяющаяся вдоль границы раздела сред. Для визуализации процесса возбуждения и распространения упругих волн были рассчитаны поля полного давления в пористой и трещиновато-пористой средах.

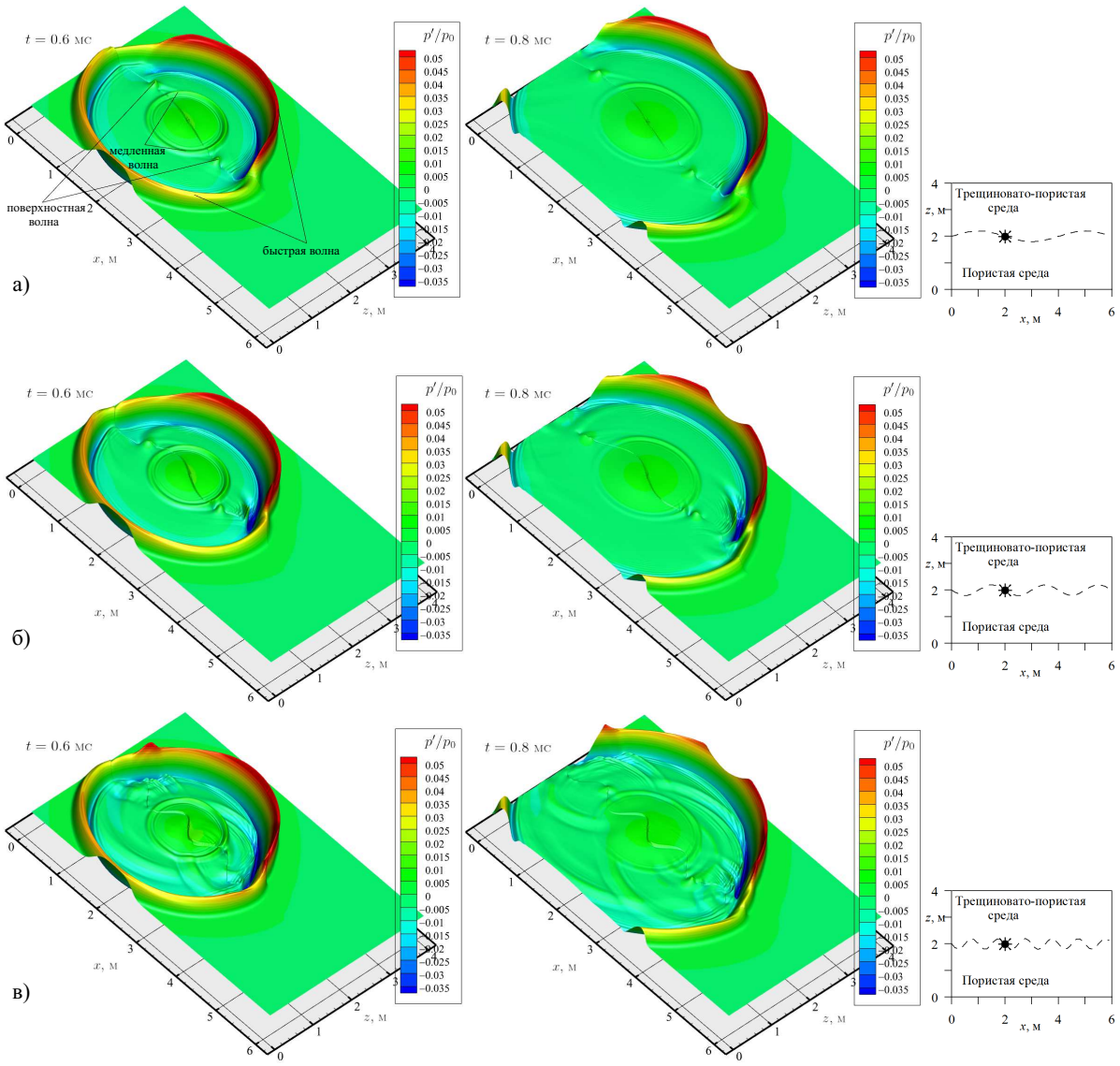


Рис. 2. Поля безразмерного полного давления в моменты времени $t = 0.6$ и 0.8 мс при распространении возмущения в пористой и трещиновато-пористой средах с границей между ними синусоидального профиля различного пространственного периода $T_x = 4$ м (а), 2 м (б), 1 м (в) ($A_z = -0.2$ м)

На рис. 1 показана картина распространения возмущения от источника, расположенного на границе сред. Приведено изменение полного давления в среде, поэтому видны только продольные и поверхностная волны, распространение которых связано со сжатием или разрежением скелета и насыщающего флюида. Поперечная волна не вызывает из-

менения давления, поэтому на данном рисунке не наблюдается. На границе сред видны быстрая продольная, поверхностная и медленная продольная волны, при этом значения полного давления в продольных волнах существенно ниже, чем в этих волнах при удалении от границы.

На рис. 2 представлен результат расчёта для случая, когда граница между пористой и трещиновато-пористой средами сред имеет синусоидальный профиль и задаётся линией $z = b(x) = z_{b0} + A_z \sin(2\pi(x - x_s)/T_x)$ и характеризуется периодом по пространству T_x и амплитудой A_z, $z_{b0} = z_s = 2$ м. Показана картина распространения волн для трёх значений периода ($T_x = 4$, 2, 1 м) при неизменной амплитуде ($A_z = -0.2$ м), приведено изменение безразмерного полного давления. На схемах справа показана граница между средами и отмечено расположение источника возмущения. Видно, как в каждую среду от источника радиально распространяются объёмные быстрая и медленная продольные волны, а вдоль границы наблюдается поверхностная волна. Расчёты показали, что при достаточно большом значении периода T_x распространение как объёмных, так и поверхностных волн, аналогично случаю плоской границы между средами (рис. 1). В случае границы синусоидального профиля при уменьшении T_x картина изменяется и становится более сложной. Волны взаимодействуют с искривлёнными участками границы, возникают отражённые и прошедшие объёмные дополнительные волны.

Как показали расчёты, если граница искривляется и её кривизна становится достаточно большой, то в силу взаимодействия продольных волн с такими участками границы генерируются отражённые и прошедшие волны, которые не позволяют проследить за поверхностной волной.

Проведённое исследование позволяет сделать следующие выводы. Установлено, что в процессе распространения возмущения в каждой среде формируются продольные и поперечные волны. На границе также может возникнуть поверхностная волна. Получены оценки скорости и затухания объёмных и поверхностной волн, распространяющихся вдоль плоской границы, для поверхностной волны оценена глубина проникновения возмущения. Показано, что при искривлении границы и достаточно большой её кривизне, а также в случае границы с изломами, в силу взаимодействия продольных волн с выступающими участками границы, могут генерироваться отражённые и прошедшие волны, которые не позволяют проследить за поверхностной волной.

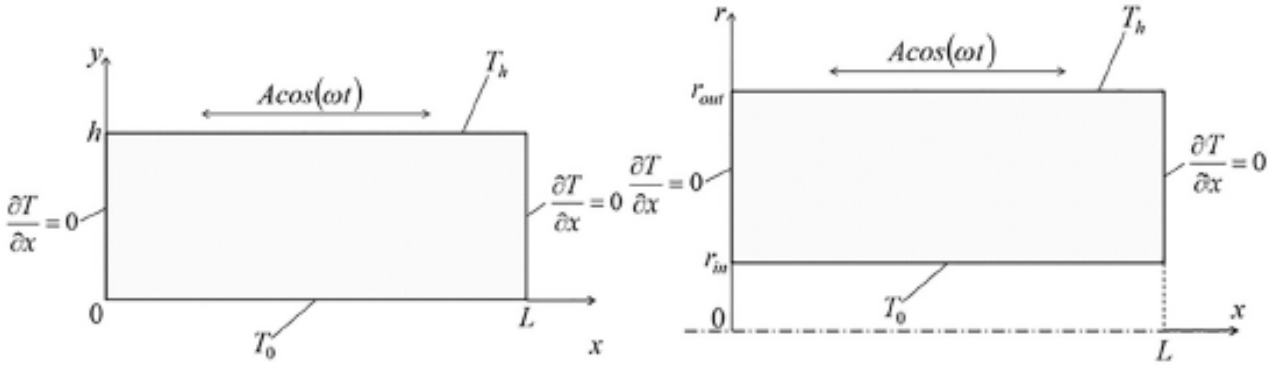
Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН (номер госрегистрации 124021500017-5).

СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ТЕРМОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН И ВИБРАЦИИ НА ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПОЛОСТЯХ

А. А. Губайдуллин[1,2], *А. В. Пяткова*[1,2]

[1] *Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН*
[2] *Тюменский государственный университет*

Проведено численное исследование совместного действия вибрации и термоакустических волн на замкнутые полости (прямоугольную или цилиндрическую кольцевую), внутри которых находится газ. Термоакустические волны появляются вследствие перепада температур, возникающего за счёт разной интенсивности тепловой нагрузки, приложенной на противолежащих горизонтальных стенках прямоугольной полости или внешней и внутренней боковых поверхностях цилиндрической кольцевой полости. Вибрация полостей осуществляется в продольном направлении. Перепад температур, частота вибрации и внутренний радиус цилиндрической кольцевой полости варьируются. При этом сохраняется равенство $h = r_{out} - r_{in}$.



Для описания движения газа используется полная система уравнений Навье – Стокса для сжимаемой среды, которая решена численно с использованием методики расчёта, приведённой в [1]. Выполнено сопоставление с экспериментальными данными [2], где рассмотрены виды вихрей акустического течения для прямоугольной полости с разнонагретыми противолежащими стенками.

Выявлены особенности теплопереноса и резонансные эффекты в области, возникающие вследствие наложения продольных и поперечных колебаний газа [3]. Также проведено сравнение результатов со случаем, когда вибрация полостей не осуществляется или когда изотермические стенки имеют одинаковую температуру, т. е. перепад температур равен нулю.

Работа выполнена в рамках госзадания ИТПМ СО РАН (№ госрегистрации 124021500017-5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gubaidullin A. A., Pyatkova A. V. *The effects of heat transfer through the ends of a cylindrical cavity on acoustic streaming and gas temperature.* Mathematics. 2023. V. 11. Art. 1840.
2. Nabavi M., Siddiqui K., Dargahi J. *Influence of differentially heated horizontal walls on the streaming shape and velocity in a standing wave resonator.* Int. Commun. Heat Mass Transfer. 2008. V. 35. P. 1061–1064.
3. Gubaidullin A. A., Pyatkova A. V. *Features of heat transfer and flow of gas suspension in a closed vibrating rectangular channel.* Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46. No. 5. P. 2063–2073.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА С ПОПЕРЕЧНЫМ ПОТОКОМ И СКОЛЬЖЕНИЕМ НАВЬЕ

К. В. Губарева[1], *Е. Ю. Просвиряков*[2,3]

[1]*Самарский государственный технический университет*
[2]*Уральский федеральный университет, Екатеринбург*
[3]*Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург*

Введение. Задачи о течениях вязкой несжимаемой жидкости в плоских каналах с проницаемыми или скользящими границами находят широкое применение в микро- и наногидродинамике, при проектировании мембранных аппаратов, в системах охлаждения и в нефтедобыче. Классические решения Куэтта и Пуазейля давно стали эталонными, однако их обобщения на случай нестационарных режимов, наличия поперечного потока и условий скольжения остаются актуальными как с теоретической, так и с прикладной точек зрения [1–6].

В настоящей работе строится точное аналитическое решение нестационарной задачи о сдвиговом течении Куэтта в плоском слое толщиной h, когда продольная скорость V_x линейно зависит от поперечной координаты y: $V_x = U(z,t) + y\,u_1(z,t)$. Поперечная составляющая скорости $V_z = w = \text{const}$ (вдув или отсос) постоянна по всему полю. На нижней границе ($z = 0$) задано условие скольжения Навье с длиной скольжения a:

$$U(0,t) - a\,\frac{\partial U}{\partial z}\,(0,t) = W_0, \qquad u_1(0,t) - a\,\frac{\partial u_1}{\partial z}\,(0,t) = \Omega_0,$$

а на верхней ($z = h$) – условие прилипания: $U(h,t) = W_1,\ \ u_1(h,t) = \Omega_1$. Начальное состояние – покой ($U(z,0) = 0,\ \ u_1(z,0) = 0$). Такой подход позволяет учесть эффекты поперечной фильтрации и контролируемого проскальзывания, что важно для управления структурой течения.

Постановка задачи и метод решения. Исходная система уравнений Навье – Стокса в приближении несжимаемой жидкости после подстановки линейной по y функции V_x и постоянной $V_z = w$ сводится к двум независимым уравнениям для U и u_1:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + w\,\frac{\partial U}{\partial z} = \nu\,\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\,, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} + w\,\frac{\partial u_1}{\partial z} = \nu\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\,,$$

где $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость. Вводя $\alpha = w/\nu$, перепишем первое равенство в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \alpha\,\frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Решение ищется в виде суммы стационарной части $U_{\text{ст}}(z)$, зависящей от α и a, и переходной $U_{\text{пер}}(z,t)$, которая представляется рядом по собственным функциям:

$$U_{\text{пер}}(z,t) = e^{\alpha z/2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n\,e^{-\gamma_n t}\,\sin\bigl(\lambda_n(h-z)\bigr),$$

где $\gamma_n = \nu\lambda_n^2 + \alpha^2\nu/4$, а собственные числа λ_n находятся из уравнения

$$\lambda h + \operatorname{atan}\left(\frac{\lambda}{1/a - \alpha/2}\right) = n\pi.$$

Коэффициенты C_n вычисляются аналитически из начального условия $U(z,0) = 0$ с использованием ортогональности собственных функций. Аналогично строится решение уравнения для $u_1(z,t)$ с теми же λ_n и соответствующими коэффициентами, определяемыми граничными значениями Ω_0, Ω_1 [7–9].

Численная реализация выполнена в среде MATLAB с удержанием $N = 150$ членов ряда. При $a = 0$ предельный переход даёт стандартные собственные значения $\lambda_n = n\pi/h$, что соответствует прилипанию на обеих стенках [10, 11].

Результаты и обсуждение. Расчёты проведены для воды при 20 °C ($\rho = 998$ кг/м^3, $\mu = 1.002 \cdot 10^{-3}$ Па·с), зазор $h = 1$ мм, скорости пластин $W_0 = -0.005$ м/с, $W_1 = 0.01$ м/с, поперечный сдвиг $\Omega_0 = 0$, $\Omega_1 = 0.5$ с$^{-1}$, длина скольжения $a = 1$ мкм, поперечная скорость $w = 0.001$ м/с.

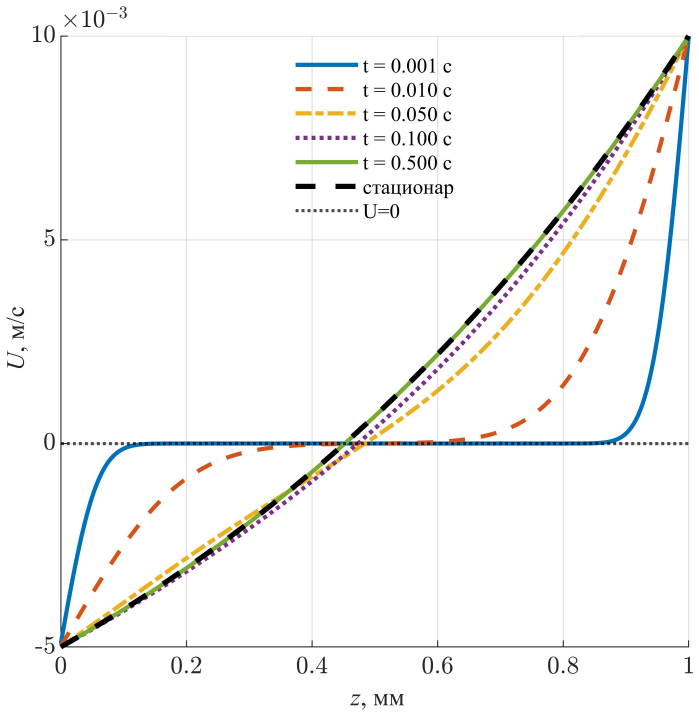


Рис. 1. Эволюция профиля $U(z)$ при $y = 0$ в различные моменты времени t (цветные линии) и стационарное решение (чёрный пунктир). Горизонтальная пунктирная линия – $U = 0$

На рис. 1 представлена эволюция профиля $U(z)$ при $y = 0$ в различные моменты времени t: 0.001 с, 0.01 с, 0.05 с, 0.1 с, 0.5 с, а также стационарное решение (пунктир). Видно, что при $t = 0.001$ с профиль близок к нулю (начальная стадия), затем он быстро формируется, и при $t = 0.5$ с практически совпадает со стационарным. На ранних этапах ($t < 0.01$ с) наблюдается образование тонкого вязкого пограничного слоя у стенок, для которого характерны повышенные градиенты скорости [4, 5].

Проверка граничных условий показала, что невязка скольжения на нижней стенке имеет порядок 10^{-11} для U и 10^{-10} для u_1, что свидетельствует о высокой точности решения. Максимальное отклонение от стационара при $t = 10$ с составляет менее 10^{-10} м/с, что подтверждает практически полный выход на установившийся режим. Исследована сходимость ряда по числу мод: при $N \geq 50$ изменение решения не превышает 10^{-9} м/с, что свидетельствует о быстрой сходимости ряда [6, 7].

Полученные результаты демонстрируют сильное влияние как поперечного потока, так и параметра скольжения на форму профиля. В частности, увеличение w (вдув) приводит

к смещению профиля вверх, а увеличение a – к росту скорости у нижней стенки. Эти эффекты могут быть использованы для управления течением в микрофлюидных устройствах [3, 10].

Заключение. Найдено точное аналитическое решение нестационарной задачи Куэтта с учётом постоянного поперечного потока и условия скольжения Навье на одной из границ. Предложенный метод позволяет получать профили скорости для произвольных моментов времени и исследовать переходные процессы. Высокая точность решения подтверждена выполнением граничных условий и быстрой сходимостью ряда. Результаты могут быть применены при проектировании систем с контролируемым проскальзыванием и поперечной фильтрацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions.* Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2006. 196 p.
2. Wang C. Y. *Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations.* Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 159–177.
3. Neto C., Evans D. R., Bonaccurso E., Butt H.-J., Craig V. S. J. *Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies.* Rep. Progr. Phys. 2005. V. 68. P. 2859–2897.
4. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. *Неоднородные течения Куэтта.* Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. Вып. 2. С. 177–182.
5. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. *Exact Solutions to the Navier–Stokes Equations for Describing Inhomogeneous Isobaric Vertical Vortex Fluid Flows in Regions with Permeable Boundaries.* Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures. 2023. Iss. 1. P. 41–53.
6. Ershkov S., Burmasheva N., Leshchenko D. D., Prosviryakov E. Yu. *Exact Solutions of the Oberbeck–Boussinesq Equations for the Description of Shear Thermal Diffusion of Newtonian Fluid Flows.* Symmetry. 2023. V. 15. No. 9. P. 1730.
7. Prosviryakov E. Yu. *Exact solutions to generalized plane Beltrami-Trkal and Ballabh flows.* J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci. 2020. V. 24. No. 2. P. 319–330.
8. Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю., Еремин А. В. *Аналитическое решение обобщенной задачи Нуссельта – Куэтта – Пуазейля для многослойного неоднородного сдвигового течения.* Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures. 2026. No. 1. P. 6–22.
9. Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю., Еремин А. В. *Аналитическое решение уравнений Навье – Стокса для описания неоднородного течения Куэтта с квадратичным профилем в слое с проницаемыми границами.* Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2026. V. 26. No. 1. Art. 2242.
10. Berman A. S. *Laminar flow in channels with porous walls.* J. Appl. Phys. 1953. V. 24. No. 9. P. 1232–1235.
11. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. *Unsteady layered vortical fluid flows.* Fluid Dynamics. 2016. V. 51. No. 2. P. 148–154.

ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА МЕХАНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТАЮЩЕГО ИСКУССТВЕННОГО ЛЕДОВОГО ОСТРОВА С УЧЁТОМ ЗАВИСИМОСТИ ПРОЧНОСТИ ЛЬДА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Е. К. Гусева[1], *И. Б. Петров*[1,2]

[1]*Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный*
[2]*Университет Иннополис, Иннополис, Республика Татарстан*

Активное развитие Арктического региона способствует появлению новых технологий, связанных с освоением территорий и разведкой полезных ископаемых. Наличие различных ледяных образований в регионе привело к идее использовать лёд в качестве строительного материала для возведения морских сооружений [1]. Несмотря на относительную дешевизну и скорость возведения подобных конструкций, их использование сопряжено с возможной потерей прочности льда в летние месяцы и поэтому остаётся сезонным [2]. Тем не менее ледовые острова и платформы могут служить более экологически и экономически выгодной альтернативой другим шельфовым сооружениям за счёт не только избавления от необходимости доставки материалов, необходимых для их возведения, но и упрощения вывода из эксплуатации этих конструкций. Однако реологические свойства и прочностные характеристики искусственных ледовых образований остаются не до конца изученными. В связи с этим в настоящей работе исследуется вопрос оценки механической устойчивости искусственного ледового острова с учётом зависимости его прочности от температуры.

Считается, что остров был возведён в январе и используется на протяжении восьми месяцев. Для задания температурного профиля во льду и изменения его геометрии при таянии используются результаты предыдущей итерации исследования, в которой была решена задача Стефана, описывающая таяние острова под действием тепловых потоков от воздуха и воды, характерных для Баренцева моря [3]. Данные, полученные в конце каждого месяца, применялись для проведения численных расчётов разрушения острова под действием статических нагрузок от возводимых на его поверхности зданий и оборудования для разведки и разработки залежей. Так, в двумерном случае расчётная область (рис. 1) состояла из острова (0), окружённого водой (1) и приморожденного к морскому дну (2), ниже которого располагается более плотная порода (3). В качестве определяющей системы уравнений использовалась модель изотропной линейной теории упругости, воспроизводящая эволюцию напряжений и скоростей в каждой точке рассматриваемого пространства. Во льду также учитывалась вязкость, согласно модели Максвелла, с коэффициентом релаксации в 2 мс. Для определения разрушенных зон во льду применялся критерий фон Мизеса с пределом прочности k: в выделенных областях вязкость не учитывалась, вместо этого напряжения постоянно корректировались для возврата на поверхность текучести.

Для учёта изменения реологических характеристик льда в зависимости от температуры T использовались известные эмпирические формулы [4, 5]. Так, для модуля Юнга использовалась формула стандарта ISO: $E = 9.21(1-0.00146T)(1-\sqrt{v_b})^4$ ГПа, где v_b – объёмная доля жидкости в порах льда, которая вместе с долей газа v_a составляет итоговую

пористость льда: $v = v_a + v_b = \rho S[F_2(T)/F_1(T) + 1/F_1(T)]$,

$$F_1(T) = \begin{cases} -0.041221 - 18.407T + 0.58402T^2 + 0.21454T^3, & T > -2\,^\circ\text{C}, \\ -4.732 - 22.45T - 0.6397T^2 - 0.01074T^3, & T > -22.9\,^\circ\text{C}, \\ 9899 + 1309T + 55.27T^2 + 0.716T^3, & T \le -22.9\,^\circ\text{C}; \end{cases} \quad (1)$$

$$F_2(T) = \begin{cases} 0.090312 - 0.016111T + 0.00012291T^2 + 0.00013603T^3, & T > -2\,^\circ\text{C}, \\ 0.08903 - 0.01763T - 0.000533T^2, & T > -22.9\,^\circ\text{C}, \\ 8.547 + 1.089T + 0.04518T^2 + 0.0005819T^3, & T \le -22.9\,^\circ\text{C}. \end{cases} \quad (2)$$

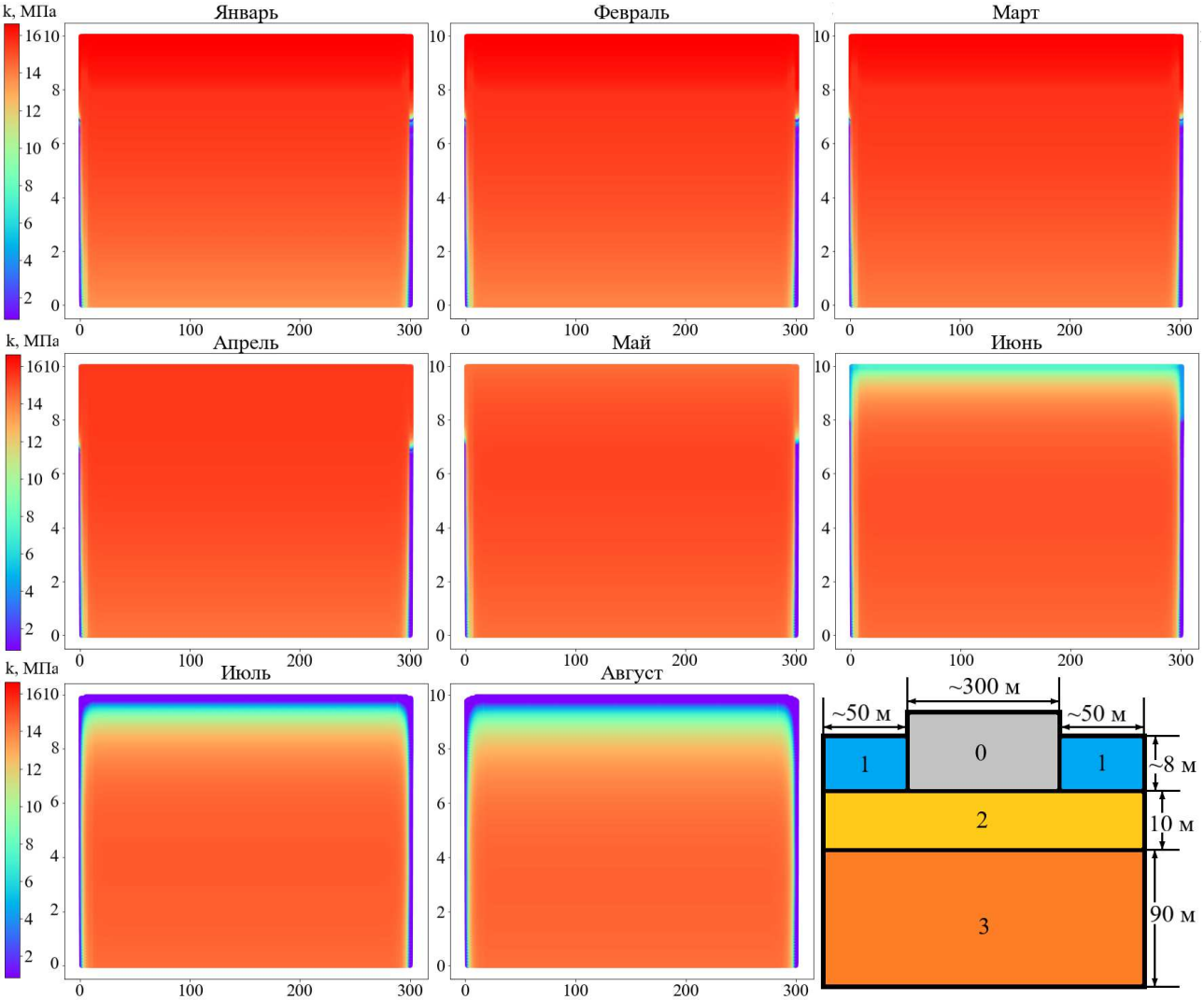


Рис. 1. Предел прочности льда в конце каждого месяца (координаты указаны в метрах) и схема расчётной области

Для определения этих параметров использовались полиномиальные аппроксимации $F_1(T)$ (1) и $F_2(T)$ (2), а также усреднённое значение солёности $S = 4$ ‰. Аналогично, прочность льда определялась на основе пористости: $k = 17.5e^{-7v}$ МПа; результирующие профили показаны на рис. 1.

Плотность рассчитывалась как $\rho = 917/(1+0.000165T)$ кг/м^3, а коэффициент Пуассона оставался постоянным: $\nu = 0.295$. Упругие параметры остальных областей были постоянными (таблица 1).

Таблица 1. Упругие и сеточные характеристики слоёв

№	Слой	h_y, м	h_x, м	c_p, м/с	c_s, м/с	ρ, кг/м^3
0	Ледовый остров	$\approx 0,05$	$[0,35; 1,2]$	$[3000; 3700]$	$[1600; 2000]$	$[917; 921]$
1	Вода	$\approx 0,05$	≈ 1	1500	1	1000
2	Морское дно	1	$[0,35; 1,2]$	1806	316	2500
3	Нижний слой	1	$[0,35; 1,2]$	2250	1000	2500

Для решения динамической системы уравнений применялся активно развивающийся сеточно-характеристический метод [6], позволяющий не только воспроизводить волновые процессы в гетерогенных средах, но и решать задачи установления, что и использовалось в настоящей работе. На верхней поверхности льда ставилось условие постоянной силы, а время расчёта устремлялось к большим значениям (0.5 с шагом в 5 мкс), достаточным для значительного затухания всех волновых процессов. Таким образом, реализовывалось приближение статических расчётов в рамках динамической системы. Зона приложения нагрузки варьировалась от 5 до 150 м. К тому же полученные в результате температурных расчётов неструктурированные сетки [3] были преобразованы в структурированные (сеточные параметры приведены в таблице 1). Между ними ставилось условие полного слипания в области контакта, дневная поверхность считалась свободной, а на боковых и нижних границах расчётной области применялось характеристическое условие поглощения падающих волн. Для расчётов была выбрана сеточно-характеристическая схема третьего порядка аппроксимации, которая монотонизировалась с помощью сеточно-характеристического критерия монотонности [7].

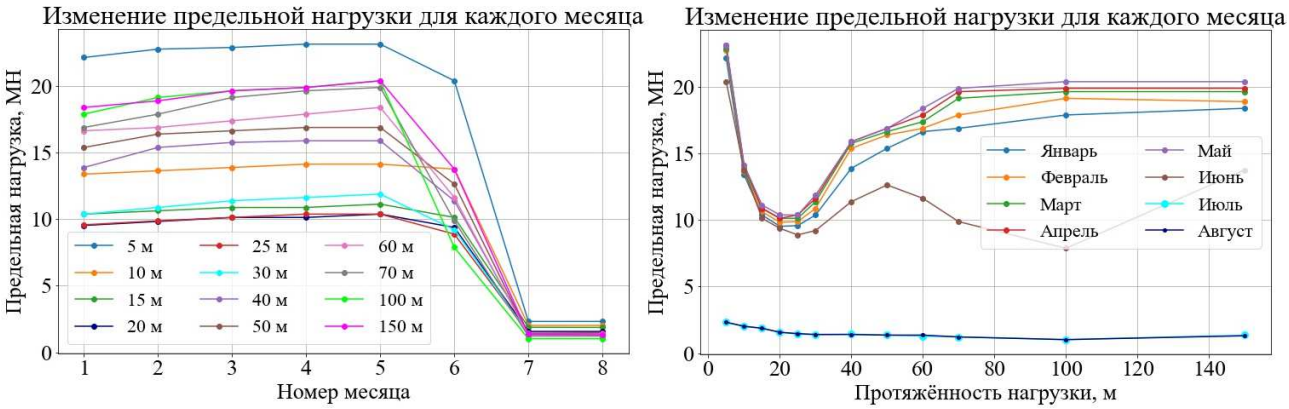


Рис. 2. Значения предельной нагрузки, при которой срабатывает критерий фон Мизеса хотя бы в одном узле сетки, в каждый месяц

В результате расчётов при варьировании амплитуды нагрузки и области её приложения были получены характерные зоны разрушения и значения минимальной нагрузки, при которых начинает срабатывать критерий фон Мизеса (рис. 2).

Таким образом, были обнаружены закономерности изменения механической устойчивости острова в разные месяцы. Оказалось, что первичные разрушения при относительно небольших нагрузках, превышающих упругий предел, напрямую связаны с зонами таяния льда. Так, в зимние и весенние месяцы лёд начинает разрушаться на тыльной поверхности непосредственно под областью приложения нагрузки. В данном случае в задаче Стефа-

на не учитывались возможные тепловые потоки от Солнца, конструкций на поверхности острова и других природных и антропогенных процессов, поэтому низкая температура воздуха поддерживала более высокую прочность льда у верхней поверхности. Май становится переходным месяцем, когда критерий фон Мизеса начинает срабатывать в толще льда без прямой связи с границами острова. Существенное таяние верхней поверхности острова в летние месяцы приводит к значительному падению прочности в этой области и разрушению льда. При высоких нагрузках начинает разрушаться вся центральная зона острова пропорционально размеру области приложения нагрузки.

Полученные графики предельной нагрузки (рис. 2) подтверждают понижение несущей способности острова в летние месяцы. При этом лёд оказывается наиболее прочным в конце мая, что соответствует известным натурным данным. Примечательно, что зависимость предельной нагрузки от размера зоны её приложения имеет явно выраженный минимум около 20-25 м, причём при больших протяжённостях значения нагрузки практически доходят до максимума, который достигается при 5 м. В летние месяцы графики выполаживаются и становятся близки к константе. Расчёт массы зданий, которые можно безопасно возводить на поверхности острова в этих условиях, показывает предел в 1000 тонн для небольших зданий и предел в 1500 тонн для пятиметровых и протяжённых сооружений. В летние месяцы это значение уменьшается до 200 тонн, что свидетельствует о необходимости прекращения эксплуатации острова при использовании более высоких нагрузок. Тем не менее указанные массы достаточны для создания необходимой инфраструктуры и размещения оборудования для проведения разведки и разработки месторождений.

В результате настоящей работы была численно получена оценка механической устойчивости тающего искусственного ледового острова под воздействием статической нагрузки от конструкций различного размера, возводимых на его поверхности. Для этого была поставлена и решена задача установления с учётом изменения упругих параметров и прочности льда в зависимости от температуры в каждый месяц эксплуатации острова. В итоге было обнаружено падение прочности острова в летние месяцы, что позволяет возводить только небольшие здания на его поверхности. Наивысшая прочность достигается в мае, а в зимние и весенние месяцы допустимый вес конструкций повышается до 1000–1500 тонн. Таким образом, показано, что лёд можно использовать в качестве платформы для проведения исследований и разработки полезных ископаемых на шельфе Арктики. Для уточнения полученных оценок в рамках дальнейшей работы необходимо рассмотрение неучтённых факторов, влияющих на таяние льда. К тому же представленный подход к моделированию может использоваться для анализа прочности льда под действием других естественных и антропогенных процессов, таких как столкновение острова с ледяными образованиями, а также его разрушение при бурении и сейсмических воздействиях.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-11-00035-П, https://rscf.ru/project/23-11-00035-П/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева С. А., Шарапов Д. А. *Ледовые острова, схемы и особенности.* Современное строительство и архитектура. 2023. Т. 40. № 9. С. 1–6.
2. Семенов Д. А., Калошина С. В. *Инновационные технологии строительства искусственных островов.* Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2016. Т. 7. № 4. С. 80–92.

3. Golubev V. I., Muratov M. V., Guseva E. K., Konov D. S., Petrov I. B. *Thermodynamic and mechanical problems of ice formations: Numerical simulation results*. Lobachevskii J. of Math. 2022. V. 43. № 4. P. 970–979.
4. *Сборник нормативно-методических материалов. Книга 25. НД 2-139902-030*. СПб. : Российский морской регистр судоходства, 2017.
5. Сазонов К. Е., Лукьянов С. В., Владимирова О. М. *Основы физики морского льда*. СПб. : РГГМУ, 2023. 148 с.
6. Petrov I. B. *Grid-characteristic methods. 55 years of developing and solving complex dynamic problems*. Computational Mathematics and Information Technologies. 2023. V. 6. № 1. P. 6–21.
7. Guseva E. K., Golubev V. I., Petrov I. B. *Linear, quasi-monotonic and hybrid grid-characteristic scheme for hyperbolic equations*. Lobachevskii J. of Math. 2023. V. 44. № 1. P. 296–312.

СТАЦИОНАРНЫЕ КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ЧАСТИЧНО ОТКРЫТОЙ КЮВЕТЕ: ТЕСТИРОВАНИЕ, РАСЧЁТЫ

К. О. Дембровский

Алтайский государственный университет, Барнаул

Исследование конвективных процессов в жидкости в областях со свободными границами, подверженными действию спутного потока газа, предполагает разработку строго обоснованных численных алгоритмов, их апробацию и проведение расчётов реальных течений.

Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет прямоугольную область $\Omega = \{0 \le x \le L,\ 0 \le y \le H\}$, нижняя ($y = 0$), левая ($x = 0$) и правая ($x = L$) границы которой, а также участки верхней границы ($y = H$) при $0 \le x < x_{in}$ и $x_{out} < x \le L$ являются твёрдыми непроницаемыми стенками (Γ_w). На открытом участке верхней границы ($y = H$, $x_{in} \le x \le x_{out}$), который считается недеформируемой термокапиллярной свободной границей (Γ_f), действуют касательные напряжения $\tau(x)$, порождаемые спутным потоком газа [1, 2].

Математическое моделирование конвективных течений проводится на основе уравнений Обербека – Буссинеска, которые в стационарном случае и в терминах «функция тока ψ – вихрь ω» имеют следующий вид [1, 3]:

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\omega, \\ u\dfrac{\partial\omega}{\partial x} + v\dfrac{\partial\omega}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\omega + \dfrac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}}\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}, \\ u\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} + v\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,\Delta \mathrm{T}. \end{cases}$$

Здесь $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$ – компоненты вектора скорости, T – температура; $\mathrm{Ra} = g\beta T^* h^3 (\nu\chi)^{-1}$ – число Рэлея, $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ – число Прандтля; ν, χ, β – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, теплового расширения жидкости соответственно; $\mathbf{g} = (0, -g)$ – вектор ускорения силы тяжести; T^* – характерный перепад температуры, h – характерный размер. Пусть число Рейнольдса $\mathrm{Re} = U^* h/\nu$ полагается равным 1, тогда $U^* = \nu/h$ – характерная скорость течения.

Граничные условия на твёрдых стенках Γ_w определяются условиями прилипания для скорости и заданным температурным режимом:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0; \quad \mathrm{T}|_{y=0} = \Theta_0, \quad \left.\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial n}\right|_{\Gamma_w \setminus \{y=0\}} = 0.$$

На свободной границе Γ_f формулируются условия, представляющие собой следствия кинематического и динамического условий (соотношения баланса касательных напряжений), и поддерживается линейное распределение температуры:

$$\psi = 0, \quad \omega = \frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} - \tau(x), \quad \mathrm{T} = \Theta_0 + (\Theta_1 - \Theta_0)\frac{x}{L}.$$

Здесь $\mathrm{Ma} = \sigma_T T^* h (\rho\nu\chi)^{-1}$ – число Марангони, σ_T – температурный коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости; заданная функция $\tau(x) = A_\tau \bar{\tau}(x)$ определяет касательные напряжения, создаваемые газовым потоком, A_τ – безразмерный параметр,

характеризующий интенсивность касательных напряжений; Θ_0, Θ_1 – заданные постоянные.

На основе конечно-разностного метода переменных направлений и при различных способах аппроксимации конвективных слагаемых разработан численный алгоритм, тестирование которого проведено на известных задачах о свободной конвекции в прямоугольной кювете: Тест (I) позволяет сравнить численное решение с формальным точным решением уравнений конвекции в нестационарном изотермическом случае. Тест (II) представляет собой задачу о конвекции в квадратной полости с нагревом сбоку [4]. Результаты тестирования (II) представлены в таблице 1 при $\mathrm{Ra} = 10^4$.

Таблица 1. Результаты теста (II) для $\mathrm{Ra} = 10^4$

Сетка	Источник	ψ_{max}	Nu_1	Nu_2
16×16	Получено	6,4767	1,7640	1,2864
16×16	[4]	6,4812	1,8288	1,2685
24×24	Получено	6,4090	1,7517	1,2379
24×24	[4]	6,4205	1,7814	1,2407
32×32	Получено	6,3883	1,7492	1,2151
32×32	[4]	6,3991	1,7646	1,2298

Проведено сравнение с известными результатами расчётов [4]. Здесь числа Нуссельта, определяющие тепловые потоки на правой вертикальной стенке Nu_1 и на нижней горизонтальной стенке Nu_2, вычисляются следующим образом:

$$Nu_1 = \int\limits_0^1 \left(-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=1} dy,$$

$$Nu_2 = \int\limits_0^1 \left(-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} \right) \Bigg|_{y=0} dx.$$

Тест (III) заключается в проведении расчётов изотермического течения для $\tau = A_\tau = \mathrm{const}$ [2]. При выполнении тестового расчёта (III) рассмотрены изменения вихревой структуры течения при изменении соотношения геометрических параметров кюветы. Тест (IV) предполагает численное исследование конвекции для жидкости типа «этанол» (а) в условиях нормальной гравитации и в невесомости; (б) при постоянных и линейных относительно продольной координаты дополнительных касательных напряжениях на свободной границе ($\tau = A_\tau$ и $\tau = A_\tau x$; $A_\tau = 500$) и (в) граничных условиях для температуры, задающих постоянную температуру на нижней стенке ($\Theta_0 = 20$), теплоизоляцию боковых стенок и линейное распределение температуры на свободной границе ($\Theta_1 = 21$) [1]. При этом полагается $\mathrm{Pr} = 17$, $\mathrm{Ma} = 7800$, $H = 1$, $L = 1$. Для постоянной и линейной функции $\tau(x)$ картина течения в кювете представлена на рис. 1 в случае полностью открытой верхней границы и при условиях нормальной гравитации.

Проведены численные исследования структуры стационарных течений в условиях нормальной гравитации и микрогравитации при различных типах зависимости дополнительных касательных напряжений $\tau(x)$.

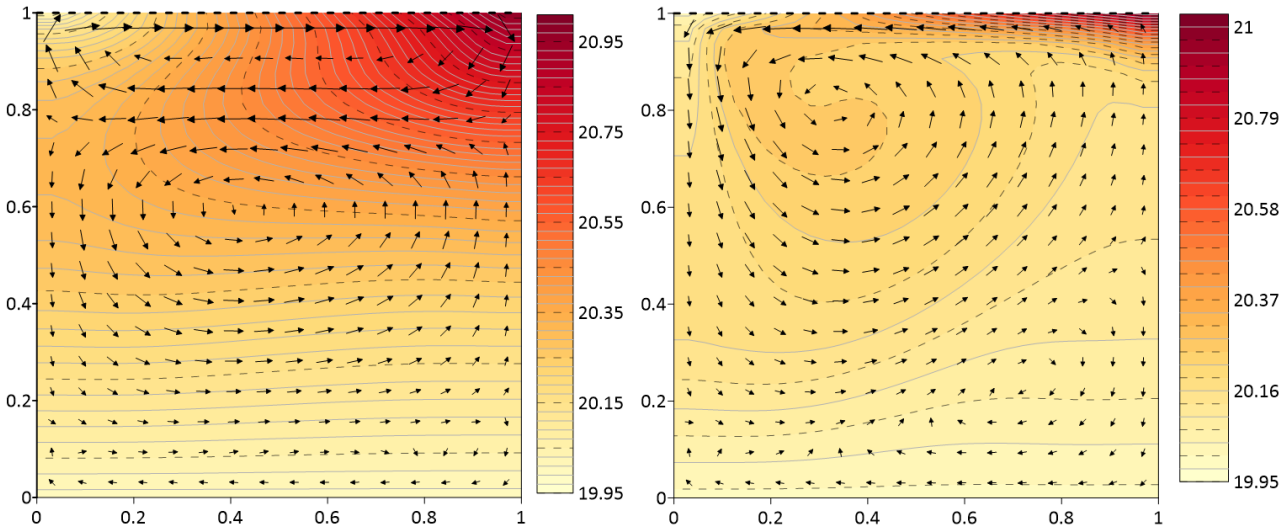


Рис. 1. Структура течения и распределение температуры при $\tau = A_\tau$ (слева), $\tau = A_\tau x$ (справа); $A_\tau = 500$

ЛИТЕРАТУРА

1. Goncharova O. N., Kabov O. A. *Numerical modeling of the tangential stress effects on convective fluid flows in an open cavity.* Microgravity Science and Technology. 2009. V. 21. No. 1. P. 119–127.
2. Goncharova O. N., Kabov O. A. *Numerical investigation of the tangential stress effects on a fluid flow structure in a partially open cavity.* J. of Engineering Thermophysics. 2013. V. 22. Iss. 3. P. 216–225.
3. Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. *Современные математические модели конвекции.* М. : Физматлит, 2008. 368 с.
4. Воеводин А. Ф., Гончарова О. Н., Протопопова Т. В. *Численные методы исследования конвективных течений: реализация метода расщепления по физическим процессам.* Известия Алтайского государственного университета. 2013. № 1-1(77). С. 88–93.

К ВОПРОСУ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА «СВОБОДНАЯ ЖИДКОСТЬ – ПОРИСТАЯ СРЕДА»

В. А. Дёмин, Ф. В. Дёмин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Исследование тепловой конвекции в гидродинамических системах с границей раздела «свободная жидкость – пористая среда» относится к классическому разделу теории фильтрации, однако ряд фундаментальных вопросов в этой области до сих пор остаётся открытым. Ключевая сложность заключается в формулировке динамических граничных условий на границе раздела сред, что исторически привело к возникновению разных подходов, включая эмпирический закон Биверса – Джозефа [1] и его строгое асимптотическое обоснование, выполненное Саффманом [2]. Представителями пермской гидродинамической школы (Д. В. Любимов) ещё в 1970-х годах было показано [3], что сопряжение решений в свободной жидкости и пористой среде при использовании уравнения Дарси для слабопроницаемых сред ведёт к переопределенности (избыточности) граничных условий. В настоящее время эта проблема зачастую решается использованием уравнений в приближении Дюпюи – Форхгеймера – Бринкмана, которые имеют более высокий порядок по пространственным производным. Однако в современных исследованиях, включая работы, служащие для верификации вычислительных кодов, часто налагаются условия непрерывности обеих проекций скорости на границе раздела. В настоящей работе показано, что для сред с низкой пористостью такой подход физически несостоятелен и ведёт к серьёзным нестыковкам, то есть к существенному завышению глубины проникновения конвективных потоков вглубь пористого слоя.

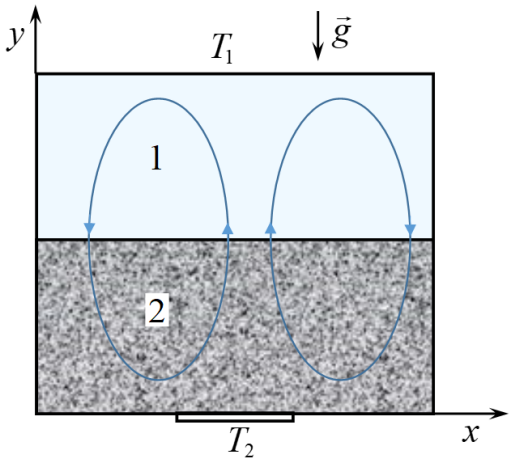


Рис. 1. Геометрия решаемой задачи со встроенным в дно локализованным нагревателем; 1 – свободная жидкость, 2 – пористая среда

Рассмотрим физико-математическую модель (рис. 1), в которой в нижней части полости расположена пористая среда с пористостью ϕ и проницаемостью κ, а в верхней части полости – свободная жидкость. Нагрев осуществляется с помощью локализованного на

дне нагревателя с температурой T_2. Верхняя граница поддерживается при температуре T_1 ($T_2 > T_1$).

В расчётах используются уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска в переменных «функция тока – завихренность». В пористой среде движение описывается тоже в терминах функции тока и завихренности с применением локально-равновесной модели фильтрации в приближении Дюпюи – Форхгеймера – Бринкмана. Основополагающим аспектом модели является разделение понятий скорости на три характеристики движения:

1) $\vec{v}(v_x, v_y, 0)$ – скорость свободной жидкости;

2) $\vec{V}(V_x, V_y, 0)$ – поровая скорость (истинная скорость движения жидкости в каналах пор);

3) $\vec{u}(u_x, u_y, 0)$ – скорость фильтрации (макроскопическая характеристика, $\vec{u} = \phi\vec{V}$).

Были проанализированы типичные граничные условия, применяющиеся в работах [4–6] на границе раздела между пористой средой и жидкостью, в виде условия непрерывности завихренности, а так же непрерывности функции тока и её производной по нормальной координате

$$\Psi_{\mathrm{f}}|_\Gamma = \Psi_{\mathrm{pm}}|_\Gamma, \qquad \left.\frac{\partial\Psi_{\mathrm{f}}}{\partial y}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial\Psi_{\mathrm{pm}}}{\partial y}\right|_\Gamma. \tag{1}$$

Индексы f и pm отвечают свободной жидкости и пористой среде соответственно. Данные условия, подразумевающие непрерывность компонент скорости на поверхности пористой среды, обеспечивают глубокое проникновение течения в твёрдый массив даже для материалов с низкой пористостью. Анализ движения жидкости вблизи границы раздела показывает, что условия непрерывности должны формулироваться с учётом микроструктуры пор и пористости. При рассмотрении предельных случаев напорного и продольного течений были получены следующие граничные условия в терминах функций тока:

$$\Psi_{\mathrm{f}}\big|_\Gamma = \Psi_{\mathrm{pm}}\big|_\Gamma, \quad \left.\phi\frac{\partial\Psi_{\mathrm{f}}}{\partial y}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial\Psi_{\mathrm{pm}}}{\partial y}\right|_\Gamma. \tag{2}$$

Для завихренностей Ω в свободной жидкости и φ для пористой среды имеем

$$\Omega|_\Gamma = \left.\frac{1}{\phi}\,\varphi\right|_\Gamma. \tag{3}$$

Задача решалась численно методом конечных разностей (двухполевой метод, явная схема, процедура установления). Расчётное количество узлов в схеме по осям координат выбиралось равным $55 \div 63$.

Результаты, полученные при численном моделировании, и их обсуждение. Численное моделирование для геометрии, представленной на рис. 1, проводилось так же, как в работах [4–6], в терминах безразмерных переменных с граничными условиями (1) в пределе больших и малых значений пористости и проницаемости. Далее было выполнено сравнение этого решения с результатами расчётов, полученными с применением новых граничных условий (2), (3), включая те же значения пористости и проницаемости. На рис. 2 приведены результаты численного моделирования для больших значений пористости и проницаемости.

Изолинии функции тока для разных типов граничных условий на компоненты скорости представлены для $\phi = 0.8$, $Da = 1.1 \cdot 10^{-3}$ (число Дарси) и $\mathrm{Ra} = 10^5$ (число Рэлея), $\mathrm{Pr} = 6.7$ (число Прандтля), $\eta = 0.8$ (относительный коэффициент теплоёмкости). Видно,

что, несмотря на разницу в граничных условиях на поверхности пористой среды, качественно поля функций тока похожи из-за больших значений пористости и проницаемости. При предельных значениях пористости для случая $\phi \to 1$, граничные условия (2), (3) переходят в (1).

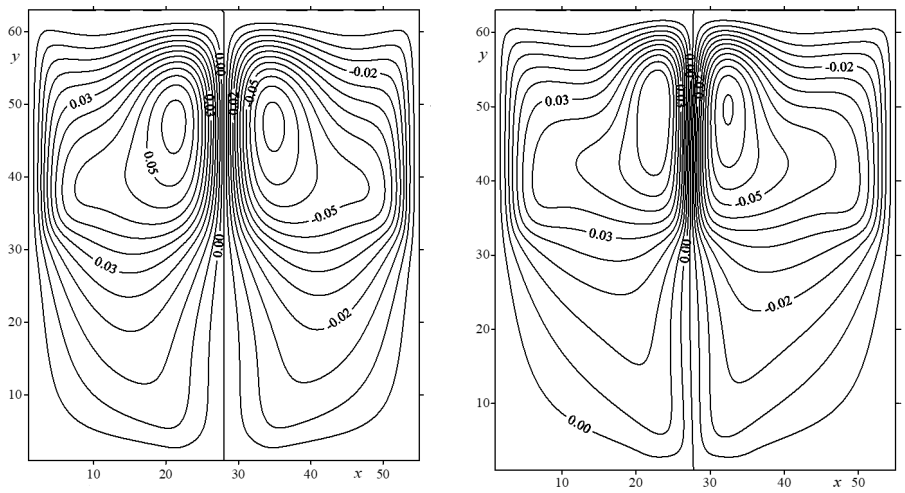


Рис. 2. Изолинии функций тока в полости при подогреве снизу локализованным источником тепла для больших значений пористости и проницаемости; а) граничные условия (1), б) новые граничные условия (2), (3)

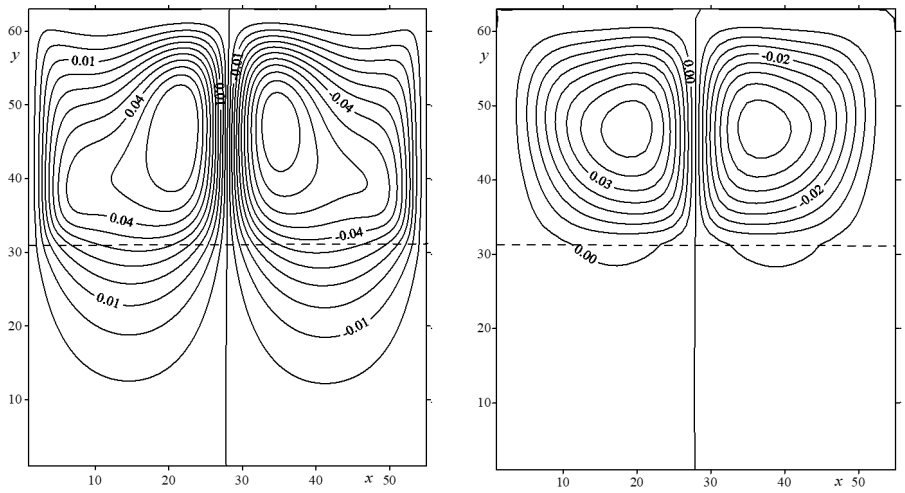


Рис. 3. Изолинии функций тока в полости при подогреве снизу локализованным источником тепла для малых значений пористости и проницаемости; а) граничные условия (1), б) новые граничные условия (2), (3); штриховой линией обозначена поверхность пористой среды

На рис. 3 показаны изолинии функции тока при малых значениях пористости $\phi = 0.2$, $Da = 1.1 \cdot 10^{-5}$ и прежних значениях числа Рэлея, Прандтля и относительного коэффициента теплоёмкости: $\mathrm{Ra} = 10^5$, $\mathrm{Pr} = 6.7$, $\eta = 0.8$. Как видно, при малых значениях пористости $\phi = 0.2$, $Da = 1.1 \cdot 10^{-5}$ появляется существенное различие в решениях. А именно, применение новых граничных условий обеспечивает в пористой прослойке фактически

кондуктивный (теплопроводный) режим переноса, тогда как конвективная струя формируется только в области свободной жидкости. И наоборот, использование классических условий непрерывности скоростей вызывает некорректно сильный восходящий конвективный факел сквозь всю толщу пористого материала, начиная со дна полости, что ожидаемо недопустимо для сред с низкой пористостью.

В итоге можно утверждать, что создание более универсальной модели, работающей во всем диапазоне изменения пористости, требует привлечения уравнений Бринкмана – Дюпюи – Форхгеймера. В асимптотическом пределе малых чисел Дарси применение этих уравнений в связке с предложенными в данной работе граничными условиями является безальтернативным требованием для обеспечения физической достоверности результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beavers G. S., Joseph D. D. *Boundary conditions at a naturally permeable wall.* J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Part. 1. P. 197–207.
2. Saffman P. G. *On the boundary conditions at the surface of a porous medium.* Studies in Applied Mathematics. 1971. V. 1. No. 2. P. 93–101.
3. Любимов Д. В., Муратов И. Д. *О конвективной неустойчивости жидкости в слоистой системе.* Сборник научных трудов «Гидродинамика». Изд-во Пермск. гос. пед. ин-та. 1977. С. 38–46.
4. Singh A. K., Thorpe G. R. *Natural convection in a confined fluid overlying a porous layer.* Indian J. Pure Appl. Math. 1995. No. 26(1). P. 81–95.
5. Astanina M. S., Sheremet M. A. *Natural convection of variable viscosity fluid in a partially porous cube having heat generating element under local thermal non-equilibrium model.* Transport in Porous Media. 2023. Art. 14.
6. Astanina M. S., Sheremet M. A., Umavathi J. C. *Unsteady natural convection in a partially porous cavity having a heat-generating source using local thermal non-equilibrium model.* Int. J. of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. 2019. V. 29. No. 6. P. 1902–1919.

АСИМПТОТИКА ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О ЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ, ПОРОЖДЁННЫХ ДВИЖУЩИМСЯ ПО ДНУ БАССЕЙНА ИСТОЧНИКОМ

С. Ю. Доброхотов

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

В докладе обсуждаются асимптотические решения, описывающие волны на воде, генерируемые источником, движущимся по дну водоёма. Полная система уравнений для волн на воде очень сложна и в настоящее время не имеет точного решения. Предполагая, что изменение функции дна происходит медленно, С. Ю. Доброхотов и В. Е. Назайкинский в статье [1] показали, что линеаризованная система уравнений гидродинамики сводится к псевдодифференциальному уравнению для поверхности жидкости, а неизвестной функцией в этом уравнении является высота свободной поверхности. Предполагается, что источник волн локализован вблизи точки, движущейся по дну бассейна со скоростью, меньшей скорости длинных волн. Также предполагается, что время движения источника и его горизонтальные размеры достаточно малы, и во время движения источник меняет свою форму и скорость. В одномерной модельной ситуации показано, что при некоторых условиях последнее предположение выполняется и при некоторых условиях приводит к возникновению волн на поверхности жидкости с длиной волны, приблизительно равной произведению типичной скорости длинных волн вблизи места, где перемещается источник, на время его перемещения, которое превышает размер источника. Таким образом, можно описать один из возможных механизмов возникновения так называемых оползневых волн цунами.

Доклад основан на совместной работе с П. Н. Петровым [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E. *Waves on the Free Surface Described by Linearized Equations of Hydrodynamics with Localized Right-Hand Sides.* RJMP. 2018. V. 25. № 1. P. 1–16.
2. Dobrokhotov S. Yu., Petrov P. N. *Asymptotics of Linear Surface Waves Generated by a Localized Source Moving Along the Bottom of the Basin. I. One-Dimensional Case.* RJMP. 2019. V. 26. № 1. P. 32–39.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ БАЛОК, КОЛЕЦ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН ИЗ УПРУГИХ ОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Н. А. Докукова, П. Н. Конон

Белорусский государственный университет, Минск

Комплексное технологическое проектирование в отраслях промышленного, гражданского, железнодорожного, авиа- и мостостроений, современных мобильных машин, виброизоляционных элементов, инженерных модулей тесным образом связано с математическим моделированием соответствующих видов гасителей динамических колебаний. В конструкциях этих агрегатов присутствуют: сайлентблоки, втулки, амортизаторы, демпферы, гидроопоры, пневмоподушки, пружины, рессоры. Все перечисленные компоненты участвуют в интенсивном движении, испытывая существенные знакопеременные нагрузки. Они способны гасить или минимизировать передачу высокоамплитудных колебаний, исходящих от источника, и подавлять низкие частоты. Наиболее эффективным является использование совокупности таких элементов, образующих один общий блок. Из них пассивные виброамортизаторы достойно занимают ведущие места в мировом автопроме по уровню себестоимости, простоты изготовления, экономичности, заменяемости. Механизм гашения вредных динамических воздействий связан не только с моделированием процесса виброизоляции и выбора физических свойств входящих в общий блок компонентов, но и с использованием упругих характеристик самих элементов, возможностью минимизировать их геометрические и физические параметры при осуществлении устойчивых колебаний на предельных нагрузочных режимах. Объектами исследований являются балки, кольца и цилиндрические пружины, их динамические состояния в составе общего блока, математические модели и аналитические расчётные формулы основных величин.

Математической моделью рессоры является плоский изгиб стержня с дискретно сосредоточенными массами, колебания которого совершаются в одной из главных плоскостей Oxy. В этой системе координат рассматривается известное уравнение изгибных колебаний балки [1]:

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu_0 EJ\frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} - \rho J\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \chi_a\frac{\partial w}{\partial t} = F(x,t), \tag{1}$$

полученное на основании модифицированного закона Гука относительно зависимости напряжения от деформации и её скорости в материале конструкции по предложенной гипотезе вязкого трения Фохта. Внешнее интенсивное усилие непрерывно по всей длине балки и распределяется по ней в виде пульсирующего нагрузочного режима, имеющего гармоническую зависимость по времени,

$$F(x,t) = q_1(x)\sin(kt) + q_2(x)\cos(kt) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i,t). \tag{2}$$

В точках сосредоточения дополнительные массы обладают той же инертностью, что и частицы балки,

$$f_i(x_i,t) = -m_i\frac{\partial^2 w(x_i,t)}{\partial t^2}\,. \tag{3}$$

Если нагрузочный режим $F(x,t)$ реализуется в виде бегущей волны с несколькими пучностями по длине балки, как на рис. 1, то он вызывает в её упругой структуре поперечные смещения точек в соответствии с конфигурацией вынужденных колебаний, изображённых на рис. 2. Развитие таких движений соответствует бегущей волне в жидких средах с весьма малыми амплитудами.

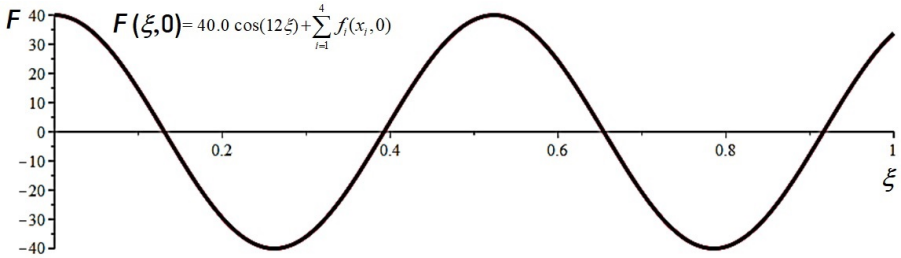


Рис. 1. Внешняя нагрузка непрерывно распределённая вдоль всей длины балки в начальный момент времени

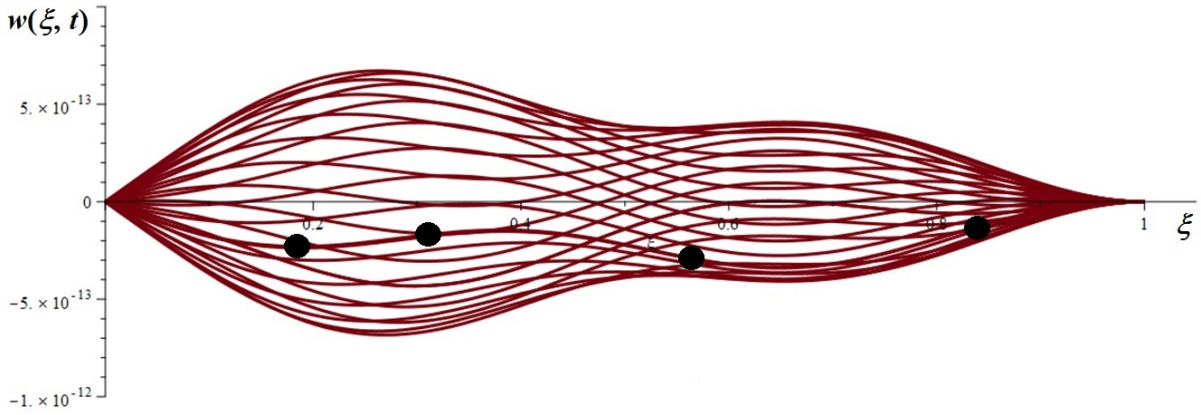


Рис. 2. Изгибные вынужденные упругие колебания средней линии балки с опертым левым концом и защемлённым правым, с дискретно сосредоточенными массами в различные моменты времени в течение одного периода колебаний

По уточнённой математической модели изгиба балки с учётом гипотезы вязкого трения Фохта были выведены уравнения динамических смещений стержней с учётом затуханий и разнообразными граничными условиями, найдены их аналитические решения, исследованы колебания балок с учётом затуханий во внутренней структуре упругого материала, проведены численные расчёты на основе математических моделей по выведенным аналитическим формулам, получены графические иллюстрации и анимации в формате gif. Из анализа проведённых численно-аналитических испытаний можно сделать вывод, что внешние нагрузки и сосредоточенные массы оказывают существенное влияние на изгибные колебания стержня.

Для другой механической схемы исследована динамика движений кольцевых и цилиндрических спиральных тел с пространственным равновесием бесконечно малого элемента проволоки с линейными соотношениями между перерезывающими силами и моментами. Установлены общие зависимости моментов, крутящих поперечные сечения и изгибающих срединную плоскость витка пружины, от перемещений и углов поворотов [2–4]. Представ-

лена математическая модель динамического деформируемого состояния изгиба в продольном направлении проволоки и кручения в поперечных сечениях витков упругой цилиндрической пружины [5–7]. Для смешанной задачи математической физики используются специальные граничные условия: верхнее сечение пружины считается жёстко защемлённым, противоположный конец колеблется с постоянной скоростью по гармоническому закону.

Динамические уравнения движений элементарного объема пружины таковы:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4} - \frac{GJ_k}{EJ_1R}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \frac{m_0R^3}{EJ_1}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(1+\frac{GJ_k}{EJ_1}\right)\frac{\partial^2\beta}{\partial\varphi^2} + \frac{m_0R^3r}{EJ_1}\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} = \psi_1\sin(\eta\varphi)\cos(pt), \quad (4)$$

$$\left(1+\frac{GJ_k}{EJ_1}\right)\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} - \frac{GJ_k}{EJ_1}\frac{\partial^2\beta}{\partial\varphi^2} + \beta = \psi_2\sin(\eta\varphi)\sin(pt). \quad (5)$$

Получены конечные аналитические формулы для законов смещений и поворотов поперечных сечений витков пружины из однородного упругого материала. Формулы используются для нахождения значений компонент тензора деформации. Наблюдается видимое кручение поперечных сечений в витках пружины и смещение самой пружины с изменением внешней формы её однородно упругого материала (рис. 3), для кольца на рис. 4 показана картина деформаций.

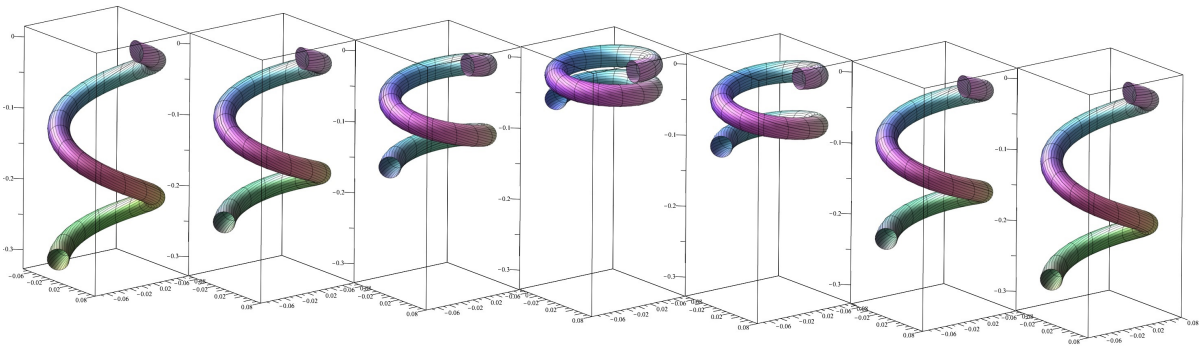


Рис. 3. Изгибно-крутильные смещения витков цилиндрической спиральной пружины

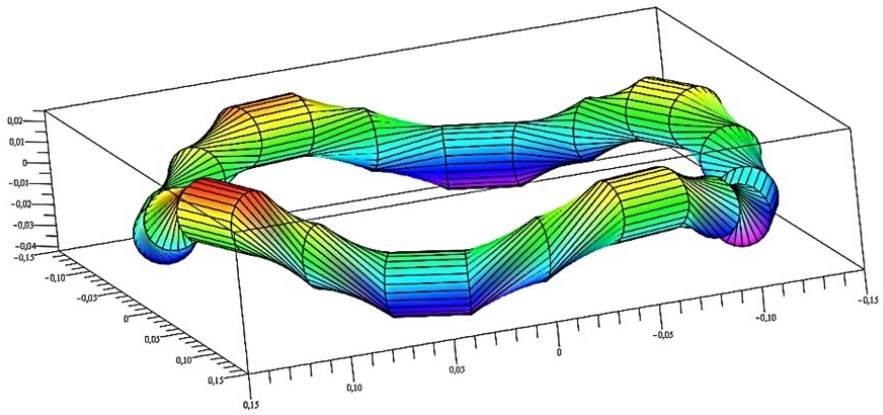


Рис. 4. Пространственное напряжённо-деформированное состояние кольца с его смещениями в момент времени 0,1 с

Выведены уравнения динамических состояний упругих стержней, колец и витых цилиндрических пружин, нагруженных в изгибных и продольных плоскостях и закрученных в поперечных сечениях неравномерно-распределёнными моментами. Разработана методика аналитических расчётов и исследований напряжённо-деформируемых состояний. Для этих целей полностью проинтегрированы смешанные задачи математической физики.

Представленные математические модели в виде систем неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных имеют существенные уточнения и дополнены специальными внешними нагрузочными режимами. Полученные аналитические решения полностью удовлетворяют поставленным начально-краевым задачам и частотным уравнениям.

Результаты аналитических расчётов и выведенные формулы динамики напряжённо-деформируемых состояний упругих балок, кольцевых и витых цилиндрических объектов могут быть использованы в биомеханике, медицине, двигателестроении, строительстве, электротехнике, радиотехнике.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ Республики Беларусь «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР «Исследования инновационных способов проектирования асимптотически устойчивых компонентов амортизаторов и гидроопор машиностроительной техники, разработка теоретических основ и развитие методологии управления их эксплуатационными свойствами».

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А. П. *Колебания деформируемых систем.* М. : Машиностроение, 1970. 736 с.
2. Алфутов Н. А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем.* М. : Машиностроение, 1978. 312 с.
3. Балабух Л. И. *Строительная механика ракет: Учебник для машиностроительных спецвузов.* М. : Высшая школа, 1984. 391 с.
4. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний.* М. : Высшая школа, 1980. 408 с.
5. Высоцкий М. С., Докукова Н. А., Конон П. Н. *Метод исследования механических колебательных систем с помощью дифференциальных операторов.* Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2006. № 50(1). С. 114–119.
6. Dokukova N. A., Kaftaikina E. N., Zenkovich V. V. *General patterns of improper vibrations of dynamical systems with arbitrary number of degrees of freedom.* News on the Scientific Progression-2011: materials for 7 International scientific practical conference. Sofia: White City, 2011. V. 9. P. 56–64.
7. Dokukova N. A., Kaftaikina E. N., Konon P. N. *One method for solving the dynamics of bending and twisting of the ring.* Materialy VII mezinarodni vedescko-practicka konference. Praha, Ceska Republika : Publishing House «Education and Science», 2011. V. 11. P. 3–9.

ОДНОСТОРОННИЙ КОНТАКТ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ВХОДЯЩИМ УГЛОМ

А. А. Дуркин

Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина

Контактные задачи для пластин с заранее неизвестной областью взаимодействия давно изучаются в механике деформируемого твёрдого тела [1]. Для канонических форм развиты аналитические и полуаналитические подходы. Области неканонического очертания, прежде всего, содержащие входящие углы, изучены заметно меньше. Мало исследованы, в частности, топология зоны контакта и роль уточнённых теорий пластин. В докладе рассматривается односторонний контакт пластины, содержащей входящий угол, с жёстким основанием. Геометрия описывается методом R-функций В. Л. Рвачёва [2], краевые задачи решаются методом Ритца, а свободная граница зоны контакта находится методом обобщённой реакции [3]. Сравниваются классическая теория изгиба и уточнённая теория типа Кармана – Тимошенко – Нагди (КТН) [4], учитывающая поперечный сдвиг и поперечное обжатие.

Постановка задачи. Тонкая упругая пластина занимает в плане область Ω. Под ней с зазором δ расположено жёсткое плоское основание. Прогиб w удовлетворяет уравнению

$$D\,\Delta^2 w = q_0 - r, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

где D – цилиндрическая жёсткость, q_0 – заданная нагрузка, r – реакция основания. Реакция отлична от нуля лишь в зоне контакта, которая заранее неизвестна. Контакт односторонний и подчинён условиям Синьорини

$$w \le \delta, \quad r \ge 0, \quad r\,(w-\delta) = 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{2}$$

На границе области приняты условия мягкого шарнирного опирания $w = \Delta w = 0$. Об особенностях этой постановки на областях с входящим углом см. [5]. Здесь обе теории сравниваются при одних и тех же краевых условиях. В теории КТН условие непроникания относится к прогибу лицевой поверхности пластины. Необходимые соотношения приведены в [4].

Метод решения. Область задаётся неявно функцией $\omega(x,y)$, положительной внутри Ω и равной нулю на границе. Составные области получаются R-операциями над функциями примитивов. Например, L-образная область, объединение двух взаимно перпендикулярных полос Π_1 и Π_2, описывается R-дизъюнкцией

$$\omega = \omega_1 \vee_0 \omega_2 \equiv \omega_1 + \omega_2 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\,, \tag{3}$$

где ω_1 и ω_2 – нормализованные функции полос. Решение ищется в виде структуры $w = \omega\Phi$, которая точно удовлетворяет условию $w = 0$ на границе любой формы. Неопределённая компонента Φ представляется двойным рядом по полиномам Чебышёва. Замена $M = -D\Delta w$ сводит задачу (1) при мягком опирании к двум задачам Пуассона, решаемым последовательно. Каждая из них решается методом Ритца. Интегралы вычисляются по гауссовой сетке охватывающего прямоугольника, узлы отбираются по знаку ω. Матрица

Ритца симметрична и положительно определена, её разложение Холецкого выполняется один раз.

Реакция уточняется итерациями метода обобщённой реакции

$$r_{n+1} = \big[\, r_n + \alpha\,(w_n - \delta)\,\big]_+, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где w_n – прогиб, отвечающий нагрузке $q_0 - r_n$. В теории КТН берётся лицевой прогиб. Через $[\,\cdot\,]_+$ обозначена положительная срезка, α – итерационный параметр. Обоснование сходимости метода дано в [3]. Реакция входит только в правую часть, поэтому каждая итерация сводится к обратной подстановке при готовой факторизации.

Контакт в классической постановке. Расчёты выполнены авторским открытым комплексом программ [6]. Все величины безразмерные. Рассматривается L-образная пластина, полученная из единичного квадрата удалением четверти $x \geq 0.5$, $y \geq 0.5$. Вершина входящего угла находится в точке (0.5, 0.5). Нагрузка равномерная, $q_0 = 4$. Зазор $\delta = 5.04 \cdot 10^{-5}$ равен половине наибольшего прогиба свободной пластины. Сетка квадратур содержит 10 800 узлов в Ω. За восемь тысяч итераций (4) невязка контактных условий монотонно уменьшилась более чем на три порядка, реакция всюду неотрицательна, а наибольший прогиб под зоной контакта $5.06 \cdot 10^{-5}$ отличается от зазора менее чем на полпроцента. Сама зона контакта занимает 67 узлов и многосвязна. Она распадается на три отдельных пятна, вытянутых дугой вблизи входящего угла (рис. 1, слева). Пик реакции достигается не в вершине угла, где прогиб равен нулю и контакт невозможен, а на кромке ближайшего к вершине пятна. Подобная концентрация давления на кромке известна по задачам о жёстком штампе [1].

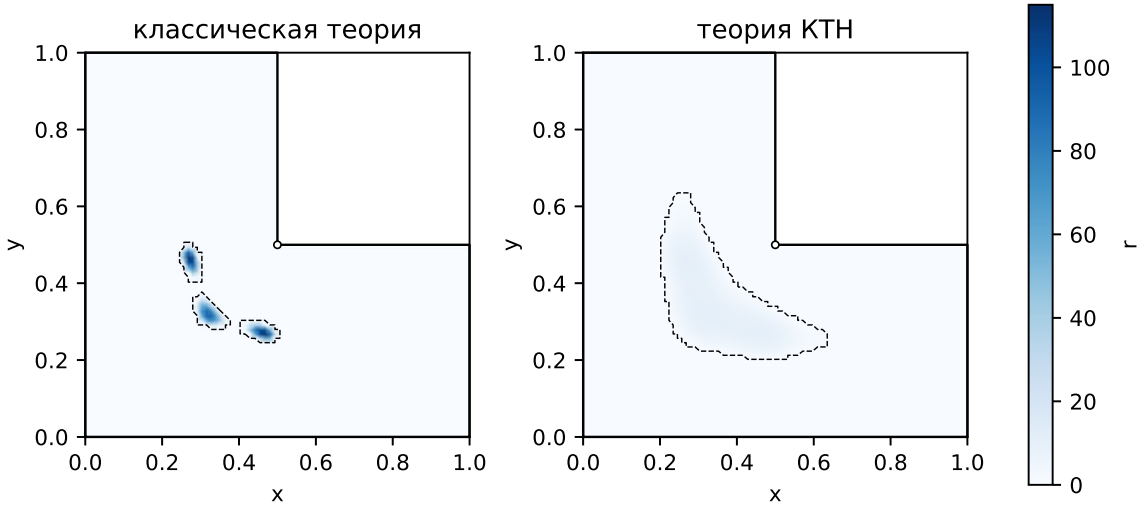


Рис. 1. Контактная реакция r по классической теории (слева) и по теории КТН (справа) в единой цветовой шкале. Штриховая линия ограничивает зону контакта, кружок показывает вершину входящего угла. Расчёт выполнен комплексом [6]

Влияние поперечных сдвига и обжатия. Та же задача решена по линейной теории КТН при относительной толщине $h = 0.06$, около 0.12 ширины ветви. Кривизна, входящая в поправочные члены, берётся из расщепления и численного дифференцирования не требует. Итоги сопоставления сведены в таблицу.

Величина	Классическая	КТН	Отношение
Пик реакции $r_{\max}$	$112,6$	$10,7$	$0,095$
узлов в зоне контакта	67	519	$7,75$
наибольший прогиб	$5,06 \cdot 10^{-5}$	$6,18 \cdot 10^{-5}$	$1,22$

Учёт податливости лицевой поверхности заметно меняет картину контакта. Пик реакции падает на порядок. Зона контакта расширяется почти в восемь раз и сливается в одно пятно (рис. 1, справа), а распределение реакции становится существенно более гладким. Пластина в целом делается податливее, наибольший прогиб возрастает на 22 %. При уменьшении толщины эффект ослабевает и к $h = 0.02$ практически исчезает.

Заключение. Сочетание R-функций, метода Ритца и метода обобщённой реакции даёт единый инструмент расчёта одностороннего контакта пластин на областях неканонического очертания. Нетривиальная топология зоны контакта у входящего угла, включая её многосвязность, воспроизводится без сеточной подгонки под форму области. Уточнённая теория КТН не только корректирует прогиб, но и регуляризует контактную реакцию, вплоть до слияния зоны в одно пятно. Вычислительная схема реализована автором как открытый комплекс программ [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Толкачёв В. М. *Контактные задачи теории пластин и оболочек.* М. : Машиностроение, 1980. 415 с.
2. Рвачёв В. Л. *Теория R-функций и некоторые её приложения.* Киев : Наукова думка, 1982. 551 с.
3. Михайловский Е. И., Тарасов В. Н. *О сходимости метода обобщённой реакции в контактных задачах со свободной границей.* ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.
4. Михайловский Е. И., Бадокин К. В., Ермоленко А. В. *Теория изгиба пластин типа Кармана без гипотез Кирхгофа.* Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 1999. Вып. 3. С. 181–202.
5. Babuška I., Pitkäranta J. *The plate paradox for hard and soft simple support.* SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. No. 3. P. 551–576.
6. Дуркин А. А. *plate-solver: комплекс программ для расчёта изгиба и одностороннего контакта упругих пластин произвольного очертания.* Версия 0.6.2. Zenodo, 2026.

ПОСТАНОВКА И АНАЛИЗ САМОСОГЛАСОВАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ БАЛКИ ТИМОШЕНКО, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, С ДВИЖУЩИМСЯ ВЫСОКОСКОРОСТНЫМ ОБЪЕКТОМ

В. И. Ерофеев, Е. Е. Лисенкова, С. И. Герасимов

Центр машиноведения ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова – Грехова РАН», Нижний Новгород

Из недавней истории известно, что высокоскоростное движение наземного транспорта сопровождалось рядом неприятных эффектов, к числу которых были отнесены: связь между увеличением на 10 % скоростей движения по скоростным магистралям Германии, увеличением, продиктованным ростом пассажирских потоков в период летних отпусков в 1995 г., и выходом из строя больших участков пути; невозможность движения с проектными скоростями в период дождей по скоростной дороге Франции из-за непредусмотренного резкого возрастания силы сопротивления движению; «провал» широко разрекламированного проекта скоростной магистрали под Ламаншем, вылившийся в остановку движения и долгую, дорогостоящую реконструкцию.

Причина этих и аналогичных неприятностей заключалась в том, что разработчики и создатели надёжного и рентабельного скоростного наземного транспорта при проектировании уделяли внимание, в основном, вопросам статической прочности, в ущерб динамическим процессам, связанными с эффектами волнообразования при движении объектов по упругим направляющим [1–3].

В настоящей работе рассматривается динамическое поведение балки модели Тимошенко (упругая направляющая) и безотрывно движущегося вдоль неё высокоскоростного сосредоточенного механического объекта. Предполагается, что балка опирается на сплошное нелинейно-упругое основание, а объект имеет внутренние степени свободы. Для самосогласованной задачи динамики одномерной упругой системы, когда закон движения объекта не задан, получены корректные краевые условия, правильно учитывающие силы взаимодействия, вызванные относительным движением. Выведены локальные и глобальные законы изменения энергии и волнового импульса. Обсуждаются условия излучения в рассматриваемом классе систем. Выявлена принципиальная возможность преобразования энергии колебаний балки в энергию поступательного движения объекта и наоборот. Посредником этого преобразования выступает сила, обусловленная давлением изгибных волн. Как показали конкретные оценки, при высокоскоростном движении учёт инерционных сил, вызванных относительным движением, и сил давления упругих волн принципиально необходим. Проводится расчёт дисперсионных характеристик изгибных волн, и установлена возможность существования обратных волн, характеризующихся противоположно направленными фазовой и групповой скоростями. Исследуются вопросы распространения волн и возникновения модуляционной неустойчивости в зависимости от соотношений между параметрами балки и нелинейно-упругого основания. В случае малой жёсткости балки, по сравнению с линейной жёсткостью основания, для эволюционного уравнения, представляющего модифицированное уравнение Островского с кубично-нелинейным слагаемым, получены точные солитонные решения из класса стационарных волн в виде кинка и антикинка.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 26-19-00532, https://rscf.ru/project/26-19-00532/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Весницкий А. И. *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками.* М. : Физматлит, 2001. 320 с.
2. Весницкий А. И. *Избранные труды по механике.* Нижний Новгород : Изд-во «Наш дом», 2010. 248 с.
3. Герасимов С. И., Ерофеев В. И., Лисенкова Е. Е. *Волновая динамика упругих систем, взаимодействующих с высокоскоростными объектами.* Саров : Изд-во РФЯЦ–ВНИИЭФ, 2025. 168 с.

О ДИНАМИЧЕСКОМ РАЗРУШЕНИИ ГЕОМАТЕРИАЛОВ БЛОЧНОГО СТРОЕНИЯ С ТОНКИМИ ПРОСЛОЙКАМИ

Е. А. Ефимов

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Концепция блочной иерархической структуры горных пород была разработана М. А. Садовским [1]. Согласно данной концепции порода состоит из вложенных друг в друга блоков, которые разделяются между собой тонкими ослабленными трещиноватыми прослойками со сложной реологией. Блоки размерами от нескольких миллиметров до сотен метров были классифицированы по различным масштабным уровням [2].

Существуют различные математические модели блочных сред: дискретно-периодические с жёсткими блоками, непрерывные осреднённые; с тонкими прослойками, заданными в виде внутренних граничных условий для блоков. На основе последних были разработаны комплексы программ, позволяющие рассчитывать распространение волн в средах с прослойками с учётом вязкоупругости, пластичности, пористостиь и разномодульности. В работе [3] были изучены волны разрушения, распространяющиеся вдоль прослоек в телах с предварительными самоуравновешенными напряжениями.

В докладе рассматривается задача о динамическом разрушении образца породы в пространственной постановке. Предполагается, что разрушение происходит в межблочных прослойках. Численно моделируется эксперимент с кубическом образцом, который помещён в установку со стержнями Гопкинсона, в которой реализуется трёхосное сжатие. Рассматриваются различные критерии разрушения и виды динамического нагружения, приводится сравнение с экспериментом, проведённым другими авторами [4].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2026-735).

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский М. А. *Естественная кусковатость горной породы.* ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 4. С. 829–832.
2. Опарин В. Н., Танайно А. С. *Представление размеров естественных отдельностей горных пород в канонической шкале.* ФТПРПИ. 2009. № 6. С. 40–53.
3. Садовский В. М., Садовская О. В. *Численное моделирование волн разрушения в блочной среде.* ЖВМиМФ. 2026. Т. 66. № 6. С. 923–936.
4. Liu K., Zhang Q. B., Wu G. [et al.] *Dynamic mechanical and fracture behaviour of sandstone under multiaxial loads using a triaxial Hopkinson bar.* Rock Mech Rock Eng. 2019. V. 52. P. 2175–2195.

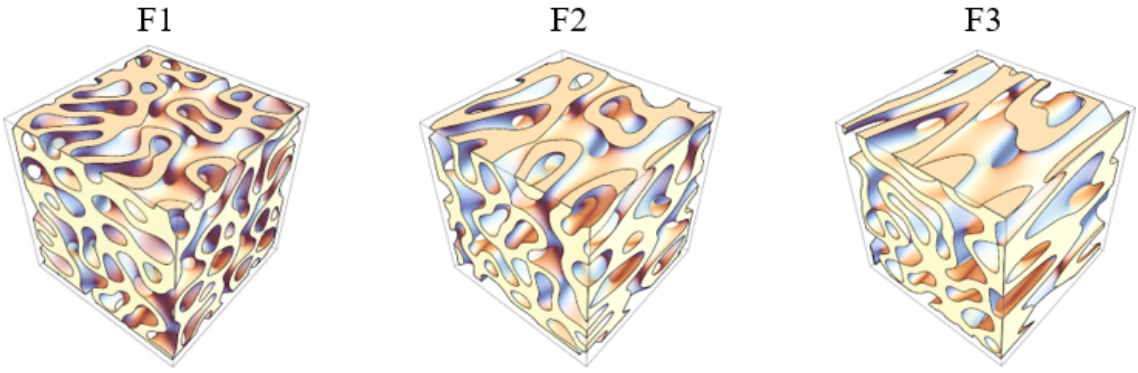
ВЛИЯНИЕ МОРФОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СКАФФОЛДОВ НА ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С КОСТНОЙ ТКАНЬЮ

В. М. Затонская, Н. В. Еленская, М. А. Ташкинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Для замещения костной ткани разрабатываются скаффолды – трёхмерные пористые структуры, способствующие росту новых клеток и формированию тканей, физико-механические свойства которых должны быть идентичны свойствам замещаемого фрагмента. Существуют различные концепции дизайна таких структур, одним из которых является подход, основанный на применении трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП).

Целью данной работы являлось исследование влияния морфометрических характеристик ТПМП-скаффолдов на их контактное взаимодействие с костной тканью. Для достижения цели были спроектированы 3 структуры с геометрией на основе поверхности типа «Fischer-Koch S» в базовой периодической форме и с различной степенью анизотропии. Анизотропия механических свойств скаффолда достигалась за счёт искажения геометрии ячейки в одном из направлений периодичности (см. рисунок). Для оценки влияния морфометрических характеристик на площадь контакта с костной тканью на основе представленных структур были дополнительно построены скаффолды с масштабированной элементарной ячейкой.



Для всех спроектированных структур прогнозировалось механическое поведение системы «кость-имплантат» в условиях свободного и стеснённого сжатия. Для определения влияния архитектурной анизотропии на механические характеристики скаффолдов проводилась оценка упругого отклика в трёх взаимно ортогональных направлениях. Анализировалось влияние площади контактной поверхности скаффолда на механический отклик системы, который оценивался на основе данных о распределении напряжений в системе в целом и в области контактного взаимодействия. Взаимодействие с фрагментом костной ткани моделировалось в условиях скользящего контакта. Задача решалась с применением метода конечных элементов, скаффолд и фрагмент костной ткани моделировались как трёхмерные объекты.

В ходе исследования было показано, что архитектурная анизотропия приводит к повышению эффективной жёсткости скаффолда, что необходимо учитывать для эффективного

замещения повреждённого участка костной ткани. Продемонстрировано влияние варьирования морфометрических параметров скаффолдов на характер распределения напряжений по объёму структуры. Результаты исследования расширяют возможности проектирования персонифицированных имплантатов для замещения костной ткани.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-79-00308-П, https://rscf.ru/project/25-79-00308-П/.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДОВ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ В СТАТИКЕ АРОЧНЫХ ЦЕПЕЙ

А. В. Иванов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Введение. Численное моделирование поведения упругих систем связано с решением систем нелинейных алгебраических уравнений вида $F(X) = 0$. Использование классического метода Ньютона в таких задачах часто затруднено из-за наличия критических точек, зон неустойчивости и локального вырождения матрицы Якоби. Эффективным инструментом преодоления этих вычислительных трудностей являются методы доверительной области (Trust Region) [1], которые за счёт ограничения шага радиусом Δ обеспечивают стабильную сходимость.

В данной работе эти алгоритмы применяются к задаче статики регулярной плоской арочной цепи, состоящей из n шарнирно соединённых упругих стержней–звеньев. Нелинейные уравнения формируются из условий баланса внутренних и внешних сил для каждого подвижного внутреннего узла i ($i = 1, 2, ..., n-1$), образуя систему из $k = 2(n-1)$ уравнений.

Постановка задачи. Рассматривается регулярная плоская арочная цепь, состоящая из n шарнирно соединённых упругих стержней–звеньев общей длиной L. Крайние опоры конструкции шарнирно закреплены в точках A и B и перемещений не имеют. На каждый из $n-1$ свободных внутренних узлов действует сосредоточенная вертикальная сила P, направленная строго вниз. Вектор состояния системы размерности k формируется поузловым чередованием неизвестных: $X = [u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}]^T$, где u_i и v_i – горизонтальное и вертикальное смещение i-го узла соответственно.

Нелинейная система алгебраических уравнений статики $F(X) = 0$ строится на основе метода сил [2]. Для каждого подвижного узла i записываются условия статического равновесия – равенство нулю суммы проекций всех внешних и внутренних сил в текущем деформированном состоянии конструкции. Внутренние продольные усилия T_m, возникающие в стержнях с жёсткостью EA, определяются линейным законом Гука с учётом больших перемещений:

$$T_m = \frac{EA}{L_m}\,(l_m - L_m), \tag{1}$$

где L_m – первоначальная длина стержня в недеформированном состоянии, а l_m – его текущая деформированная длина.

Для составления уравнений равновесия в деформированном состоянии вводятся направляющие косинусы, $\cos\alpha_m = (x_{m+1} - x_m)/l_m$, и синусы, $\sin\alpha_m = (y_{m+1} - y_m)/l_m$, углов наклона звеньев к горизонтальной оси, где x_m, y_m – текущие координаты узлов. Рассматривая изолированный узел i, в котором сходятся стержни i и $i+1$, запишем условия равенства нулю суммы проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси координат:

$$F_{2i-1}(X) = T_{i+1}\cos\alpha_{i+1} - T_i\cos\alpha_i = 0, \tag{2}$$

$$F_{2i}(X) = T_{i+1}\sin\alpha_{i+1} - T_i\sin\alpha_i - P_i = 0. \tag{3}$$

Текущие координаты x_i, y_i однозначно определяются через начальную геометрию системы и компоненты смещений u_i, v_i из вектора состояния X. Таким образом, для всей цепи формируется система из $k = 2(n-1)$ нелинейных уравнений вида (2) и (3).

Методы решения. Для численного решения полученной нелинейной системы уравнений в работе сравниваются три оптимизационных подхода. Строится функция невязки системы $f(X) = 2^{-1}\|F(X)\|_2^2$ и ищется её минимум. Базовым математическим аппаратом, обеспечивающим преодоление зон неустойчивости и прохождение точек вырождения матрицы Якоби, выступает стратегия доверительной области (Trust Region) [1,3]. На каждой итерации процесса вместо функции невязки формируется и минимизируется её локальная квадратичная модель. При этом шаг ограничен текущим значением Δ_k.

Первым исследуемым алгоритмом является метод Dogleg [1], в котором вектор перемещения ищется в виде кусочно-линейной траектории, соединяющей градиентное направление наискорейшего спуска и классическое направление Ньютона. Вторым подходом является метод Море – Соренсена [4], который находит точное решение подзадачи минимизации на самой границе доверительной сферы. Для этого алгоритм на каждой внутренней итерации использует одномерный метод Ньютона для подбора корректирующего множителя Лагранжа λ и выполняет разложение Холецкого для матрицы системы. Третьим алгоритмом является адаптивный метод Ньютона с процедурой ограничения шага, в котором классический ньютоновский шаг на каждой текущей итерации ограничивается по длине радиусом доверительной области Δ_k, что позволяет стабилизировать траекторию сходимости.

Для устойчивости расчётов начальный радиус выбирается адаптивно. Его стартовое значение Δ_0 вычисляется по норме первого ньютоновского шага $\|p_N\|_2$, что согласуется с классическими рекомендациями [5]. При этом радиус жёстко ограничивается сверху фиксированным порогом $\Delta_{\max}$, чтобы исключить слишком большие шаги: $\Delta_{adaptive} = \min(\Delta_{\max}, \|p_N\|_2)$.

Основным критерием успешного завершения расчёта во всех трёх методах является достижение заданной точности по норме градиента функции потерь $\|g\|_2 < \varepsilon$. Если алгоритм не может найти шаг для уменьшения невязки, срабатывает альтернативный критерий остановки по критическому уменьшению радиуса доверительной области до величины $\Delta < 10^{-25}$.

Численные эксперименты. В данном эксперименте изучаются основные показатели эффективности реализованных методов для разных размерностей разбиения цепи: $n = 3, 7, 11, 51, 91, 111$ и соответственно $k = 4, 12, 20, 100, 180, 220$. На каждый свободный узел действует постоянная вертикальная нагрузка $P = 10000$ Н.

Результаты проведённых вычислительных экспериментов представлены на рис. 1–3. Согласно [1], метод Море – Соренсена должен работать эффективнее на небольших размерностях нелинейных систем, так как он находит точный шаг на границе доверительной сферы. В наших экспериментах это предположение подтверждается только на самой маленькой сетке при $n = 3$ ($k = 4$). Из графиков на рис. 1 и рис. 2 видно, что при такой размерности метод Море – Соренсена сходится быстрее всех – всего за 21 итерацию. По данным рис. 3 он также лидирует по скорости, затрачивая всего 0.0041 с, в то время как методу Dogleg требуется 0.0042 с, а адаптивному методу Ньютона — 0.0051 с.

При дальнейшем уменьшении шага сетки ситуация полностью меняется. Начиная с размерности $n = 7$ ($k = 12$) и далее вплоть до $k = 220$, метод Море – Соренсена сильно уступает остальным алгоритмам. На рис. 1 видно, что на самых первых итерациях этот метод даёт наиболее быстрое уменьшение невязки по сравнению с конкурентами. Однако

после этого быстрого спуска алгоритм попадает в область, где скорость сходимости резко падает. На рис. 2 отчётливо видно, что из-за замедления процесса радиус доверительной области сжимается, и методу Море – Соренсена приходится тратить сотни итераций на горизонтальном плато на уровне 10^{-3}, чтобы заново увеличить Δ до рабочих значений.

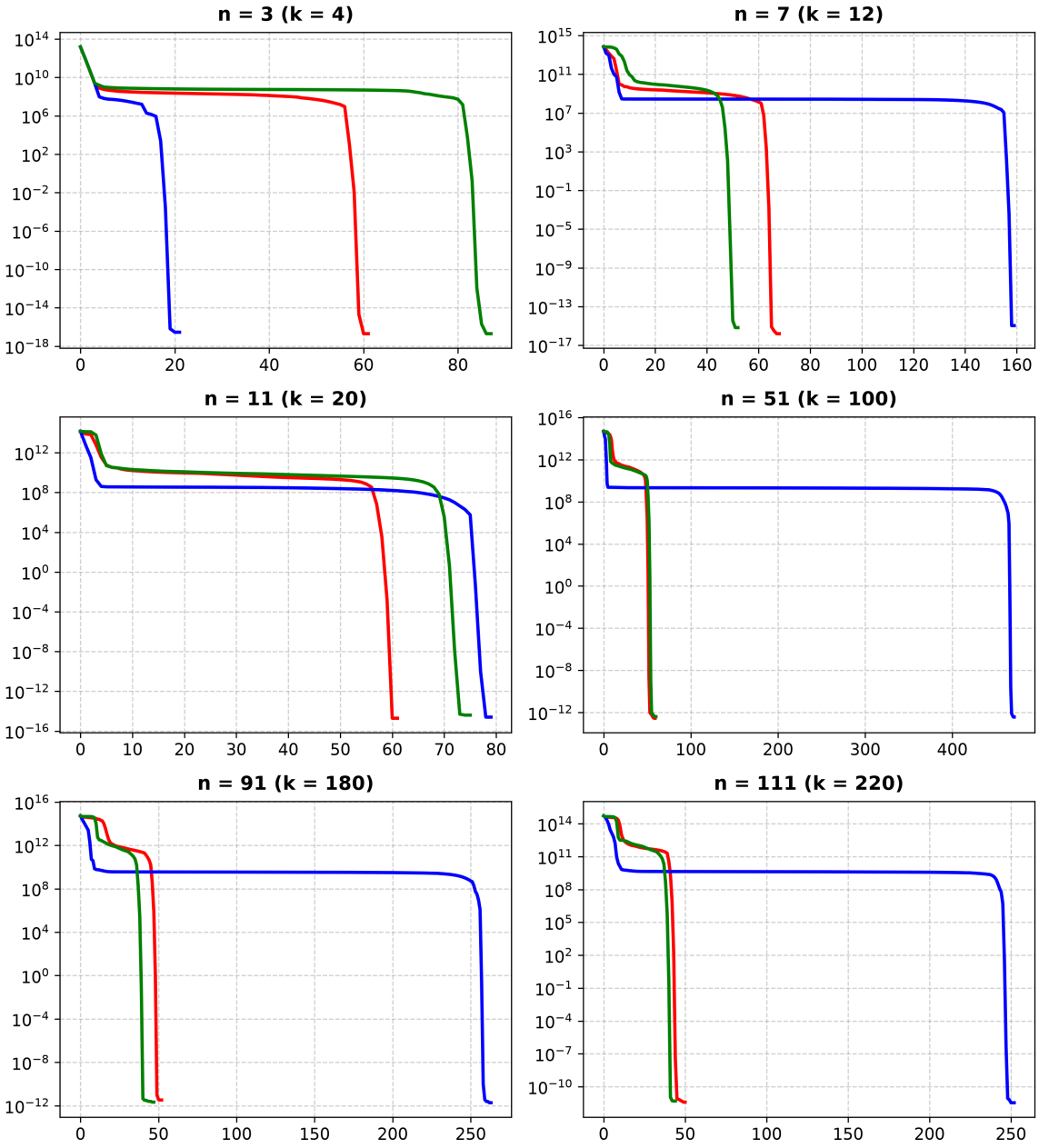


Рис. 1. Зависимость невязки целевой функции от номера итерации для различных размерностей сетки (красная линия – Dogleg, синяя – метод Море – Соренсена, зелёная – адаптивный метод Ньютона)

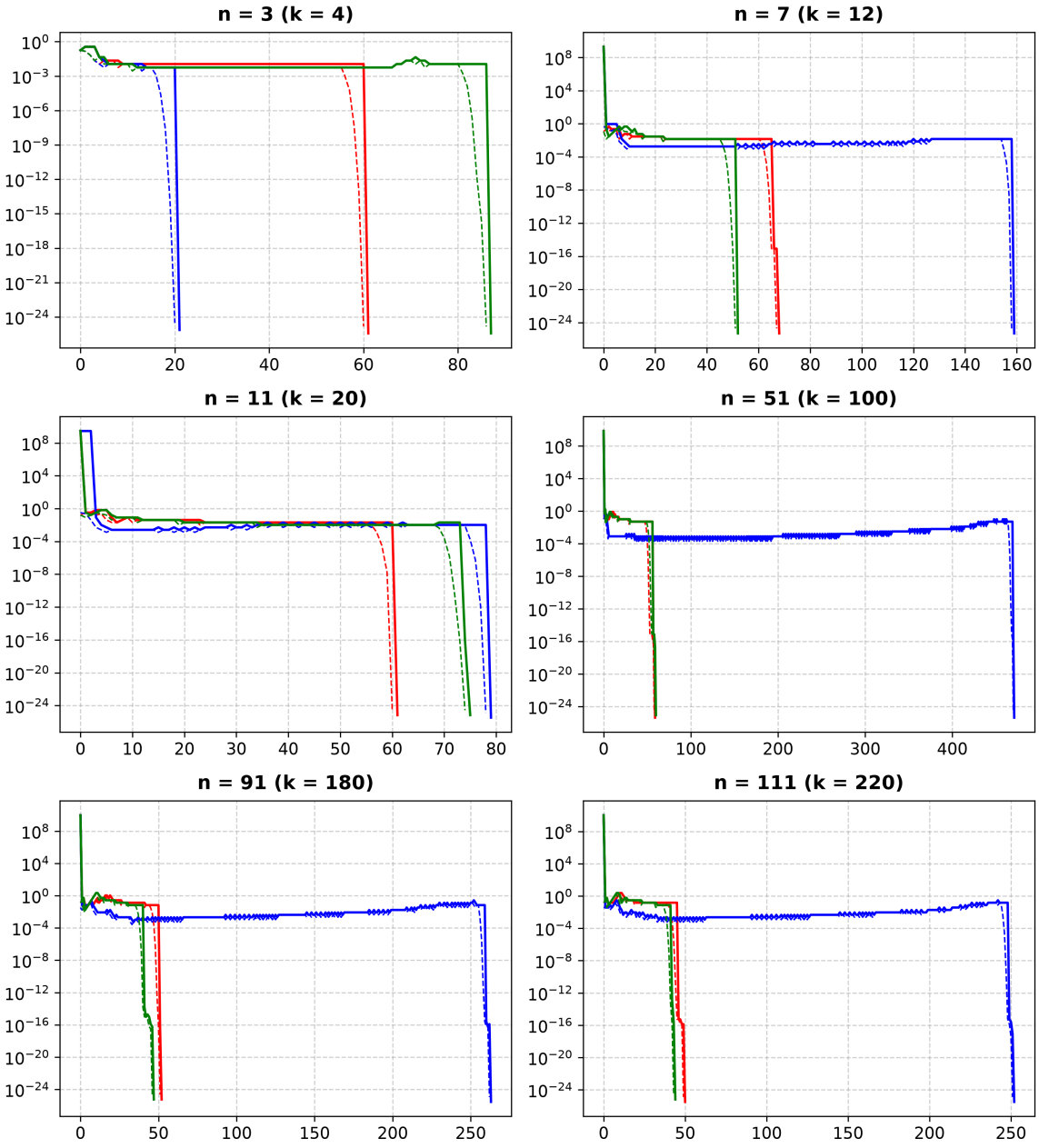


Рис. 2. Зависимость радиусов доверительной области и норм шагов от номера итерации для различных размерностей (сплошная линия – радиус Δ_k, пунктирная – норма шага $\|p_k\|_2$; красные линии – Dogleg, синие – метод Море – Соренсена, зелёные – адаптивный метод Ньютона)

Только после этого возврата к большим радиусам алгоритм находит решение. В результате количество его итераций возрастает до 159 при $k = 12$ и достигает 471 при $k = 100$.

В то же время метод Dogleg и адаптивный метод Ньютона показывают высокую стабильность. На рис. 2 видно, что их радиусы доверительной области не зажимаются на малых значениях, а остаются довольно большими, что позволяет алгоритмам быстрее прийти к решению. При размерности $k = 100$ им требуется 59 и 60 итераций, а при максимальной размерности $k = 220$ они находят решение всего за 50 и 44 итерации соответственно.

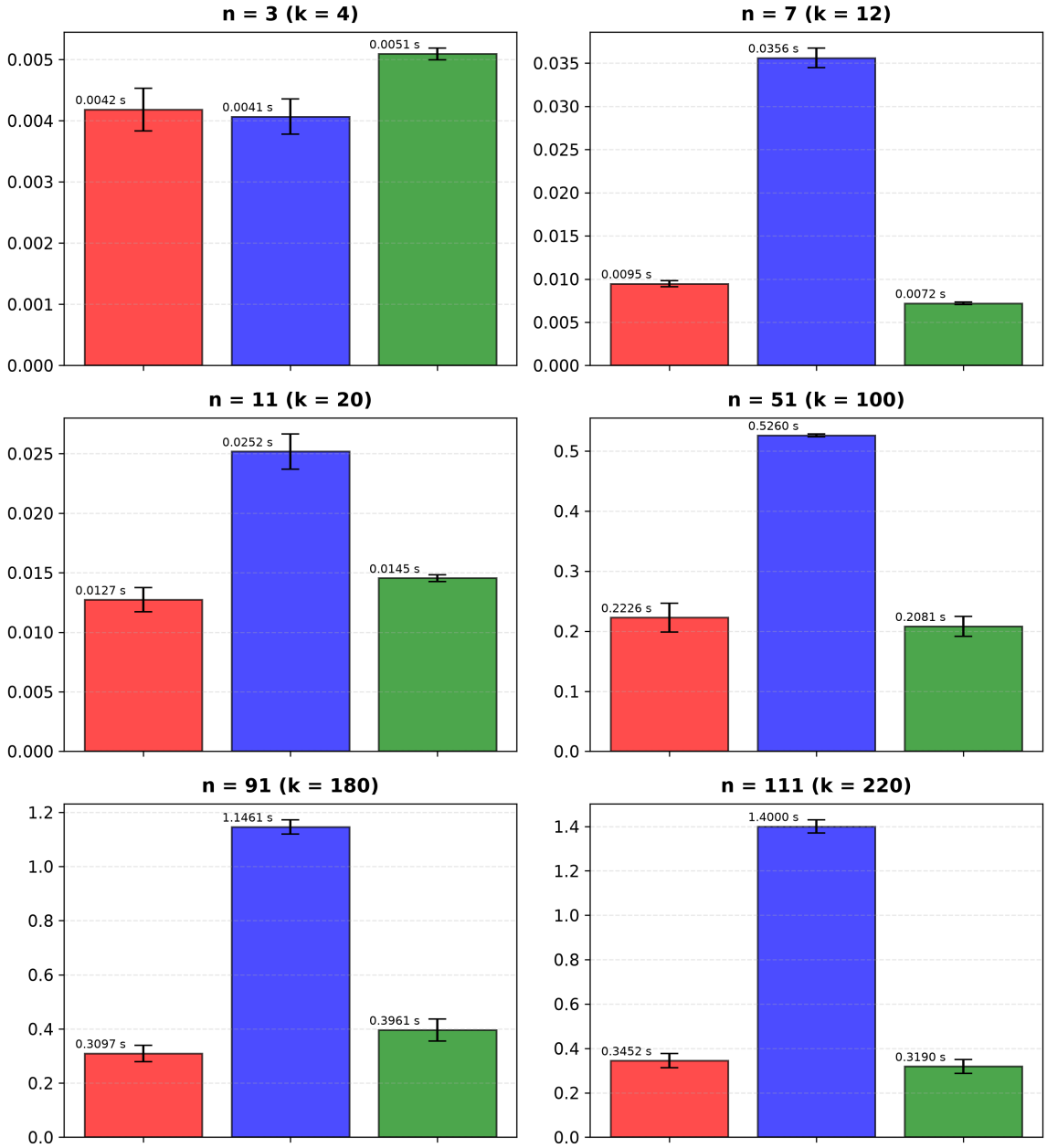


Рис. 3. Гистограмма времени выполнения расчётов в секундах со стандартным отклонением при усреднении по 50 запускам для всего диапазона размерностей сетки (красные столбцы – Dogleg, синие – метод Море – Соренсена, зелёные – адаптивный метод Ньютона)

Анализ гистограмм на рис. 3 подтверждает, что из-за затяжного плато метод Море – Соренсена с ростом размерности начинает сильно проигрывать по чистому времени счёта. При $k = 12$ он требует 0.0356 с (против 0.0072 с у адаптивного Ньютона), при $k = 100$ ему необходимо 0.5260 с, а при максимальной размерности $k = 220$ время возрастает до 1.4000 с. Этот результат объясняется тем, что для подбора параметра λ метод Море – Соренсена на каждой внутренней итерации вынужден многократно вычислять тяжёлое разложение Холецкого. Метод Dogleg (0.3452 с при $k = 220$) и адаптивный метод Ньютона (0.3190 с) на больших размерностях сетки оказываются быстрее более чем в 4 раза за счёт значительно более дешёвой стоимости одной итерации.

Заключение. Проведённое исследование показало, что применение метода Море–Соренсена для расчёта статики арочной цепи оказывается неэффективным. Несмотря на точные шаги на малых размерностях, при измельчении сетки этот метод застревает на длинных итерационных плато и кратно проигрывает по времени счёта из-за тяжёлых внутренних факторизаций матриц. В то же время метод Dogleg и адаптивный метод Ньютона отлично справляются с прохождением особенностей матрицы Якоби, демонстрируют высокую скорость работы на больших размерностях и обеспечивают стабильную сходимость к физическому решению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nocedal J., Wright S. J. *Numerical optimization.* Springer Science & Business Media, 2006. 664 p.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. *Теория упругости.* М. : Наука, 1975. 576 с.
3. Conn A. R., Gould N. I., Toint P. L. *Trust-region methods.* SIAM. 2000. 978 p.
4. Moré J. J., Sorensen D. C. *Computing a trust region step.* SIAM. J. on Scientific and Statistical Computing. 1983. V. 4. No. 3. P. 553–572.
5. Dennis J. E., Schnabel R. B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations.* SIAM. 1996. 378 p.

СИСТЕМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ НАНОМОДИФИЦИРОВАННЫХ ПАВ-ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИЙ ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ НЕФТЕОТДАЧИ

С. В. Иванова, Д. В. Гузей, А. В. Минаков

Сибирский федеральный университет, Красноярск

На сегодняшний день существует острая необходимость в разработке новых технологий для повышения объёма извлекаемой нефти, поскольку запасы легкодоступной нефти сокращаются, а из мировых месторождений тяжелой нефти с помощью методов первичной и вторичной добычи удаётся извлечь лишь до 20 %. Методы повышения нефтеотдачи являются основным направлением исследований в нефтегазовой индустрии. С помощью этих методов можно добиться нефтеотдачи до 60 %. В условиях сокращения месторождений за последние десятилетия разработка и внедрение принципиально новых технологий в процесс извлечения нефти из уже существующих скважин будут принципиально важными для удовлетворения мирового спроса на энергию в ближайшие годы [1].

В данной работе впервые с помощью численного моделирования изучены режимы течения при вытеснении нефти из модели терригенной поры ПАВ-полимерными композициями, модифицированными наночастицами оксида кремния. При этом, в отличие от многих теоретических исследований в этом направлении, здесь использованы экспериментально обоснованные свойства таких флюидов, измеренные непосредственно в лаборатории. В качестве полимеров и поверхностно-активных веществ (ПАВ) были рассмотрены вещества, наиболее распространённые и максимально приближенные к используемым вытесняющим агентам при разработке месторождений и добыче нефти.

Для моделирования режимов течения ПАВ-полимерных композиций, модифицированных наночастицами, в пористых средах использовался ранее разработанный авторами подход [2] для описания нестационарного течения двух несмешивающихся жидкостей (нефть–водный раствор) с разрешением межфазной границы на основе уравнений Навье – Стокса для несжимаемой жидкости и Volume of fluid method (VOF) [3] с учётом влияния концентрации добавок на реологические свойства жидкостей и характеристики их смачивания и межфазного натяжения.

Выполнено численное моделирование процессов вытеснения нефти из модели терригенной породы растворами ПАВ, полимеров и ПАВ-полимерных композиций, модифицированных наночастицами. Вначале были проведены расчёты для разработанных нефтевытесняющих флюидов с базовым значением капиллярного числа, равным $1,5 \times 10^{-5}$. Затем детально исследовалось влияние капиллярного числа на коэффициент вытеснения нефти и влияние вязкости нефти на коэффициент вытеснения. В результате численного моделирования было показано, что применение наномодифицированных ПАВ-полимерных композиций для заводнения нефтяных пластов обладает большим потенциалом. Полученные результаты свидетельствуют о принципиальной возможности дальнейшего повышения эффективности ПАВ-полимерного заводнения с использованием нанотехнологий. При этом эффективность использования наноматериалов повышается при возрастании сложности условий добычи углеводородов.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-79-30022, https://rscf.ru/project/23-79-30022/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Esfe M. H., Esfandeh S. *3D numerical simulation of the enhanced oil recovery process using nanoscale colloidal solution flooding.* J. of Molecular Liquids. 2020. V. 34. Art. 112094.
2. Gavrilov A. A., Guzei D. V., Pryazhnikov A. I.[et al.] *Development and microfluidic testing of a new numerical algorithm and software for modeling immiscible fluid flows in digital core models.* Fuel. 2025. V. 386. Art. 112094.
3. Hirt C. W., Nichols B. D. *Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries.* J. of Computational Physics. 1981. V. 39. No. 1. P. 201–225.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ СИСТЕМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

А. Л. Казаков[1], *Л. Ф. Спевак*[2]

[1]*Институт динамики систем и теории управления имени М. В. Матросова СО РАН, Иркутск*

[2]*Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова УрО РАН, Екатеринбург*

Доклад посвящён построению решений системы нелинейных параболических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha_{11} u u_{xx} + \alpha_{12} v v_{xx} + \beta_1 u_x^2 + F(u,v), \\ v_t &= \alpha_{21} u u_{xx} + \alpha_{22} v v_{xx} + \beta_2 v_x^2 + G(u,v). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $u(t,x)$, $v(t,x)$ – искомые функции, t – время, x – пространственная координата, α_{ij}, β_i — константы,

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$F(u,v)$, $G(u,v)$ – известные достаточно гладкие функции, $F(0,0) = G(0,0) = 0$. Легко видеть что система (1) имеет тривиальное решение $u \equiv 0$, $v \equiv 0$.

В зависимости от параметров подобные системы используются в моделях тепломассопереноса [1], реакции – диффузии [2], кинетики химических реакций [3] и других процессов в сплошных средах. В случае когда $u = v = 0$, параболический вид системы (1) вырождается. Отметим, что авторы уже более 10 лет исследуют вырождающиеся параболические уравнения [4] и системы [5], однако системы вида (1) ранее не рассматривалась.

Дополним соотношения (1) граничными условиями

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad v|_{x=a(t)} = 0, \tag{2}$$

где $a(t)$ – известная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям $a(0) = 0$, $a'(0) > 0$. Задача (1), (2) и является предметом настоящего исследования. Её положительное решение в области $0 \le x \le a(t)$, непрерывно состыкованное в точке $a(t)$ с тривиальным решением, образует так называемую тепловую (диффузионную, фильтрационную) волну, распространяющуюся по нулевому фону с конечной скоростью. Функция $x = a(t)$ при этом задаёт уравнение нулевого фронта волны.

Для задачи (1), (2) справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если функция $a(t)$ является аналитической в некоторой окрестности точки $t = 0$, то задача (1), (2) при условиях $a'(0) \neq 0, D \neq 0$ имеет хотя бы одно нетривиальное аналитическое решение.*

Для численного решения задачи (1), (2) предложен пошаговый алгоритм, основанный на разностной дискретизации по времени, методе коллокаций и аппроксимации радиальными базисными функциями в пространственной области.

Верификация численных решений проведена сравнением с точными решениями, построенными с помощью редукции исходной системы к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках проектов № 121041300058-1, № 124020600042-9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. *Теория теплопроводности.* М. : Высшая школа, 1967. 599 с.
2. Fife P. C. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems.* Berlin : Springer, 1979. 185 p.
3. Франк-Каменецкий Д. А. *Диффузия и теплопередача в химической кинетике.* М. : Наука, 1987. 502 с.
4. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. *Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации.* Известия ИГУ. Серия: Математика. 2012. Т. 5. № 2. С. 2–17.
5. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. *Точные и приближенные решения вырождающейся системы реакция – диффузия.* ПМТФ. 2021. Т. 62. № 4. С. 169–180.

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОДИФФУЗИИ, МАГНИТОФОРЕЗА И СЕДИМЕНТАЦИИ НА КОНВЕКТИВНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

П. Н. Казанцев, Б. Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Рассматривается подогреваемая сверху ячейка Хеле-Шоу с соотношением ширины, высоты и глубины 40 : 20 : 2. Ячейка заполнена магнитной жидкостью (коллоидной суспензией) с вязкостью η, температуропроводностью κ и магнитной восприимчивостью χ (рис. 1). Перпендикулярные оси x (широкие грани) – теплоизолированы.

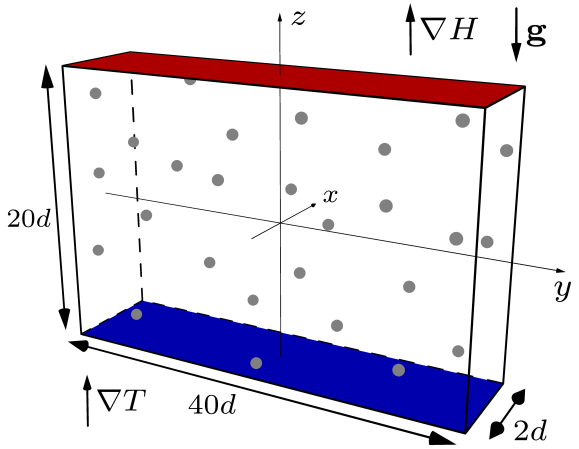


Рис. 1. Ячейка Хеле-Шоу

На ячейку действует внешнее неоднородное вертикальное магнитное поле, которое можно охарактеризовать линейной зависимостью

$$\vec{H} = (0, 0, Gz),$$

где G – величина градиента магнитного поля.

Ячейка ориентирована таким образом, что действующее на неё поле гравитации параллельно градиентам температуры и магнитного поля.

Система уравнений термомагнитной конвекции содержит уравнение Навье – Стокса с учётом силы тяжести и магнитной силы Кельвина, уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости, уравнение теплопроводности, а также уравнение для эволюции объёмной доли $\varphi(\vec{r})$ магнитных частиц:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{g} + M\nabla H, \quad \nabla\cdot\vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)T = \kappa\Delta T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\varphi + \operatorname{div}\vec{j} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{j} = \varphi\vec{u} - D\left(\nabla\varphi + \mathrm{S_T}\nabla T\right), \qquad 3\pi\eta a\vec{u} = \frac{m^2 H}{3k_B T_*}\nabla H + \frac{\pi\rho a^3}{6\varphi}\vec{g}, \tag{4}$$

где $\vec{j}$ – плотность потока магнитных частиц, $D = k_B T_*/3\pi\eta a$ – коэффициент диффузии наночастиц диаметром a, k_B – постоянная Больцмана, $\mathrm{S_T}$ – параметр Соре, $\vec{u}$ – скорость частиц относительно жидкости–носителя, вызванная магнитной и гравитационной силами, T_* – среднее значение температуры в состоянии механического равновесия, m – магнитный момент коллоидной частицы. В рамках безындукционного приближения будем считать отклонения внешнего магнитного поля внутри ячейки незначительными.

На горизонтальных границах ячейки должны выполняться условия прилипания для скорости, постоянства температуры и непроницаемости для магнитных частиц:

$$\begin{aligned} z = \quad h/2: &\quad T = T_* + \Delta T/2, \quad \vec{v} = 0, \quad \vec{j} = 0, \\ z = -h/2: &\quad T = T_* - \Delta T/2, \quad \vec{v} = 0, \quad \vec{j} = 0. \end{aligned}$$

Система уравнений замыкается уравнениями состояния:

$$\rho = \rho_* \left[1 + \alpha\left(\varphi - \overline{\varphi}\right) - \beta\left(T - T_*\right)\right], \quad M = \chi(\varphi, T)\, H, \quad \chi = \frac{\varphi M_s m}{3 k_B T},$$

где α и β – коэффициенты концентрационного и теплового расширений, $\overline{\varphi}$ – среднее значение концентрации магнитных частиц, M_s – намагниченность насыщения диспергированного ферромагнетика.

Если к ячейке приложена разница температур ΔT меньше критической, магнитная жидкость будет находиться в состоянии покоя ($\mathbf{v} = 0$), в ней установятся соответствующие распределение температуры

$$T_0 = T_* + \frac{\Delta T}{h}\, z$$

и обусловленное магнитофорезом, термодиффузией и седиментацией распределение концентрации магнитных частиц

$$\varphi_0 = \overline{\varphi}\left(1 + \frac{\gamma^2\left(12\left(z/h\right)^2 - 1\right)}{72} + \psi\frac{\Delta T}{T_*}\frac{z}{h} - Bz\right),$$

где

$$\gamma = \frac{mGh}{k_B T_*}, \quad \psi = \frac{T_* \mathrm{S_T}}{\overline{\varphi}}, \quad B = \frac{\pi\rho_* g a^3}{6 k_B T_* \overline{\varphi}}.$$

Воспользуемся приближением плоских траекторий [1]

$$v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \Phi = \left[\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\right]_x$$

и выберем следующие единицы измерения: расстояния – полутолщину ячейки d, времени – d^2/κ, скорости – κ/d, температуры – $T_*\eta\kappa(\chi_* G^2 d^4)^{-1}$, концентрации – $\overline{\varphi}\eta\kappa(\chi_* G^2 d^4)^{-1}$. Тогда после осреднения по узкой грани ячейки (ось x) система уравнений относительно безразмерных Ψ, $T' = T - T_0$ и $\varphi' = \varphi - \varphi_0$ принимает вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mathrm{Pr}\left[\Delta\Phi + z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \left(\mathrm{Q_t}\frac{\partial T}{\partial y} - \mathrm{Q_c}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right], \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T - \mathrm{R_m}\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mathrm{Le}\,\nabla\cdot\vec{j} - \left(\mathrm{R_c}z + \mathrm{R_m}\psi - \mathrm{K}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \tag{7}$$

где $\mathrm{P}r = \eta(\rho\kappa)^{-1}$ – число Прандтля, $\mathrm{Le} = D/\kappa$ – число Льюиса, $\psi = T_*\mathrm{S_T}/\overline{\varphi}$ – коэффициент разделения смеси,

$$\mathrm{R_m} = \frac{\Delta T}{T_*}\frac{\chi G^2 d^4}{\kappa\eta} -$$

магнитный аналог числа Рэлея,

$$\mathrm{R_c} = \frac{\gamma^2}{3}\frac{\chi G^2 d^4}{\kappa\eta} -$$

концентрационный аналог числа Рэлея,

$$\mathrm{K} = B\frac{\chi G^2 d^5}{\kappa\eta}, \quad \mathrm{Q_c} = \frac{\varphi\rho_* g\alpha}{\chi G^2 d}, \quad \mathrm{Q_t} = \frac{T_*\rho_* g\beta}{\chi G^2 d}.$$

Безразмерные градиенты равновесных величин:

$$\frac{dT_0}{dz} = \mathrm{R_m}, \quad \frac{d\varphi_0}{dz} = \mathrm{R_c}z + \mathrm{R_m}\psi - B.$$

Граничные условия для соответствующих возмущений:

$$y = \pm 20: \qquad \Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial T'}{\partial y} = \frac{\partial\varphi'}{\partial y} = 0, \tag{8}$$

$$z = \pm 10: \qquad \Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = T' = \varphi' = 0. \tag{9}$$

Будем искать приближённое решение задачи в виде

$$\Psi = \sum_{n,m=1}^{n_{\max},m_{\max}} \Psi_{nm}(t)\mathrm{CS}\left(\frac{n\pi y}{40}\right)\mathrm{CS}\left(\frac{m\pi z}{20}\right),$$

$$T' = \sum_{n=0,m=1}^{n_{\max},m_{\max}} \theta_{nm}(t)\mathrm{SC}\left(\frac{n\pi y}{40}\right)\mathrm{CS}\left(\frac{m\pi z}{20}\right),$$

$$\varphi' = \sum_{n=0,m=1}^{n_{\max},m_{\max}} \varphi_{nm}(t)\mathrm{SC}\left(\frac{n\pi y}{40}\right)\mathrm{CS}\left(\frac{m\pi z}{20}\right),$$

где

$$\mathrm{CS}(nx) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \cos nx, & \text{нечётные } n \\ \sin nx, & \text{чётные } n \end{array} \right\}, \quad \mathrm{SC}(nx) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \sin nx, & \text{нечётные } n \\ \cos nx, & \text{чётные } n \end{array} \right\}.$$

Таким образом, с помощью метода Галёркина [2] можно свести задачу к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{X}_i = \sum_j a_{ij}X_j + \sum_{jk} b_{ijk}X_jX_k,$$

относительно зависящих от времени амплитуд возмущений

$$X_i(t) = (\Psi_{nm}(t), \theta_{nm}(t), \varphi_{nm}(t)),$$

которая далее решается численно методом Рунге – Кутты – Фельберга.

После вычислений были построены графики зависимостей порогов устойчивости от параметров системы, определяющих степень концентрационной стратификации за счёт магнитофореза, термодиффузии и седиментации соответственно. Все представленные результаты были получены при $\mathrm{Pr} = 10$ и $\mathrm{Le} = 10^{-4}$.

Рассмотрим прежде всего случай невесомости ($\mathrm{K} = \mathrm{Q_t} = \mathrm{Q_c} = 0$). На графике зависимости частоты нейтральных возмущений от коэффициента разделения смеси для нескольких значений концентрационного числа Рэлея (рис. 2, справа) можно увидеть, что при различных комбинациях ψ и $\mathrm{R_c}$ возникают как монотонные, так и колебательные режимы развития неустойчивости. Другими словами, установившееся неоднородное распределение концентрации магнитных частиц может привести к нестационарному режиму даже в абсолютно стационарных внешних условиях.

Кроме того, зависимость критического магнитного числа Рэлея $\mathrm{R_m}$ от ψ (рис. 2, слева) показывает, что увеличение степени концентрационной неоднородности, вызванное магнитофорезом (увеличение $\mathrm{R_c}$), приводит к повышению порога конвекции, а стратификация, вызванная термофорезом (накопление частиц в горячей области при $\psi > 0$), снижает порог конвекции.

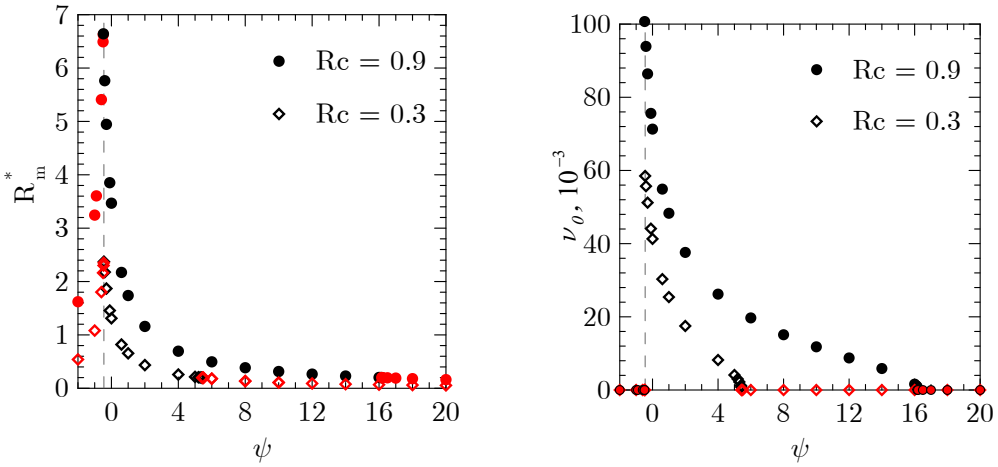


Рис. 2. Зависимость критического магнитного числа Рэлея $\mathrm{R_m^*}$ и частоты колебательных режимов ν_0 от коэффициента разделения смеси ψ для нескольких значений $\mathrm{R_c}$. Чёрные символы – колебательные конвективные режимы, красные символы – монотонные

В общем случае при добавлении силы тяжести ($\mathrm{K} \neq 0$, $\mathrm{Q_t} \neq 0$, $\mathrm{Q_c} \neq 0$) колебательные режимы неустойчивости не наблюдаются. Тем не менее, если сформировать неоднородность концентрации за счёт седиментации $\mathrm{K} \neq 0$ (наряду с термодиффузией и магнитофорезом), а затем исключить действие гравитации на магнитную жидкость ($\mathrm{Q_t} = \mathrm{Q_c} = 0$), то колебательный переход к конвекции можно обнаружить. Подобную ситуацию можно реализовать за счёт медленного поворота ячейки вместе с магнитами на 90 градусов вокруг оси y, когда седиментационный профиль уже установился.

На рис. 3 представлены зависимости порога устойчивости и частоты нейтральных возмущений от параметра K, характеризующего степень седиментационной стратификации, при $\psi = 5$. На основе полученных данных можно заключить, что повышение концентрационной неоднородности магнитных частиц за счёт гравитации приводит к повышению порога конвективной устойчивости.

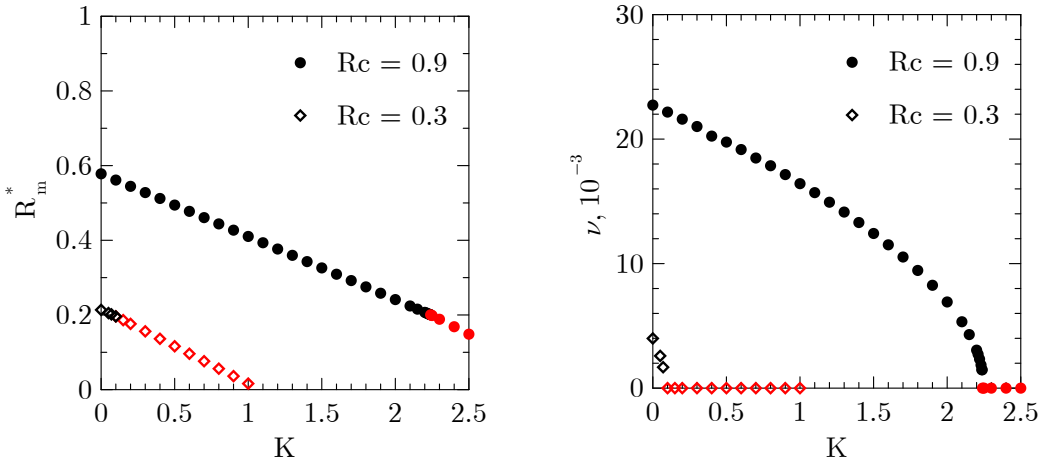


Рис. 3. Зависимость критического магнитного числа Рэлея R_m^* и частоты колебательных режимов ν от параметра седиментационной стратификации K для нескольких значений R_c. Чёрные символы – колебательные конвективные режимы, красные символы – монотонные

Области монотонной конвекции при определённых значениях параметров ψ, K, R_c можно объяснить конкуренцией соответствующих механизмов транспорта частиц, понижающей степень стратификации магнитной фазы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Д. В., Путин Г. Ф., Чернатынский В. И. *О конвективных движениях в ячейке Хеле-Шоу.* Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 3. С. 554–556.
2. Канторович Л. В., Крылов В. И. *Приближенные методы высшего анализа.* Л. : Физматгиз, 1962. 708 с.

СМЕШАННЫЙ ВАРИАНТ МКЭ НА ОСНОВЕ ОБЪЁМНОГО ЭЛЕМЕНТА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДЛЯ РАСЧЁТА ОБОЛОЧЕК

Ю. В. Клочков[1], *А. П. Николаев*[1], *О. В. Вахнина*[1], *А. С. Андреев*[1], *М. Ю. Клочков*[2]

[1]*Волгоградский государственный аграрный университет*
[2]*Волгоградский государственный технический университет*

Для численного анализа напряжённо-деформированного состояния (НДС) техносферных объектов типа оболочек предлагается объёмный конечный элемент (ОКЭ) в форме восьмиузловой призмы с четырехугольным основанием, скомпонованный в смешанной формулировке МКЭ [1–5].

В качестве искомых прочностных параметров ОКЭ были выбраны кинематические (перемещения и их первые производные), силовые (компоненты тензора напряжений) и деформационные (компоненты тензора деформаций) неизвестные.

Аппроксимирующие выражения для кинематических варьируемых параметров формировались на основе произведений полиномов Эрмита третьего порядка, а для силовых и деформационных параметров – на основе трилинейных функций локальных координат. Для формирования матрицы жёсткости ОКЭ использовался смешанный функционал, выражающий равенство работ внешних нагрузок и внутренних усилий с привлечением дополнительного условия о равенстве нулю работы внутренних усилий на разности деформаций, определяемых через соотношения Коши, и деформаций, определяемых непосредственной аппроксимацией. Процедура минимизации смешанного функционала осуществлялась по кинематическим, силовым и деформационным узловым неизвестным, в результате чего была получена система матричных уравнений, которая была решена методом подстановки относительно кинематических узловых неизвестных. Силовые и деформационные искомые параметры определялись посредством обратной подстановки. Решение тестовых задач продемонстрировало существенно более высокую точность вычисления искомых прочностных параметров по сравнению с классическим МКЭ в формулировке метода перемещений.

Предлагаемый смешанный функционал может быть записан в виде

$$\Phi_s = 0.5\int\limits_V \underset{1\times6}{\left\{\sigma^{rt}\right\}^T}\underset{6\times1}{\left\{\varepsilon_{rt}\right\}}dV - 0.5\int\limits_V \underset{6\times1}{\left\{\varepsilon^a_{rt}\right\}^T}\left(\underset{6\times1}{\left\{\sigma^{rt}\right\}} - \underset{6\times6}{[C_\sigma]}\underset{6\times1}{\left\{\varepsilon^K_{rt}\right\}}\right)dV - 0.5\int\limits_F \underset{1\times3}{\{U\}^T}\underset{3\times1}{\{P\}}dF, \quad (1)$$

где $\underset{6\times1}{\{\sigma^{rt}\}}$, $\underset{6\times1}{\{\varepsilon_{rt}\}}$ – напряжения и деформации в точке M^0 внутренней области ОКЭ; $\underset{6\times6}{[C_\sigma]}$ – матрица упругости; $\underset{3\times1}{\{U\}}$, $\underset{3\times1}{\{P\}}$ – столбцы компонент вектора перемещений и внешней поверхностной нагрузки.

Верхние индексы «a» и «K» указывают, что деформации в точке M^0 аппроксимируются непосредственно,

$$\underset{6\times1}{\left\{\varepsilon^a_{rt}\right\}} = \underset{6\times48}{[H]}\underset{48\times1}{\left\{\varepsilon^u_{rt}\right\}}, \quad (2)$$

или с помощью соотношений Коши

$$\underset{6\times1}{\left\{\varepsilon^K_{rt}\right\}} = \underset{6\times96}{[B]}\underset{96\times1}{\left\{U^L\right\}} = \underset{6\times96}{[B]}\ \underset{96\times96}{[T]}\ \underset{96\times1}{\left\{U^G\right\}}, \quad (3)$$

где $\underset{48\times1}{\{\varepsilon^u_{rt}\}}$ – столбец узловых значений компонент тензора деформаций; $\underset{96\times1}{\{U^L\}}$, $\underset{96\times1}{\{U^G\}}$ – столбцы узловых значений компонент вектора перемещения и их первых производных в локальной и глобальной системах координат соответственно.

Силовые и кинематические искомые параметры аппроксимируются посредством матричных соотношений

$$\underset{6\times1}{\{\sigma^{rt}\}} = \underset{6\times48}{[H]}\,\underset{48\times1}{\{\sigma^{rt}_u\}}, \quad \underset{3\times1}{\{U\}} = \underset{3\times96}{[A]}\;\underset{96\times96}{[T]}\;\underset{96\times1}{\{U^G\}}, \tag{4}$$

где $\underset{6\times48}{[H]}$ и $\underset{3\times96}{[A]}$ – квазидиагональные матрицы, содержащие аппроксимирующие трилинейные функции и триадные произведения полиномов Эрмита третьего порядка соответственно.

Смешанный функционал (1) с учётом (2)–(4) примет вид

$$\Phi_s = 0.5\underset{1\times48}{\{\sigma^{rt}_u\}^T}\int\limits_V \underset{48\times6}{[H]^T}\underset{6\times6}{[C_\sigma]^{-1}}\underset{6\times48}{[H]}\,dV\,\underset{48\times1}{\{\sigma^{rt}_u\}} - 0.5\underset{1\times48}{\{\varepsilon^u_{rt}\}^T}\int\limits_V \underset{48\times6}{[H]^T}\underset{6\times48}{[H]}\,dV\,\underset{48\times1}{\{\sigma^{rt}_u\}} +$$
$$+ 0.5\underset{1\times48}{\{\varepsilon^u_{rt}\}^T}\int\limits_V \underset{48\times6}{[H]^T}\underset{6\times6}{[C_\sigma]}\underset{6\times96}{[B]}\,dV\;\underset{96\times96}{[T]}\;\underset{96\times1}{\{U^G\}} - 0.5\underset{1\times96}{\{U^G\}^T}\;\underset{96\times96}{[T]^T}\int\limits_F \underset{96\times3}{[A]^T}\underset{3\times1}{\{P\}}dF. \tag{5}$$

Минимизацией (5) по узловым значениям силовых $\underset{1\times48}{\{\sigma^{rt}_u\}^T}$, деформационных $\underset{1\times48}{\{\varepsilon^u_{rt}\}^T}$ и кинематических $\underset{1\times96}{\{U^G\}^T}$ искомых параметров можно получить систему матричных уравнений

$$\begin{cases} \partial\Phi_s/\partial\underset{1\times48}{\{\sigma^{rt}_u\}^T} \equiv \underset{48\times48}{[a]}\;\underset{48\times1}{\{\sigma^{rt}_u\}} - \underset{48\times48}{[b]^T}\;\underset{48\times1}{\{\varepsilon^u_{rt}\}} = 0; \\ \partial\Phi_s/\partial\underset{1\times48}{\{\varepsilon^u_{rt}\}^T} \equiv \underset{48\times48}{[b]}\;\underset{48\times1}{\{\sigma^{rt}_u\}} + \underset{48\times96}{[c]}\;\underset{96\times1}{\{U^G\}} = 0; \\ \partial\Phi_s/\partial\underset{1\times96}{\{U^G\}^T} \equiv \underset{96\times48}{[c]^T}\;\underset{48\times1}{\{\varepsilon^u_{rt}\}} - \underset{96\times1}{\{R\}} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\underset{48\times48}{[a]} = \int\limits_V \underset{48\times6}{[H]^T}\underset{6\times6}{[C_\sigma]^{-1}}\underset{6\times48}{[H]}\,dV; \qquad \underset{48\times48}{[b]} = \int\limits_V \underset{48\times6}{[H]^T}\underset{6\times48}{[H]}\,dV;$$

$$\underset{48\times96}{[c]} = \int\limits_V \underset{48\times6}{[H]^T}\underset{6\times6}{[C_\sigma]}\underset{6\times96}{[B]}\,dV\;\underset{96\times96}{[T]}; \quad \underset{96\times1}{\{R\}} = \underset{96\times96}{[T]^T}\int\limits_F \underset{96\times3}{[A]}\underset{3\times1}{\{P\}}dF.$$

Выражая из второго уравнения (6) столбец силовых узловых неизвестных

$$\underset{48\times1}{\{\sigma^{rt}_u\}} = \underset{48\times48}{[b]^{-1}}\;\underset{48\times96}{[c]}\;\underset{96\times1}{\{U^G\}}$$

и подставляя его в первое уравнение системы, можно записать следующее матричное соотношение:

$$\underset{48\times48}{[a]}\;\underset{48\times48}{[b]^{-1}}\;\underset{48\times96}{[c]}\;\underset{96\times1}{\{U^G\}} = \underset{48\times48}{[b]^T}\;\underset{48\times1}{\{\varepsilon^u_{rt}\}}. \tag{7}$$

Из (7) можно выразить столбец узловых значений деформаций

$$\underset{48\times1}{\{\varepsilon^u_{rt}\}} = \left[\underset{48\times48}{[b]^T}\right]^{-1}\;\underset{48\times48}{[a]}\;\underset{48\times48}{[b]^{-1}}\;\underset{48\times96}{[c]}\;\underset{96\times1}{\{U^G\}}$$

и подставить его в третье уравнение системы (6):

$$\underset{96\times48}{[c]}^{T}\left[\underset{48\times48}{[b]}^{T}\right]^{-1}\underset{48\times48}{[a]}\underset{48\times48}{[b]}^{-1}\underset{48\times96}{[c]}\underset{96\times1}{\{U^G\}}-\underset{96\times1}{\{R\}}=0. \tag{8}$$

Матричное уравнение (8) можно записать в традиционном для МКЭ виде

$$\underset{96\times96}{[K]}\ \underset{96\times1}{\{U^G\}}=\underset{96\times1}{\{R\}},$$

где

$$\underset{96\times96}{[K]}=\underset{96\times48}{[c]}^{T}\left[\underset{48\times48}{[b]}^{T}\right]^{-1}\underset{48\times48}{[a]}\underset{48\times48}{[b]}^{-1}\underset{48\times96}{[c]}-$$

матрица жёсткости ОКЭ.

Матрица жёсткости оболочечной конструкции формируется совокупностью $\underset{96\times96}{[K]}$ ОКЭ с помощью матрицы индексов [6] традиционным для МКЭ способом.

Разрешая глобальную СЛАУ относительно кинематических узловых неизвестных, силовые и деформационные искомые параметры определяются путём обратной подстановки.

Численные эксперименты по расчёту оболочек эллиптического профиля доказали высокую эффективность разработанного смешанного объёмного конечного элемента в сравнении с элементом дискретизации, скомпонованном в формулировке метода перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатьев А. В., Завьялов И. С., Бочков М. И. *Алгоритм редуцирования систем уравнений МКЭ высоких порядков с использованием полиномиальной интерполяции основных смешанных неизвестных.* Известия высших учебных заведений. Строительство. 2024. Т. 787. № 7. С. 5–18.
2. Гуреева Н. А., Клочков Ю. В., Николаев А. П. *Определяющие соотношения для нелинейно упругих тел и их реализация в расчете осесимметрично нагруженных оболочек вращения на основе смешанного МКЭ.* Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 157. № 2. С. 28–39.
3. Nodargi N. A., Bisegna P. *A mixed finite element for the nonlinear analysis of in-plane loaded masonry walls.* Int. J. Numer Methods Eng. 2019. V. 120. No. 11. P. 1227–1248.
4. Liguori F. S., Madeo A., Garcea G. *A mixed finite-element formulation for the elasto-plastic analysis of shell structures.* Theoretical and Applied Mechanics. 2023. No. 26. P. 227–232.
5. Pascon J. P. *Finite element analysis of hyperelastoplastic mixed-hardening materials under plane stresses.* Int. Applied Mechanics. 2024. V. 60. No. 1. P. 101–121.
6. Постнов В. А. *Численные методы расчета судовых конструкций.* Л. : Судостроение, 1977. 280 с.

ХИМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И ДИФФУЗИЯ В НЕОБРАТИМОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

А. Г. Князева

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

В термодинамике необратимых процессов скорости диффузионного переноса, а также сродство химических реакций определяются величинами химических потенциалов компонентов и соответствующих градиентов. Если многокомпонентная термодинамическая система содержит химически активные компоненты, поры и/или может плавиться (полностью или частично), то для её описания можно использовать различные модели термохемомеханики. При этом наличие и эволюция доли жидкой фазы и пористости должны влиять на определение химических потенциалов и скоростей реакций. Описание этих фактов возможно в рамках различных современных термодинамик [1]. Ниже рассмотрим это на примере. Запишем локально уравнение Гиббса для энергии Гиббса g в виде

$$dg = -sdT - \varepsilon_{ij} d\Sigma_{ij} + \sum_k \mu_k dX_k - A_L d\eta_L - A_\theta d\theta, \tag{1}$$

где T – температура; s – локальная плотность энтропии; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; Σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Кирхгофа; X_k – концентрации компонентов; μ_k – их химические потенциалы. Представленная термодинамическая система, включающая химически реагирующие компоненты, является расширенной в том смысле, что увеличен набор переменных состояния. Новые параметры – долю жидкой фазы η_L и пористость θ – можно рассматривать как внутренние [2] или как дополнительные [3]. Величины A_L и A_θ можно называть химическим сродством для соответствующих процессов [4]. В соответствии с методами классической термодинамики необратимых процессов [4, 5] для каждой из величин $s, \varepsilon_{ij}, \mu_k, A_L, A_\theta$ записывается уравнение состояния (определяющее уравнение) в дифференциальной форме. Каждая из этих величин зависит от тех же переменных состояния, что и энергия Гиббса. Выводы из таких построений, основанные на любом из термодинамических потенциалов, в том числе на энтропии, эквивалентны и не зависят от выбранной системы отсчёта.

Поскольку скорости и механизмы химических реакций зависят от того, протекают они в жидкой или твёрдой фазе, эффективные свойства сложного материала зависят не только от состава, но и от пористости (и от многочисленных внутренних поверхностей [6, 7]), то расширение набора переменных состояния для многих приложений является важным.

Так как $g = g(X, \Sigma_{ij}, X_k, \eta_L, \theta)$, то все величины, стоящие в (1) при дифференциалах основных переменных, зависят от тех же величин, в том числе $\mu_k = \mu_k(X, \Sigma_{ij}, X_k, \eta_L, \theta)$. Представим химический потенциал компонента в виде полного дифференциала

$$d\mu_k = \frac{\partial \mu_k}{\partial T}\, dT + \frac{\partial \mu_k}{\partial \Sigma_{ij}}\, d\Sigma_{ij} + \frac{\partial \mu_k}{\partial X_l}\, dX_l + \frac{\partial \mu_k}{\partial \eta_L}\, d\eta_L + \frac{\partial \mu_k}{\partial \theta}\, d\theta. \tag{2}$$

Если рассматриваем долю жидкой фазы и пористость как внутренние переменные, то принимаем, что они являются функциями основных переменных состояния. Тогда

$$d\eta_L = \frac{\partial \eta_L}{\partial T}\, dT + \frac{\partial \eta_L}{\partial \Sigma_{ij}}\, d\Sigma_{ij} + \frac{\partial \eta_L}{\partial X_l}\, dX_l,$$

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial T}\,dT + \frac{\partial\theta}{\partial\Sigma_{ij}}\,d\Sigma_{ij} + \frac{\partial\theta}{\partial X_l}\,dX_l.$$

Подставляя это в (2), получим:

$$d\mu_k = \left(\frac{\partial\mu_k}{\partial T} + \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_L}\frac{\partial\eta_L}{\partial T} + \frac{\partial\mu_k}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial T}\right)dT + \left(\frac{\partial\mu_k}{\partial\Sigma_{ij}} + \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_L}\frac{\partial\eta_L}{\partial\Sigma_{ij}} + \frac{\partial\mu_k}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\Sigma_{ij}}\right)d\Sigma_{ij} +$$

$$+ \left(\frac{\partial\mu_k}{\partial X_l} + \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_L}\frac{\partial\eta_L}{\partial X_l} + \frac{\partial\mu_k}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial X_l}\right)dX_l.$$

Так как химические потенциалы – это парциальные энергии Гиббса, то величины в скобках при дифференциалах имеют вполне понятный физический смысл. Коэффициенты при dT есть не что иное, как парциальные теплоемкости:

$$C_{\Sigma,k} = C^0_{\Sigma,k} - T\left(\frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_L}\frac{\partial\eta_L}{\partial T} + \frac{\partial\mu_k}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial T}\right).$$

Коэффициенты при дифференциалах напряжений дают нам тензоры собственных деформаций превращения:

$$\varepsilon^k_{ij} = \varepsilon^{k,0}_{ij} - \left(\frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_L}\frac{\partial\eta_L}{\partial\Sigma_{ij}} + \frac{\partial\mu_k}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\Sigma_{ij}}\right).$$

Последние коэффициенты определяют так называемые термодинамические множители, вид которых зависит от типа раствора или химического соединения:

$$g_{kl} = g^0_{kl} + \frac{\partial\mu_k}{\partial\eta_L}\frac{\partial\eta_L}{\partial X_l} + \frac{\partial\mu_k}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial X_l}.$$

Следовательно,

$$d\mu_k = -\frac{C_{\Sigma,k}}{T}\,dT - \varepsilon^k_{ij}d\Sigma_{ij} + \sum_{l=1}^{n} g_{kl}dX_l. \tag{3}$$

Знаки в уравнении оставим такими же, как в (1).

Чтобы в рамках термодинамики необратимых процессов построить уравнение для потока компонента k, учтём, что при выбранном подходе [4, 5] диффузионный поток компонента пропорционален градиентам химических потенциалов, делённым на температуру, и градиенту температуры:

$$\mathbf{J}_k = -\sum_{l=1}^{n} L_{kl}\nabla\frac{\mu_k}{T} - L_{kT}\frac{\nabla T}{T},$$

где L_{kl} и L_{kT} – феноменологические коэффициенты. Учитывая, что в системе n концентраций независимы только $n-1$,

$$dX_n = -\sum_{\lambda=1}^{n-1} dX_\lambda,$$

получим:

$$d\mu_k = -\frac{C_{\Sigma,k}}{T}\,dT - \varepsilon^k_{ij}d\Sigma_{ij} + \sum_{l=1}^{n-1}(g_{kl} - g_{kn})dX_l. \tag{4}$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\nabla\mu_k = -\frac{C_{\Sigma,k}}{T}\,\nabla T - \varepsilon_{ij}^k \nabla\Sigma_{ij} + \sum_{l=1}^{n-1}(g_{kl} - g_{kn})\nabla X_l.$$

Проведём преобразования в уравнении для потока компонента:

$$\mathbf{J}_k = -\sum_{l=1}^{n} L_{kl}\left[\left(\frac{\nabla\mu_k}{T}\right) - \mu_k\frac{\nabla T}{T^2}\right] - L_{kT}\frac{\nabla T}{T} =$$

$$= -\sum_{l=1}^{n}\frac{L_{kl}}{T}\left(\nabla\mu_k\right)_T - \left[L_{kT} - \sum_{l=1}^{n}\frac{L_{kl}}{T}\mu_k\right]\frac{\nabla T}{T}$$

или

$$\mathbf{J}_k = -\sum_{l=1}^{n}\frac{L_{kl}}{T}\left(\sum_{\lambda=1}^{n-1}\left(g_{k\lambda} - g_{kn}\right)\nabla X_\lambda\right) + \sum_{l=1}^{n}\frac{L_{kl}}{T}\,\varepsilon_{ij}^k\nabla\Sigma_{ij} - \left[L_{kT} - \sum_{l=1}^{n}\frac{L_{kl}}{T}\,\mu_k\right]\frac{\nabla T}{T}.$$

Далее, учитывая равенство нулю суммы диффузионных потоков, симметричность матрицы коэффициентов Онзагера и последовательно определяя все коэффициенты через известные, придём к уравнениям для потоков вида [8]:

$$\mathbf{J}_k = -\sum_{\lambda=1}^{n-1} D_{k\lambda}\nabla X_\lambda + B_{ij}^k X_k\nabla\Sigma_{ij} - X_k D_{kk}\rho S_T\nabla T, \tag{5}$$

где B_{ij}^k – коэффициенты переноса под действием градиентов напряжений, S_T – коэффициенты Соре. Однако коэффициенты переноса в (5) теперь зависят от иного набора параметров. Аналогичные изменения произойдут и в других свойствах. В конкретных задачах для нахождения новых коэффициентов требуется привлекать дополнительные соображения. Так, производная $\partial\mu_k/\partial\eta_L$ должна учитывать разный характер зависимости потенциалов в жидкой и твёрдой фазах от состава, температуры и давления (напряжений). В простейшем случае

$$\mu_k = \mu_{k,s}\left(1 - \eta_L\right) + \mu_{k,L}\eta_L,$$

$$\partial\mu_k/\partial\eta = \mu_{k,L} - \mu_{k,s}.$$

Производные $\partial\eta_L/\partial T$, $\partial\eta_L/\partial\Sigma_{ij}$ и $\partial\eta_L/\partial X_l$ фактически следуют из известных теорий. Например, часто принимается, что в интервале температур плавления (T_A, T_B) доля жидкой фазы изменяется так:

$$\eta_L = 1 - \left(\frac{T - T_A}{T_B - T_A}\right)^2.$$

Тогда производную по температуре находим явно, а для двух других производных требуется знать зависимости температур T_A, T_B от напряжений и состава.

Предположим теперь, что в закрытой термодинамической системе протекает химическая реакция

$$\sum_{k=1}^{n}\nu_k' B_k \to \sum_{k=1}^{n}\nu_k'' B_k,$$

где B_k – символы химических веществ; ν_k – стехиометрические коэффициенты. В соответствии с термодинамикой необратимых процессов, скорость химической реакции пропорциональна химическому сродству,

$$A = -\sum_k \mu_k \nu_k,$$

и, вообще говоря, компонентам тензора напряжений. Выражения для дифференциалов химических потенциалов нам известны (4). Для малых приращений имеем:

$$\mu_k - \mu_k^0 = -C_{\Sigma,k} \ln(T/T_0) - \varepsilon_{ij}^k \Sigma_{ij} + \sum_{l=1}^{n-1} (g_{kl} - g_{kn}) \left(X_l - X_l^0\right),$$

что с учётом предыдущего позволяет связать скорость реакции с наличием некоторой доли жидкой фазы и пористостью. Это явно говорит о различии скоростей реакций в разных фазах. Этот факт известен, например, для некоторых интерметаллидов. В твёрдой фазе скорости реакций лимитируются диффузией, поэтому характеризуются высокими наблюдаемыми значениями энергий активации. В жидкой фазе скорости реакций значительно выше и определяются непосредственно актом химического взаимодействия.

Существуют иные способы выхода за рамки классической теории. В расширенной необратимой термодинамике [9-11] в число переменных состояния включаются градиенты этих величин (или потоки, или скорости)

$$g = g\left(T, \Sigma_{ij}, X_k, \eta_L, \theta, \nabla T, \nabla \Sigma_{ij}, \nabla X_k, \nabla \eta_L, \nabla \theta\right),$$

что приводит к появлению в уравнениях Гиббса дополнительных слагаемых. Увеличение числа переменных состояния должно приводить и к увеличению количества определяющих соотношений. В теории фазового поля [12-14] локальное уравнение Гиббса не изменяется.

Однако уравнения баланса всех величин строятся на основе интегрального представления потенциалов для систем в целом и разложении локальных потенциалов по степеням малых градиентов. Всё сказанное обобщается и на случай тензорных концентраций и соответствующих им тензорных химических потенциалов [15,16].

Работа выполнена в соответствии с программой фундаментальных исследований, проект FWRW-2026-0007.

ЛИТЕРАТУРА

1. Muschik W. *Why so many 'schools' of thermodynamics?* Forsch Ingenieurwes. 2007. V. 71. P. 149–161.
2. Berezovski A., Ván P. *Internal variables in thermoelasticity.* Springer International Publishing AG. 2017.
3. Князева А. Г. *Перекрестные эффекты в твердых средах с диффузией.* ПМТФ. 2003. Т. 44. № 3. С. 85–99.
4. Де Донде Т., Ван Риссельберг П. *Термодинамическая теория сродства.* М. : Металлургия, 1984. 136 с.
5. Де Гроот С., Мазур П. *Неравновесная термодинамика.* М. : Мир, 1964. 456 с.

6. Knyazeva A. *Application of irreversible thermodynamics to diffusion in solids with internal surfaces.* J. of Non-Equilibrium Thermodynamics. 2020. V. 45. P. 401–418.
7. Князева А. Г. *О моделировании необратимых процессов в материалах с большим числом внутренних поверхностей.* Физическая мезомеханика. 2003. Т. 6. № 5. С. 11–27.
8. Князева А. Г., Демидов В. Н. *Коэффициенты переноса для трехкомпонентного деформируемого сплава.* Вестник ПермГТУ. Механика. 2011. № 3. С. 84–99.
9. Fort J. Casas-Vázquez J., Méndez V. *Extended irreversible thermodynamics of chemically reacting systems.* J. of Physical Chemistry B. 1999. V. 103. No. 5. P. 861–867.
10. Serdyukov S. I. *Extended irreversible thermodynamics and the Jeffreys type constitutive equations.* Physics Letters A. 2003. V. 316. Iss. 3-4. P. 177–183.
11. Jou D. *Relationships between rational extended thermodynamics and extended irreversible thermodynamics.* Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2020. V. 378. Art. 20190172.
12. Moelans N., Blanpain B., Wollants P. *An introduction to phase-field modeling of microstructure evolution.* Computer Coupling of Phase Diagrams and Thermochemistry. 2008. V. 32. P. 268–294.
13. Chen L-Q., Zhao Y. *From classical thermodynamics to phase-field method.* Progress in Materials Science. 2022. V. 124. Art. 100868.
14. Zhao Y., Xing H., Zhang L. [et al.] *Development of phase-field modeling in materials science in China: a review.* Acta Metallurgica Sinica (English Letters). 2023. V. 36. P. 1749–1775.
15. Pobstenko Y. Z. *From the chemical potential tensor and concentration tensor to nonlocal continuum theories.* J. of Mathematical Sciences. 2020. V. 249. No. 3. P. 389–403.
16. Подстригач Я. С. *Диффузионная теория неупругости металлов.* ПМТФ. 1965. № 2. P. 67–72.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ БИФУРКАЦИИ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

П. Н. Конон

Белорусский государственный университет, Минск

Рассматривается поведение слоя жидкости на внешней и внутренней поверхностях вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле центробежных сил и сил поверхностного натяжения. В случае пренебрежения гравитацией возможно существование стационарного решения уравнений Навье – Стокса, описывающего установившееся движение жидкого слоя как твёрдого тела, жёстко вращающегося вместе с цилиндром, что подтверждается экспериментальными наблюдениями при определённых режимах вращения [1].

Бифуркации жидкого круглого цилиндрического слоя в плоском случае исследованы в [2]. Ветвление осесимметричных равновесных решений на внешней поверхности закрученного цилиндра рассмотрено в [3]. В [4] равновесные состояния на внутренней вращающейся цилиндрической поверхности исследованы на устойчивость на основе принципа минимума потенциальной энергии. В работах [5–7] проведён линейный и нелинейный анализ бифуркаций осесимметричных и плоских слоёв постоянной массы на внешней и внутренней поверхностях вращающегося цилиндра и показано, что ветвление решений определяется двумя параметрами. В [8] рассмотрена задача о формах относительного равновесия слоя на внутренней цилиндрической поверхности при её вращении и с помощью первого интеграла доказана невозможность существования волнообразных плоских слоёв.

Анализ литературных источников показал, что параметры ветвления в трёхмерном случае не определялись. В предлагаемом исследовании проведён общий линейный анализ ветвления слоёв постоянной толщины в другие пространственные решения.

Из уравнений движения и граничного условия Лапласа на нормальные напряжения в относительной цилиндрической системе координат η, φ, ξ получено нелинейное уравнение в частных производных для определения поверхности слоя $\eta = h(\varphi, \xi)$. В уравнение входят число Вебера We и неизвестное число Эйлера Eu, определяющее безразмерный перепад давлений в слое на поверхности цилиндра и в окружающей среде. Уравнение неизвестной поверхности дополняется условиями постоянства массы и периодичности решения на отрезке образующей цилиндра L и по окружной координате φ.

Проведён общий линейный анализ ветвления решений слоя постоянной толщины h_0 в другие стационарные неосимметричные решения $\eta = h(\varphi, \xi)$. Для слоя на внешней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки определены два бифуркационных значения параметров We_{nk} и Eu_{nk}, при которых наряду с цилиндрической поверхностью постоянной толщины h_0 появляются равновесные пространственные слои, имеющие по окружному направлению n максимумов либо минимумов на свободной поверхности, а на длине образующей L их количество равно k,

$$\mathrm{We}_{nk} = \frac{n^2 + h_0^2\alpha^2k^2 - 1}{h_0^3},$$

$$\mathrm{Eu}_{nk} = \frac{(3 - h_0^2\alpha^2k^2 - n^2)h_0^2}{2(n^2 + h_0^2\alpha^2k^2 - 1)} + \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{L}.$$

Для слоя на внутренней поверхности вращающегося цилиндра в приведённой формуле значение числа We меняется на $-\mathrm{We}$. Тогда, поскольку $\mathrm{We}_{nk} > 0$, ветвление в окружном направлении в отличие от слоя на внешней поверхности вращающегося цилиндра невозможно и величина $n = 0$. В итоге показано, что для рассматриваемой конфигурации ветвление решений происходит только вдоль оси цилиндра.

Решение нелинейных краевых задач для осесимметричных слоёв на внешней и внутренней поверхностях вращающегося цилиндра с периодическими краевыми условиями и постоянной массой проводится численно наряду с определением перепада давлений Eu. Получены формы относительного равновесия слоя, значительно отклоняющегося от слоя постоянной толщины. Построены полные ветви бифуркационных кривых, отражающих ответвление решений от кривой Eu(We), определяемой для случая постоянной толщины, в виде дерева нелинейных решений. Установлена неоднозначность решения: форма слоя зависит не только от физических свойств жидкости, скорости вращения и радиуса цилиндра, но и от перепада давлений в жидкости и окружающей среде.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ Республики Беларусь «Энергофизические системы и технологии», НИР «Гидродинамические и теплофизические аспекты процессов распыления и нанесения жидких материалов на твёрдые поверхности».

ЛИТЕРАТУРА

1. Moffatt H. K. *Behaviour of a viscous film on the outer surface of rotating cylinder.* J. de Mecanique. 1977. V. 16. № 5. P. 651–673.
2. Братухин Ю. К., Маурин Л. Н. *Равновесные фигуры вращающегося жидкого цилиндра.* ПММ. 1968. Вып. 4. С. 754–756.
3. Пухначев В. В. *Ветвление вращательно-симметричных решений, описывающих течения вязкой жидкости со свободной поверхностью.* ПМТФ. 1973. № 2. С. 127–134.
4. Бурмистрова О. А. *Равновесные формы жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра и их устойчивость.* Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11. № 1. С. 5–14.
5. Епихин В. Е., Конон П. Н., Шкадов В. Я. *О форме осесимметричного слоя жидкости на поверхности вращающегося цилиндра.* Изв. АН СССР, МЖГ. 1989. № 4. С. 23–27.
6. Епихин В. Е., Конон П. Н., Шкадов В. Я. *О форме жидкого слоя постоянной массы на поверхности вращающегося цилиндра.* ИФЖ. 1990.Т. 59. № 1. С. 80–84.
7. Конон П. Н., Жук А. В. *О бифуркациях равновесных движений слоя жидкости внутри вращающейся цилиндрической оболочки.* ИФЖ. 2017. Т. 90. № 2. С. 471–478.
8. Конон П. Н., Шпортько В. В. *Исследования плоских и осесимметричных слоев жидкости, неподвижных относительно внутренней поверхности вращающегося цилиндра.* Вестник БРФФИ. 2011. № 3. С. 98–110.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА КЛЕТОЧНОЙ ТКАНИ В ПОРАХ СКАФФОЛДА ПРИ ПРОКАЧИВАНИИ ПИТАТЕЛЬНОГО РАСТВОРА

И. В. Красняков, Д. А. Брацун

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

В тканевой инженерии направленный рост ткани осуществляется при помощи специальных конструкций – скаффолдов. Они представляют из себя пористую конструкцию из биосовместимого материала, которую засеивают стволовыми клетками или клетками определённого типа. Размер пор может варьироваться от нескольких единиц до сотен микрометров. Также поры могут иметь различную форму (в виде прямого канала, градиентного, градиентно-периодического и др.), которая напрямую влияет на скорость роста ткани и на её качество [1].

В данной работе представлена математическая модель роста эпителиальной ткани в порах скаффолда в условиях динамического биореактора. Под динамическим биореактором понимается скаффолд, через который непрерывно прокачивается питательный раствор.

При разработке математической модели использовались следующие подходы. Для моделирования роста клеточной ткани применялся подход, основанный на построении вершинных моделей [2]. В таких моделях каждая клетка представлена в виде многоугольника; клетки взаимодействуют посредством обмена механическими сигналами, действующими на их вершины. Динамика клеточной ткани задана упруго-деформируемым потенциалом (1), впервые введённым в работе [3]:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N(t)}\left[\mu P_i^2(t) + \eta(A_i(t) - A_0)^2 + \sigma\sum_{j=1}^{n_0(t)}(l_{ij}(t) - l_0)^2 + \phi\sum_{j=1}^{n_0(t)}(\alpha_{ij}(t) - \alpha_0)^2\right]. \qquad (1)$$

Здесь первое слагаемое описывает сократимость периметра клеток с коэффициентом μ, который можно интерпретировать как способность к сократимости цитоскелета клеток. Второе слагаемое описывает эластичность площади клетки с коэффициентом упругости η, где $A_i(t)$ – это текущая площадь клетки, а A_0 – среднее значение площади для всех клеток. Третий член в уравнении (1) описывает эластичность рёбер клетки, где σ – коэффициент эластичности ребра, $l_{ij}(t)$ – длина j-ребра i-клетки, а l_0 – средняя длина ребра, которая равна длине ребра правильного шестиугольника. Четвёртое слагаемое описывает эластичность округлой формы клетки с коэффициентом ϕ, где $\alpha_{ij}(t)$ – текущее значение j-угла i-клетки в радианах.

Учитывая, что клеточная ткань представляет собой высокодиссипативную среду, её механическое поведение описывается в рамках аристотелевой динамики, где инерционными эффектами пренебрегают. В этой модели скорость перемещения вершины клетки линейно пропорциональна действующей силе:

$$\overrightarrow{v}_\vartheta = k \cdot \overrightarrow{F}_\vartheta \cdot \mathrm{H}\left(\left|\overrightarrow{F}_\vartheta\right| - F_0\right), \qquad (2)$$

причём движение инициируется лишь при превышении порогового значения силы F_0, что отражает наличие внутреннего трения и механической памяти в ткани. Параметр k интерпретируется как коэффициент клеточной подвижности. Также в модели реализованы

процессы, происходящие в реальной ткани, а именно деление (рис. 1, а) и интеркаляция клеток (рис. 1, б). Процесс деления клеток описан как митотический, т. е. когда из одной материнской клетки появляются две одинаковые дочерние клетки со свойствами, наследуемыми от материнской. Интеркаляция – это естественный механизм, который позволяет снимать избыточные локальные напряжения в клеточных тканях.

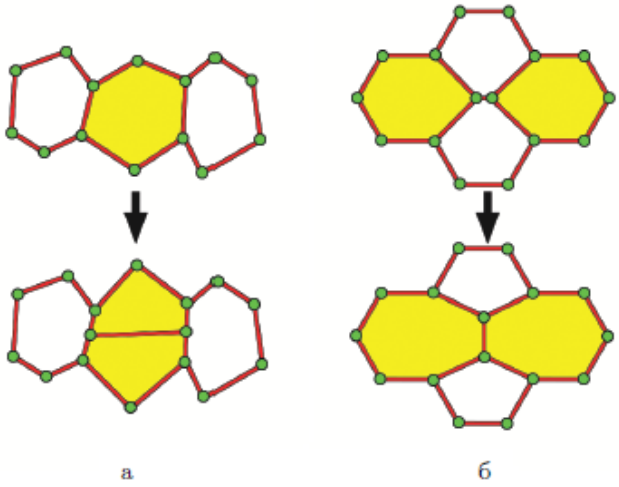


Рис. 1. Схематическое изображение: а – процесс деления клеток; б – процесс интеркаляции клеток. Зелёными точками отмечены вершины клеток, на которые действуют силы

Кроме механических взаимодействий клеток в системе вводится обмен химическими сигналами. В роли химического сигнала может выступать концентрация питательного вещества, которое необходимо клеткам для поддержания их жизнедеятельности. Клетки должны иметь способность потреблять и перераспределять химические сигналы между соседями. Эти процессы описываются системой уравнений реакции–диффузии. Благодаря учёту обмена химическими сигналами становится возможным моделировать хемомеханическое взаимодействие клеток, которые по своей природе являются хемоэластомерами.

Для моделирования гидродинамики питательного раствора в порах скаффолда был использован метод сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) [4]. Выбор данного подхода обусловлен его ключевыми преимуществами для решаемой задачи: во-первых, это бессеточный лагранжев метод, что позволяет естественным образом описывать деформации границ вычислительной области; последнее критически важно при моделировании роста ткани, изменяющей геометрию пор. Во-вторых, SPH легко адаптируется для моделирования течений в сложных микроканальных геометриях, где построение качественной структурированной сетки является трудоёмкой задачей.

В основе метода лежит аппроксимация поля сплошной среды набором дискретных частиц, каждая из которых переносит массу, импульс и другие физические свойства. Для вычисления локальных значений используется интегральное представление через сглаживающее ядро W. В качестве функции сглаживающего ядра выбран кубический сплайн (3):

$$W(\overrightarrow{r}, h) = \frac{1}{4\pi h^3} \begin{cases} (2-q)^3 - 4(1-q)^3, & 0 \le q < 1, \\ (2-q)^3, & 1 \le q < 2, \\ 0, & q \ge 2, \end{cases} \tag{3}$$

где h – радиус сглаживания частицы, а $q \equiv \overrightarrow{r}/h$. Данное ядро обеспечивает оптимальный баланс между гладкостью аппроксимации и вычислительной эффективностью [5]. Плотность в точке расположения частицы вычисляется как сумма масс соседних частиц, взвешенных ядром сглаживания:

$$\rho_a = \sum_b m_b W_{ab}. \tag{4}$$

Для замыкания системы уравнений Навье – Стокса в слабосжимаемом приближении используется уравнение состояния Тейта, связывающее давление p и плотность ρ:

$$p = p_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} - 1 \right], \tag{5}$$

где $p_0 = c_0^2 \rho_0 / \gamma$ – эталонная плотность, степенной показатель $\gamma = 7$ – значение для воды, а c_0 – скорость звука в среде. Последний параметр обычно принимается равным $c_0 = 10 v_{\max}$. Это необходимо для обеспечения численной устойчивости.

Уравнения движения для SPH-частицы записываются в лагранжевой форме, что позволяет исключить адвективный член и точно отслеживать траектории движения жидкости. Дискретный аналог уравнения движения имеет вид

$$\frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt} = -\sum_b m_b \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} + \sum_b m_b \frac{4\nu}{\rho_a + \rho_b} \frac{\overrightarrow{r}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{r_{ab}^2 + \eta^2} \overrightarrow{v}_{ab}, \tag{6}$$

где $\overrightarrow{v}$ – скорость, ν – кинематическая вязкость, η – динамическая вязкость.

Для моделирования взаимодействия жидкости с развивающейся тканью в порах скаффолда используется гибридный подход. Клетки ткани представляют собой подвижные твёрдые стенки, на которых задаётся условие прилипания с помощью виртуальных частиц. Это позволяет учитывать механическое воздействие потока на растущую клеточную ткань и, наоборот, изменение топологии потока по мере заполнения поры тканью.

Таким образом, комбинация вершинной модели клеточной ткани и SPH-модели течения жидкости позволяет провести численное исследование хемомеханического взаимодействия развивающейся ткани с динамическим потоком питательной среды в биореакторе. Подобная комбинация моделей выполнена впервые. Эта модель объединяет преимущества вершинных моделей (точное описание клеточной геометрии) и SPH-моделей (гибкость в моделировании жидкости). В представляемой работе рассмотрены сценарии обтекания жидкостью единичной клетки и течение в канале с развивающейся тканью.

Стоит отметить, что полученная корректная комбинированная математическая модель развивающейся ткани в условиях динамического биореактора открывает перспективы для решения задач и исследования сложных процессов в области тканевой инженерии.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-11-00338, https://rscf.ru/project/25-11-00338/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mukasheva F., Adilova L., Dyussenbinov A. [et al.] *Optimizing scaffold pore size for tissue engineering: insights across various tissue types.* Front Bioeng Biotechnol. 2024. V. 12. Art. 1444986.
2. Krasnyakov I., Bratsun D. *Cell-based modeling of tissue developing in the scaffold pores of varying cross-sections.* Biomimetics. 2023. V. 8. Art. 562.

3. Krasnyakov I. *Mathematical modeling of evolution of cell networks in epithelial tissues.* Quantitative Biology. 2024. V. 12. P. 286–300.
4. Cossins P. J. *Smoothed particle hydrodynamics.* arXiv. 2010. doi: 10.48550/arXiv.1007.1245
5. Song B., Pazouki A., Poschel T. *Instability of smoothed particle hydrodynamics applied to Poiseuille flows.* Comput Math Appl. 2018. V. 76. P. 1447–1457.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ МИКРОННЫХ КАПЕЛЬ РАСТВОРА СОЛИ ПРИ ИСПАРЕНИИ

Ю. Л. Кузнецова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Распылительная сушка водных растворов солей широко используется в промышленности, в том числе для получения микро- и нанопорошков с заданными свойствами. Условия сушки определяют морфологию (форму и внутреннюю структуру) образующихся кристаллических частиц, которая, в свою очередь, влияет на их механические характеристики и растворимость.

В работе представлена математическая модель [1] испарения и кристаллизации одиночной аэрозольной капли раствора соли микронного размера, описывающая фазовый переход «растворенное вещество – кристалл» в капле, размер и форма которой непрерывно изменяются со временем. Представлена процедура идентификации феноменологических параметров модели, определяющих критическое перенасыщение раствора и пористость кристаллической корки.

1. Модель испарения и кристаллизации капли раствора соли

Модель [1] описывает эволюцию капли четырьмя переменными: средней температурой капли T_*, числом молекул воды n_w, числом молекул соли, находящихся в кристаллическом $n_{s,c}$ и растворённом $n_{s,d}$ состояниях, см. рис. 1.

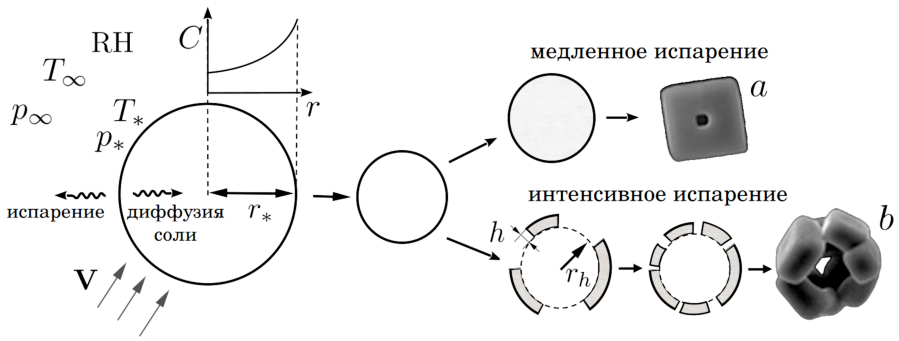


Рис. 1. Схема испарения капли раствора соли и характерная форма образующихся частиц. Фотографии взяты из работы [2]: a – RH = 40 %, b – RH = 10 %

Система уравнений баланса включает соотношения, описывающие изменение количества молекул воды в капле с учётом диффузии пара и снижения давления насыщенного пара над раствором:

$$\frac{dn_w}{dt} = \begin{cases} \dfrac{4\pi r_* D_{w,a} p_{sat}(T_\infty)\mathrm{RH}}{k_B T_\infty}, & n_w < n_{w,ad}, \\ \dfrac{4\pi r_h D_{w,a} p_{sat}(T_\infty)}{\alpha f_m}\left(\dfrac{\mathrm{RH}}{T_\infty} - \dfrac{1}{T_*}\dfrac{p_*(n_w, n_{s,c}, T_*)}{p_{sat}(T_\infty)}\right), & n_w \geq n_{w,ad}, \end{cases} \tag{1}$$

и изменение количества молекул соли, переходящих в кристаллическое состояние:

$$\frac{dn_{s,c}}{dt} = \begin{cases} 0, & n_w < n_{w,ad}, \\ -4\pi D_{s,l} r_* \dfrac{N_A}{M_s} (C_{sat} - C_{r_*}), & n_w \geq n_{w,ad} \quad \text{и} \quad C_{mean} < C_{sat}, \\ F(C_0, \delta, C_{s,sat}, n_w), & n_w \geq n_{w,ad} \quad \text{и} \quad C_{r_h} > C_{s,sat}, \end{cases} \tag{2}$$

и уравнение теплового баланса капли:

$$\frac{dT_*}{dt} = \frac{1}{c'_p m'} \left[f_T 4\pi r_* \chi_{a,wet} (T_\infty - T_*) + L\rho_w v_w \frac{dn_w}{dt} \right]. \tag{3}$$

Распределение массовой концентрации соли $C(r)$ в капле задаётся параболическим профилем с переменной толщиной градиентной зоны δ:

$$C(r) = \begin{cases} C_0, & \delta < r_h \quad \text{и} \quad 0 \leq r < (r_h - \delta), \\ C_0 + (C_{r_h} - C_0) \left(1 - \dfrac{r_h - r}{\delta}\right)^2, & \delta < r_h \quad \text{и} \quad (r_h - \delta) \leq r \leq r_h, \\ C_{center} + (C_{r_h} - C_{center}) \left(\dfrac{r}{r_h}\right)^2, & \delta = r_h \quad \text{и} \quad 0 \leq r \leq r_h, \end{cases} \tag{4}$$

где $r_h = r_* - h$ – радиус жидкой фазы капли, h – толщина кристаллической корки.

В результате испарения и роста зародышей формируются поликристаллические агрегаты. В модели предполагается, что кристаллы имеют форму параллелепипедов с квадратным основанием. Для учёта сокращения площади поверхности капли, через которую происходит испарение влаги при формировании корки, вводится параметр α — доля поверхности, доступная для испарения:

$$\alpha = \begin{cases} 1, & n_{s,c} = 0, \\ \min\left(\dfrac{4\pi r_*^2 - k_{nucleus} d^2}{4\pi r_*^2}, \alpha_{crust} \right), & n_{s,c} \neq 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $k_{nucleus}$ – количество монокристаллов, d – размер основания монокристалла.

Система уравнений (1)–(5) решалась численно, методом последовательного интегрирования дифференциальных уравнений с использованием явного метода Эйлера. Данный алгоритм является условно устойчивым. Сходимость наблюдается для шага по времени $dt < 5 \cdot 10^{-4}$ с. В расчётах преимущественно использовалось значение $dt = 10^{-4}$ с. Начальное состояние капли задаётся её радиусом r_0, температурой T_{*0} и массовой долей соли MFS (отношение массы соли к массе раствора). По значениям r_0 и MFS определяются начальное количество молекул воды n_{w0}, общее содержание молекул соли n_s, а также начальная массовая концентрация раствора в капле C_0.

В модель входят четыре феноменологических параметра, имеющих явный физический смысл: $k_{nucleus}$ – количество монокристаллов в сухой частице; $\varepsilon = d/h$ – отношение длин рёбер монокристалла; α_{crust} – минимальная доля поверхности капли, доступная для испарения (доля пор); $S_{crit} = C_{s,sat}/C_{sat}$ – критическое перенасыщение раствора.

2. Идентификация феноменологических параметров модели

2.1. Критический коэффициент пересыщения S_{crit} – это пороговое значение, при котором в системе начинается активное спонтанное зарождение кристаллов. Для его оценки использован стохастический подход на основе классической теории нуклеации, согласно которой выражение для скорости зародышеобразования J (м$^{-3}$с$^{-1}$) определяется как

$$J(S,T) = J_0 \exp\left(-\frac{\Delta G^{cr}}{k_B T}\right),\ \Delta G^{cr} = \frac{4\pi\gamma (r_c^{cr})^2}{3},\ (r_c^{cr})^2 = \frac{4\gamma^2 v_s^2}{k_B^2 T^2 \nu^2 \left[\ln\left(a_+ a_{0\pm}^{-1} S\right)\right]^2}. \qquad (6)$$

Здесь γ – поверхностное натяжение на границе кристалл – раствор, v_s – объём молекулы соли, ν – количество ионов в молекуле соли, $a_\pm/a_{0\pm}$ – отношение коэффициентов ионной активности. Кинетический предэкспоненциальный множитель:

$$J_0 = n^2 Z D_{s,l} r_c^{cr}, \quad \text{где} \quad Z = \sqrt{\frac{\Delta G^{cr}}{3\pi k_B T (n_c^{cr})^2}}, \qquad (7)$$

n (м$^{-3}$) – числовая концентрация ионов в растворе, $D_{s,l}$ – коэффициент диффузии соли в растворе, Z – фактор Зельдовича, $n_c^{cr} = 4/3[\pi (r_c^{cr})^3/v_s]$ – количество молекул соли в зародыше.

Параметр γ определялся на основе интерполяции модельно-экспериментальных данных работы [3]: для капель NaCl с радиусами $r \approx 5$ мкм, 7 мкм и 11 мкм в момент кристаллизации получены значения $\gamma \approx 0.0475$, 0.0645 и 0.0619 Дж/м^2 соответственно.

Алгоритм Монте-Карло на каждом временном шаге включает реализацию следующих этапов:

1. По значениям $S(r) = C(r)/C_{sat}$ и T с использованием (6)–(7) определяется средняя скорость формирования зародышей $J(S(r), T)$.
2. Вычисляется интенсивность формирования зародышей в объёме капли за шаг интегрирования dt:
$$\Lambda = dt \int_0^{r_h} 4\pi r^2 J\left(S(r), T\right)\, dr. \qquad (8)$$
3. Предполагая процесс пуассоновским, определяется вероятность появления зародыша: $P = 1 - \exp(-\Lambda)$.
4. Вероятность P сравнивается со случайным значением x из $[0, 1]$. Если $P > x$, текущее значение пересыщения принимается за критическое $S_{crit} = S$.

Результаты расчёта S_{crit} усредняются по 100 реализациям. Полученные значения для различных режимов испарения представлены в таблице 1.

Как следует из таблицы, с увеличением относительной влажности воздуха S_{crit} монотонно уменьшается, что отражает стохастическую природу нуклеации. При медленном испарении капля дольше находится в области слабого пересыщения, где возможна спонтанная нуклеация; при быстром испарении время пребывания в этой области сокращается, и кристаллизация сдвигается в область более высоких значений S_{crit}. Убывание S_{crit} с ростом температуры окружающего воздуха объясняется ускорением кинетики нуклеации: увеличение температуры снижает энергетический барьер образования критического зародыша.

Таблица 1. Режимы испарения капель раствора NaCl и соответствующие им параметры модели

Условия эксперимента [2]				S_{crit}	α_{crust}	$k_{nucleus}$
r_0, мкм	MFS	T_∞,K	RH,%			
19,4	0,05	294	0	1,637	0,35	27 ± 2
19,3	0,05	294	5	1,631	0,35	20 ± 2
18,7	0,05	294	10	1,626	0,34	14 ± 5
17,9	0,05	294	20	1,608	0,33	10 ± 3
19,4	0,05	294	30	1,599	0,29	5 ± 3
18	0,05	294	40	1,575	0,24	1

2.2. Параметр α_{crust}. При формировании жёсткой поликристаллической корки доля поверхности, доступная для испарения, уменьшается. Параметр α_{crust} определяется геометрией упаковки $k_{nucleus}$ монокристаллов на сферической поверхности.

В модели предполагается, что каждый монокристалл имеет форму параллелепипеда с квадратным основанием со стороной d и высотой h. Отношение $\varepsilon = d/h \approx 2$ определено по экспериментальным данным работы [2]. Занятая одним кристаллом площадь аппроксимируется площадью сферического сегмента $S_{1cryst} = 2\pi r_* h_1$ с радиусом основания $r_1 = d/\sqrt{2}$ (рис. 2).

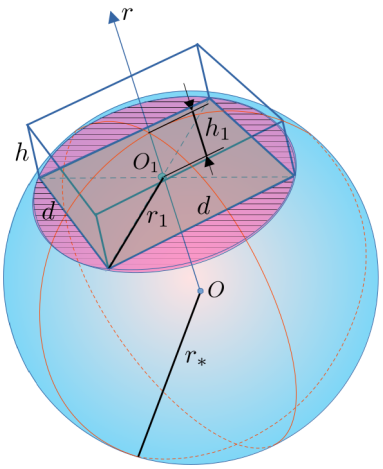


Рис. 2. Схема покрытия капли одним монокристаллом

В качестве критерия столкновения монокристаллов выступает условие, что суммарная увеличенная площадь, занимаемая $k_{nucleus}$ монокристаллами, начинает превышать площадь сферы:

$$k_{nucleus} \cdot 2\pi r_* h_1 = k_{nucleus} \cdot 2\pi r_* \left(r_* - \sqrt{r_*^2 - \frac{d^2}{2}} \right) \geq 4\pi r_*^2. \tag{9}$$

Значение параметра α (5), при котором впервые выполняется условие (9), принимается как α_{crust} – минимальная доля поверхности, доступная для испарения. Результаты расчёта α_{crust} для различных режимов испарения представлены в таблице 1.

При ускорении испарения α_{crust} возрастает, что соответствует формированию более рыхлой и пористой корки.

3. Результаты идентификации и верификация модели

Параметр $k_{nucleus}$ – количество монокристаллов в сухой частице – определён по микрофотографиям работы [2]. В таблице 1 представлены оценки для $k_{nucleus}$ в виде $\overline{k_{nucleus}} \pm \Delta k_{nucleus}$, где $\overline{k_{nucleus}}$ – выборочное среднее, $\Delta k_{nucleus}$ – полуширина 95 %-го доверительного интервала.

С использованием идентифицированных значений S_{crit}, α_{crust} и $k_{nucleus}$ проведено сравнение расчётной эволюции нормированного радиуса капли $r_*(t)/r_0$ с экспериментальными данными работы [2]. На рис. 3 представлены результаты для RH = 10 % и 30 %.

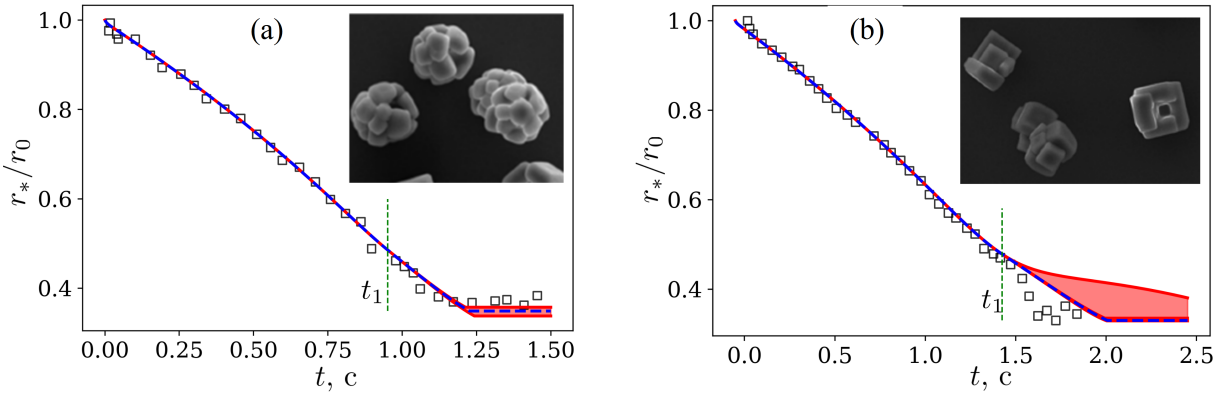


Рис. 3. Изменения нормированного радиуса капли раствора NaCl в процессе испарения при $T = 294$ K, MFS = 0.05: (a) RH = 10 %, $t_1 = 0.93$ c; (b) RH = 30 %, $t_1 = 1.36$ c. Фотографии и маркеры – экспериментальные данные [2], штриховые линии и закрашенные области – предсказания модели при $k_{nucleus} = \overline{k_{nucleus}}$ и между границами доверительного интервала

Из рис. 3 видно хорошее соответствие между расчётными и экспериментальными зависимостями в интервале $t < t_1$ (до начала кристаллизации). После начала кристаллизации ($t > t_1$) вариация параметра $k_{nucleus}$ в пределах доверительного интервала позволяет воспроизвести экспериментальный разброс данных. Наиболее явно это проявляется при RH = 30 %, где нижнее значение $k_{nucleus} = 2$ соответствует формированию цельного кристалла внутри капли, в результате чего не происходит сокращения площади поверхности, доступной для испарения.

Заключение

В работе проведена идентификация ключевых феноменологических параметров модели испарения и кристаллизации микронных капель раствора хлорида натрия.

С использованием стохастического подхода на основе классической теории нуклеации и алгоритма Монте-Карло определены значения критического пересыщения раствора S_{crit} для различных условий испарения. Показано, что S_{crit} монотонно убывает с ростом влажности и температуры воздуха, что объясняется увеличением времени пребывания капли в области слабого пересыщения при медленном испарении и снижением энергетического барьера образования зародыша при нагреве.

Предложена геометрическая оценка параметра α_{crust}, характеризующего минимальную долю поверхности капли, доступную для испарения, на основе условия столкновения растущих монокристаллов на сферической поверхности. Полученные значения α_{crust} демонстрируют рост пористости корки при интенсификации испарения, что соответствует формированию более рыхлых и полых частиц.

Верификация модели на экспериментальных данных [2] подтверждает её адекватность. Идентифицированные параметры S_{crit}, α_{crust} и $k_{nucleus}$ позволяют прогнозировать морфологию сухих частиц в технологических процессах распылительной сушки.

Работа выполнена в рамках госзадания, регистрационный номер темы № 121031700169-1

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецова Ю. Л. *Испарение и кристаллизация капель раствора соли.* Вестник Пермского университета. Физика. 2025. № 2. С. 5–16.
2. Hardy D. A., Robinson J. F., Hilditch T. G. [et al.] *Accurate measurements and simulations of the evaporation and trajectories of individual solution droplets.* J. Phys. Chem. 2023. V. 127. P. 3416–3430.
3. Cedeno R., Grossier R., Candoni N. [et al.] *CNT effective interfacial energy and pre-exponential kinetic factor from measured NaCl crystal nucleation time distributions in contracting microdroplets.* J. Chem. Phys. 2023. V. 158. Art. 194705.

ПОЛУЛАГРАНЖЕВЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Е. В. Кучунова, Г. А. Невоструев

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Математическое моделирование течений вязкого теплопроводного газа является важной задачей в гидродинамике. Подобные процессы описываются сложными системами уравнений, для решения которых требуются надёжные и устойчивые численные методы. Традиционные подходы часто сталкиваются с ограничениями на шаг интегрирования по времени, что усложняет расчёты.

Численное решение уравнений Навье – Стокса в настоящее время всё ещё сопряжено с большими трудностями, что обусловлено нелинейностью исходных уравнений, наличием областей больших градиентов и другими особенностями, возникающими при определённых параметрах и режимах газодинамических течений. Как следствие, возникает необходимость создания специальных численных методов решения этих уравнений. Несмотря на то что уже разработано много алгоритмов и специальных комплексов программ, проблема создания и применения эффективных численных методов и алгоритмов остаётся актуальной.

В представленной работе рассматривается движение вязкого теплопроводного газа в прямоугольном канале $D \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \partial D = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}} \cup \Gamma_{\text{rigid}}$ (рис. 1), где Γ_{in} – граница втекания, Γ_{out} – граница вытекания, Γ_{rigid} – твёрдая стенка.

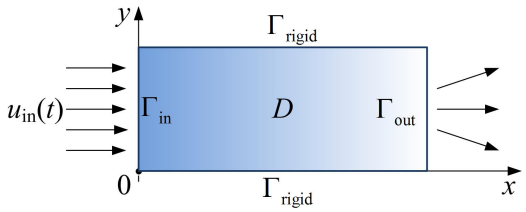


Рис. 1. Вычислительная область

Выпишем дифференциальные уравнения динамики вязкого теплопроводного газа [1] в виде безразмерных уравнений неразрывности, количества движения и внутренней энергии:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} = 0,\\
&\rho\frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y},\\
&\rho\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y},\\
&\rho\frac{de}{dt} + P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \Phi.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь d/dt – субстанциональная (полная) производная, т. е.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\,, \tag{2}$$

ρ – плотность; u и v – проекции вектора скорости на оси x и y; $P = (\gamma - 1)\rho e$ – давление; $\mu = [\gamma(\gamma-1)M^2 e]^\omega$ – динамический коэффициент вязкости; e – внутренняя энергия. Компоненты тензора напряжений τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{xy}, проекции теплового потока q_x, q_y и диссипативная функция Φ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\tau_{xx} = \frac{2}{3\mathrm{Re}}\,\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3\mathrm{Re}}\,\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right),\\
&\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\\
&q_x = -\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,\mu\,\frac{\partial e}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,\mu\,\frac{\partial e}{\partial y}\,,\\
&\Phi = \frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right],
\end{aligned} \tag{3}$$

где Re – число Рейнольдса, Pr – число Прандтля.

В начальный момент времени заданы значения всех искомых функций:

$$\rho(0,x,y) = \rho_0, \quad u(0,x,y) = u_0, \quad v(0,x,y) = v_0, \quad e(0,x,y) = e_0, \quad \forall (x,y) \in \overline{D}. \tag{4}$$

На границе втекания Γ_{in} – начальная скорость и плотность потока:

$$\rho|_{\Gamma_{\text{in}}} = \rho_{\text{in}}, \quad u|_{\Gamma_{\text{in}}} = u_{\text{in}},\ v|_{\Gamma_{\text{in}}} = 0, \quad \forall (t,x,y) \in [0,T] \times \Gamma_{\text{in}}. \tag{5}$$

На границе вытекания Γ_{out} – величина давления и условие отсутствия потока энергии:

$$P|_{\Gamma_{\text{out}}} = P_{\text{out}}, \quad \left.\frac{\partial e}{\partial n}\right|_{\Gamma_{\text{out}}} = 0, \quad \forall (t,x,y) \in [0,T] \times \Gamma_{\text{out}}. \tag{6}$$

На твёрдой стенке – условия прилипания и отсутствия потока внутренней энергии:

$$u|_{\Gamma_{\text{rigid}}} = 0, \quad v|_{\Gamma_{\text{rigid}}} = 0, \quad \left.\frac{\partial e}{\partial n}\right|_{\Gamma_{\text{rigid}}} = 0, \quad \forall (t,x,y) \in [0,T] \times \Gamma_{\text{rigid}}. \tag{7}$$

В работе для аппроксимации полной (субстанциональной или лагранжевой) производной по времени в каждом уравнении системы (1) используется метод траекторий [2, 3], который заключается в аппроксимации этой производной с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории движения частицы. Под названием метода характеристик, или полулагранжева метода, он впервые был применён в [4] для уравнения переноса массы, а также в работах [5, 6]. В статье [7] подробно описано применение полулагранжевого метода для численного решения уравнения неразрывности.

Дискретизация по пространству остальных слагаемых уравнений Навье – Стокса на каждом временно́м слое проводится методом конечных элементов с кусочно-билинейными базисными функциями и применением квадратурных формул [8, 9]. Для решения систем

алгебраических уравнений используется метод Якоби с улучшенным начальным приближением внутри внешних итераций по нелинейности. Как следует из тестовых расчётов [10], модификация уравнений Навье – Стокса обеспечивает повышение точности приближённого решения по сравнению с погрешностью для немодифицированных уравнений. Вместе с тем, применение комбинации методов траекторий и конечных элементов позволяет построить алгоритм, довольно эффективный с вычислительной точки зрения.

Параллельная версия алгоритма реализована для высокопроизводительных вычислительных систем гибридной архитектуры. В программной реализации параллельного алгоритма объединены технология передачи сообщений MPI и технология многопоточного программирования OpenMP. В параллельной программе осуществлена декомпозиция расчётной области по вычислительным узлам. В этом случае D делится на блоки, количество которых определяется количеством используемых вычислительных узлов. В каждом блоке вычисления производятся независимо. В связи с имеющейся зависимостью от данных с предыдущего временно́го слоя в каждом блоке выделены теневые грани для обмена значениями между соседними вычислительными узлами. Обмен значениями в теневых гранях осуществляется после каждого шага по времени при помощи пересылки сообщений. При проведении расчётов в пределах одного блока дополнительно применяется технология многопоточного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алоян А. Е. *Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере: Курс лекций.* М. : ИВМ РАН, 2002. 201 с.
2. Vyatkin A., Kuchunova E. *Conservative semi-Lagrangian numerical algorithm with decomposition of integration domain into tetrahedrons for three-dimensional advection problem.* Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2019. V. 11386 LNCS. P. 621–629.
3. Shaydurov V., Vyatkin A., Kuchunova E. *Semi-Lagrangian difference approximations with different stability requirements.* Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2018. V. 33(2). P. 123–135.
4. Pironneau O. *On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations.* Numerische Mathematik. 1982. V. 38. P. 309–332.
5. Douglas J., Russell T. *Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures.* SIAM J. Numer. Anal. 1982. V. 19. P. 871–885.
6. Магомедов К. М. *Метод характеристик для численного расчёта пространственных течений газа.* Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6. № 2. С. 313–325.
7. Вяткин А. В., Кучунова Е. В. *Параллельная реализация полулагранжевого метода для уравнения неразрывности.* Образовательные ресурсы и технологии. 2016. № 2(14). С. 423–429.
8. Shaydurov V., Liu T., Shchepanovskaya G., Yakubovich M. *A semi-Lagrangian approximation in the Navier–Stokes equations for the gas flow around a wedge.* AIP Conference Proceedings. 2015. V. 1684. Art. 090011.
9. Шайдуров В. В., Щепановская Г. И., Якубович М. В. *Численное моделирование течений вязкого теплопроводного газа в канале.* Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 4. С. 77–90.

10. Шайдуров В. В., Щепановская Г. И., Якубович М. В. *Применение метода траекторий и метода конечных элементов в моделировании движения вязкого теплопроводного газа.* Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 275–281.

МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ФАЗОВЫХ ИСКАЖЕНИЙ СВЕТОВОГО ПОЛЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ ДЛЯ ОПЕРЕЖАЮЩЕГО ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА НА ВХОДНОЙ АПЕРТУРЕ СИСТЕМЫ

Л. Н. Лавринова, В. В. Лавринов

Институт оптики атмосферы им. В. Е. Зуева СО РАН, Томск

При распространении лазерного излучения в турбулентной атмосфере адаптивная система, включающая в себя датчик волнового фронта Шэка – Гартмана и гибкое зеркало, выполняет коррекцию искажений излучения, которые были определены в предыдущий момент времени, но к моменту их устранения изменились. Анализ турбулентных искажений излучения, полученных в течение определённого времени из измерений датчика Шэка – Гартмана, позволяет сделать прогноз об искажениях излучения, регистрируемых в последующий момент времени, и использовать его, внося поправку в распределение фазы излучения. Алгоритм воспроизведения зеркалом фазовой поверхности, сформированной на основе анализа предыдущих измерений датчика Шэка – Гартмана, характеризуется как опережающая коррекция [1].

Суть опережающей адаптивной коррекции заключается в опережающем формировании фазы, отрабатываемой гибким зеркалом. Другими словами, на гибкое зеркало подаётся сигнал управления, рассчитанный таким образом, чтобы в момент окончания переходных процессов на зеркале сформировалась поверхность, соответствующая волновому фронту, который приходит на входную апертуру системы именно в этот момент времени. Особенности опережающего формирования фазовой поверхности светового поля исследуются на модели эволюции случайного поля фазовых флуктуаций, обусловленных атмосферной турбулентностью с учётом поперечного ветра.

Фазовые флуктуации светового поля или флуктуации показателя преломления подчинены закону мощности Колмогорова – Обухова [2]: $D^n(\rho) = C_n^2\rho^{2/3}$, где C_n^2 – структурная постоянная флуктуаций показателя преломления; $\vec{\rho} = (x, y)$– координаты в поперечном сечении светового поля.

Для анализа эволюции фазовых искажений светового поля будет применена модель случайного поля фазовых флуктуаций с параметром, характеризующим мощность спектральной плотности фазовых флуктуаций светового поля [3, 4]. Структурная функция флуктуаций показателя преломления примет вид

$$D^n(\rho, \alpha) = C_n^2\rho^{\alpha-3}, \tag{1}$$

где $3 < \alpha < 5$. Закон «двух третей» Колмогорова – Обухова [2] является частным случаем уравнения (1) при $\alpha = 3.67$.

Для плоской волны, прошедшей слой случайно-неоднородной среды толщиной L, спектральная плотность фазовых флуктуаций в приближении геометрической оптики имеет вид

$$F_s(\chi_{K,M}) = \tilde{A}(\alpha)r_0^{-5/3}(\chi_{K,M}^2 + \chi_0^2)^{-\alpha/2}\exp(\chi_{K,M}^2/\chi_m^2), \tag{2}$$

где $\tilde{A}(\alpha) = 1.182\pi^{-1}\Gamma(\alpha - 1)\cos(\alpha\pi/2)$; $\chi_{K,M} = \delta\chi\sqrt{K^2 + M^2}$; K, M – индексы узлов расчётной сетки размерностью $N_{grid} \times N_{grid}$; $\Delta\chi = 2\pi\ /(N_{grid}\Delta\vec{\rho})$ – шаг дискретизации по

пространственной частоте; $\Delta\vec{\rho}$ – расстояния между разнесёнными точками; $\chi_0 = 2\pi/L_0$, $\chi_m = 5.92/l_0$ – спектральные частоты, соответствующие внутреннему l_0 и внешнему L_0 масштабам турбулентных неоднородностей, соответственно. Радиус Фрида r_0 связан с C_n^2 выражением: $r_0 = (0.423k^2C_n^2L)^{-3/5}$, где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны; $\Gamma(r)$ – гамма–функция, распространяющая понятие факториала на дробные, отрицательные и комплексные значения аргумента r. При этом если $r < 0$ и $1-r > 0$, то выполняется равенство $\Gamma(r) = \pi[\sin(\pi r)\Gamma(1-r)]^{-1}$. Если $0 < r < 1$, то $\Gamma(r) = \Gamma(r+1)/r$. Если $r > 2$, то $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$.

Дискретное распределение двумерного массива коэффициентов Фурье для случайного поля фазовых флуктуаций $\Phi(x, y)$ выражается в виде

$$\Phi_{K,M} = [F_s(\chi_{K,M})]^{1/2}\Delta\chi\exp(i\phi_{rand}), \tag{3}$$

где ϕ_{rand} – равномерно распределённая фаза Фурье – образа в интервале $[0, 2\pi]$; с учётом ветрового переноса

$$\Phi_{K,M} = [F_s(\chi_{K,M})]^{1/2}\Delta\chi\exp(i\phi_{rand})\exp(i\Delta\chi t v_x K), \tag{4}$$

где $K = -N_{grid}/2 \div N_{grid}/2$; v_x – скорость поперечного переноса фазовых искажений светового поля в плоскости входной апертуры.

Дискретное распределение случайного поля фазовых флуктуаций вдоль входной апертуры адаптивной системы в момент времени t имеет вид

$$\Phi_{K,M} = [F_s(\chi_{K,M})]^{1/2}\Delta\chi\exp(i\phi_{rand})\exp(i\Delta\chi(t+\tau)v_x K) =$$

$$= [F_s(\chi_{K,M})]^{1/2}\Delta\chi\exp(i\phi_{rand})\exp(i\Delta\chi t v_x K)\exp(i\Delta\chi\tau v_x K) = \Phi_{K,M}\exp(i\Delta\chi\tau v_x K), \tag{5}$$

где $0 < \tau < \Delta t$ – длительность прогноза; Δt – время между кадрами; $\Phi_{K,M}$– дискретное распределение коэффициентов Фурье для случайного поля фазовых флуктуаций в момент времени t.

Световое поле $E(x, y) = \mathrm{Re}(E(x, y)) + i\mathrm{Im}(E(x, y)) = A(x, y)\exp(i\Phi(x, y))$ с распределением амплитуды $A(x, y)$, заданным, например, функцией Гаусса, и распределением фазы $\Phi(x, y)$, моделируемым согласно формулам (3)–(5), характеризуется интенсивностью $I(x, y) = (\mathrm{Re}^2(E(x, y)) + \mathrm{Im}^2(E(x, y)))^{1/2}$.

Опережающее формирование фазовой поверхности светового поля или его прогнозирование выполняется на основе анализа измерений датчика Шэка – Гартмана [5] и опирается на гипотезу «замороженной» турбулентности, согласно которой временные изменения турбулентных вихрей происходят гораздо медленнее, чем их перемещение в пространстве под действием среднего ветра. Поэтому необходимым условием прогнозирования фазовых искажений светового поля является то, что длительность прогноза τ должна быть много меньше времени ветрового переноса «замороженной» турбулентности через оптический пучок: $\tau_0 = 0.31r_0/v_x$.

Ветровой перенос неоднородностей во времени моделируется совокупностью коррелированных случайных фазовых экранов (3)–(5), формирующих световое поле на входной апертуре. Линзовый растр датчика разбивает световое поле на участки, сфокусированные в плоскость регистрации в пределах субапертуры. Перемещение «замороженных» неоднородностей показателя преломления под действием среднего ветра сопровождается смещением фокальных пятен в плоскости регистрации датчика и представляет чисто поступательное движение.

Распределение интенсивности в плоскости регистрации соответствует изображению на светочувствительной матрице видеокамеры, которое содержит фокальное пятно с характерным профилем в заданный момент времени и координатами энергетического центра тяжести фокального пятна (центроида). Координаты k-го центроида выражаются через интенсивности пикселей $I_{ij}(t)$ двумерного распределения $I(x, y)$ размерностью $N_a \times N_a$ в пределах субапертуры:

$$\xi_k(t) = \sum_{i=-N_a/2}^{N_a/2} i \sum_{j=-N_a/2}^{N_a/2} I_{ij}(t) \Big/ \sum_{i=-N_a/2}^{N_a/2} \sum_{j=-N_a/2}^{N_a/2} I_{ij}(t),$$
$$\eta_k(t) = \sum_{j=-N_a/2}^{N_a/2} j \sum_{i=-N_a/2}^{N_a/2} I_{ij}(t) \Big/ \sum_{i=-N_a/2}^{N_a/2} \sum_{j=-N_a/2}^{N_a/2} I_{ij}(t). \tag{6}$$

На основе измеренных координат ξ_k, η_k посредством разложения волновой функции по 35-ти полиномам Цернике реконструируется волновой фронт, и рассчитывается деформация σ^2 (дисперсия амплитуды колебаний волнового фронта относительно его среднего значения). Для моделирования физического «сдвига» неоднородностей атмосферы в плоскости линзового растра ($N_{lens} \times N_{lens} = 8 \times 8$) использовалась модель атмосферной турбулентности (2)–(5), где скорость поперечного ветрового переноса (4 м/с) соответствовала времени между кадрами $\Delta t = 5$ мс при частоте камеры 200 Гц. Величина временно́й задержки варьировалась: 1 мс, 2 мс, 3 мс. Усреднение деформации σ^2 выполнялось по выборке распределений реконструированных волновых фронтов размерностью 512×512 для моделируемых случайных фазовых экранов или наборов случайных неоднородностей показателя преломления ($r_0 = 5$ см).

На рис. 1 изображены профили четырёх случайных экранов с распределением $\Phi_{K,M}(x, y)$, где $y = 0$; x меняется от значения $-N_{grid}/2$ до $N_{grid}/2$.

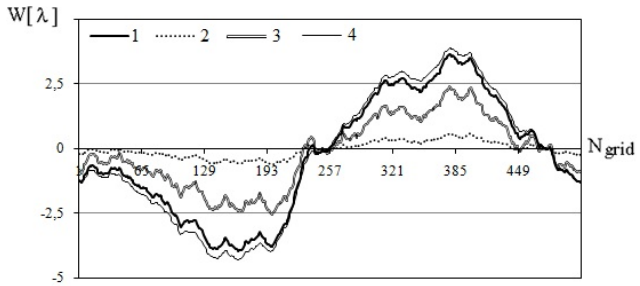


Рис. 1. Профили моделируемых случайных фазовых экранов в зависимости от параметра α : $\alpha = 3.67$ соответствует кривой 1; $\alpha = 3.05$ – 2; $\alpha = 3.3$ – 3; $\alpha = 4.0$ – 4

Выборка случайных фазовых экранов формируется варьированием параметра α, характеризующим степень изменения C_n^2. Варьирование α задаётся функцией $f(t) = 4.4 - -\exp(-0.01(t - 1))$, что обеспечивает формирование последовательности из неповторяющихся моделей случайных фазовых экранов. Идеальная система, работающая без временно́й задержки, характеризуется $\tau = 0$ *мс*. Оцениваются фазовые флуктуации светового поля в зависимости от длительности прогноза τ (рис. 2).

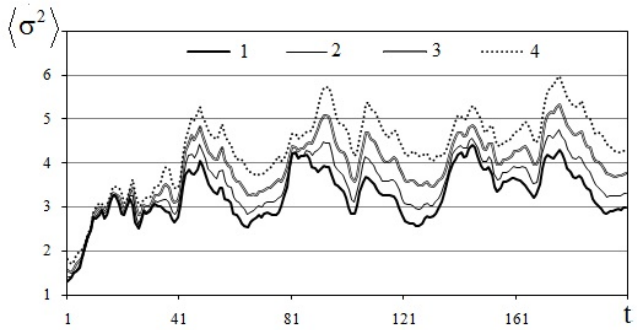


Рис. 2. Изменение усреднённых по выборке реконструированных волновых фронтов (с учётом параметра α и поперечного ветрового переноса) значений σ^2 в зависимости от величины задержки, где кривая 1 соответствует $\tau = 0$ *мс*, 2 – $\tau = 1$ *мс*, 3 – $\tau = 2$ *мс*, 4 – $\tau = 3$ *мс*

С увеличением τ дисперсия амплитуды колебаний фазы относительно её среднего значения σ^2 по выборке результатов реконструкции смоделированных фазовых экранов (2–5) меняется относительно величины задержки равномерно.

Для данной численной модели эволюции фазовых искажений светового поля среднеквадратическая ошибка в результате традиционного управления адаптивной системой с ростом величины задержки возрастает в 1.16τ раз.

Включение датчика волнового фронта в контур адаптивной системы с целью уменьшения среднеквадратической ошибки управления предполагает использование инструмента, обеспечивающего по его измерениям опережающее формирование волнового фронта.

Работа выполнена в рамках госзадания ИОА СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антошкин Л. В., Лавринова Л. Н., Лавринов В. В. *Адаптивная оптическая следящая система с контуром опережающей коррекции.* Патент на изобретение №2799987 зарегистрирован в государственном реестре изобретений 14.07.2023.
2. Татарский В. И. *Распространение волн в турбулентной атмосфере.* М. : Наука, 1967. 548 с.
3. Лавринов В. В. *Цифровой двойник стенда эмуляции фазовых искажений излучения в турбулентной атмосфере методами адаптивной оптики.* Материалы Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвящённой 50-летию ИВМ СО РАН, (18-20 сентября 2024 г., Красноярск). С. 114–116.
4. Toselli I. *Introducing the concept of anisotropy of different scales for modeling optical turbulence* J. Opt. Soc. Amer. A. 2014. V. 31. P. 1868–1875.
5. Лавринова Л. Н., Лавринов В. В. *Численная модель датчика волнового фронта Шэка – Гартмана на стенде адаптивной системы.* Материалы Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвящённой 50-летию ИВМ СО РАН (18–20 сентября 2024 г., Красноярск). С. 117–120.

АСПЕКТЫ ОПЕРЕЖАЮЩЕГО ФОРМИРОВАНИЯ ФАЗОВЫХ ИСКАЖЕНИЙ СВЕТОВОГО ПОЛЯ НА ВХОДНОЙ АПЕРТУРЕ СИСТЕМЫ

Л. Н. Лавринова, В. В. Лавринов

Институт оптики атмосферы им. В. Е. Зуева СО РАН, Томск

Динамические свойства адаптивной оптической системы выражаются тем, что для каждого её элемента время и положение в фазовом пространстве находятся в функциональной зависимости от времени и положения в фазовом пространстве других её элементов, и описываются вектором состояния, т. е. набором параметров, представляющих состояние системы на некоторый момент времени.

Световое поле на входной апертуре системы линзовым растром датчика волнового фронта Шэка – Гартмана [1] разбивается на участки, сфокусированные в плоскость регистрации в пределах субапертуры, и представимые распределением интенсивности $I(x, y)$, каждое из которых соответствует изображению на светочувствительной матрице видеокамеры, содержащему фокальное пятно с характерным профилем. Смещения k-го центра тяжести пятна относительно центра распределения $\Delta\xi_k$ и $\Delta\eta_k$ в предположении, что $I(x, y)$ является непрерывной функцией в области $\Psi = [a, b] \times [a, b]$, определяются локальными наклонами [2]:

$$\begin{gathered}\alpha_k = F_{lens}^{-1}\Delta\xi_k = \\ = F_{lens}^{-1}\left(\iint\limits_{\Psi} xI(x,y)dxdy \Big/ \iint\limits_{\Psi} I(x,y)dxdy - \iint\limits_{\Psi} xI_0(x,y)dxdy \Big/ \iint\limits_{\Psi} I_0(x,y)dxdy\right), \\ \beta_k = F_{lens}^{-1}\Delta\xi_k = \\ = F_{lens}^{-1}\left(\iint\limits_{\Psi} yI(x,y)dxdy \Big/ \iint\limits_{\Psi} I(x,y)dxdy - \iint\limits_{\Psi} xI_0(x,y)dxdy \Big/ \iint\limits_{\Psi} I_0(x,y)dxdy\right),\end{gathered} \tag{1}$$

где $I_0(x, y)$-распределение – функция Гаусса; F_{lens} – фокусное расстояние линзы.

Информация о состоянии системы в некоторый момент времени представляется измеренными локальными наклонами (1), в которых закодирована вся информация о пространственно-временном разрешении адаптивной системы.

К факторам, влияющим на пространственно-временно́е разрешение адаптивной системы, относятся временна́я задержка, присущая всем динамическим системам, нелинейность отклика датчика, изменение параметров турбулентности и вычислительные ограничения, вносимые датчиком волнового фронта.

Адаптивная система, как динамическая система, характеризуется временем срабатывания, которое складывается из времени обработки информации, полученной видеокамерой, времени вычисления управляющих воздействий на адаптивное зеркало, времени отработки зеркала, включающее инерционность и переходные процессы механической конструкции данного зеркала. Таким образом, корректирующая поверхность адаптивного зеркала формируется из поверхности волнового фронта, присутствующего на входной апертуре адаптивной системы, заведомо с опозданием на величину τ_a, определяющую как временную задержку системы, так и необходимую долгосрочность прогноза τ.

Нелинейность отклика датчика возникает, когда локальные наклоны слишком велики, тогда фокальные пятна от микролинз смещаются за пределы субапертур, вызывая пространственное перекрещивание пучков и искажение данных. Это происходит, когда сильные аберрации вызывают резкие изменения наклона волнового фронта и фокус микролинзы уходит в соседнюю зону. При сильных искажениях и перекрещивании пучков фокальные пятна могут сливаться.

Чтобы преодолеть нелинейность отклика датчика, можно путём калибрования получить матрицу реконструкции, которая будет компенсировать систематические нелинейности. Также вместо однократного измерения система может совершать несколько мелких шагов, снижая волновой фронт до диапазона, где отклик датчика линеен. И, наконец, чтобы увеличить диапазон измеряемых углов, можно уменьшить фокусное расстояние микролинз. Изначально датчик проектируется на линейную зависимость смещения фокуса от угла падения пучка, и перед началом измерений датчик калибруется.

Когда речь идет об изменении параметров атмосферной турбулентности, то имеется в виду изменение структурной характеристики показателя преломления C_n^2, которая определяет интенсивность оптической неоднородности атмосферы, и радиуса Фрида r_0, который описывает интегральный масштаб искажений для конкретной апертуры телескопа или оптико-электронной лазерной системы. Для адаптивных оптических систем изменение параметров важно не только в пространстве, но и во времени. Согласно гипотезе «замороженной» турбулентности, оптические вихри не меняют свою структуру мгновенно, а переносятся ветром как единое целое. Скорость изменения фазовых искажений характеризуется временем ветрового переноса «замороженной» турбулентности через оптический пучок. Атмосферная постоянная времени τ_0 определяется в виде: $\tau_0 = 0,31r_0/V_x$, где V_x – скорость поперечного переноса фазовых искажений светового поля в плоскости входной апертуры системы, усреднённая по длине трассы распространения [3] .

Если C_n^2 растёт, другими словами, если атмосферная турбулентность усиливается, соответственно, уменьшается значение радиуса Фрида, то и атмосферная постоянная времени уменьшается. Для систем адаптивной оптики это означает, что время задержки контура управления должно уменьшаться, а частота работы датчика волнового фронта расти, чтобы успевать за динамическими изменениями атмосферы.

Для реальных систем, если $\tau_0 > \tau_a$, то система успевает за изменениями атмосферы, и ошибка запаздывания минимальна. Если $\tau_0 < \tau_a$, то коррекция выполняется по атмосфере, которая уже сместилась ветром на входной апертуре системы, и система начинает вносить дополнительные фазовые искажения вместо их компенсации [4]. Чтобы компенсировать фазовые искажения излучения, необходимо, чтобы гибкое зеркало отрабатывало те искажения, которые приходят на входную апертуру системы именно в этот момент времени. Эти искажения представляют волновой фронт, сформированный с опережением на основе анализа турбулентных искажений светового поля, полученных в течение определённого времени из предыдущих измерений датчика Шэка – Гартмана.

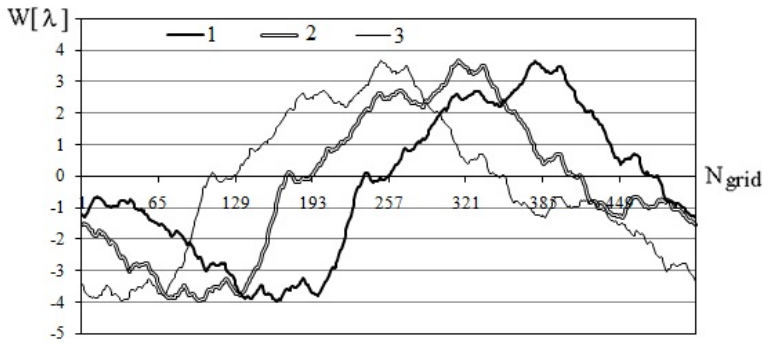
Важным аспектом, влияющим на пространственно-временно́е разрешение адаптивной системы, являются вычислительные ограничения, связанные с регистрирующей (светочувствительной матрицей видеокамеры) и алгоритмической частями датчика волнового фронта.

Измерения, полученные датчиком волнового фронта Шэка – Гартмана, представляются в плоскости регистрации в пределах субапертур распределениями интенсивности, по которым рассчитываются координаты центроидов. Смещения центроидов относительно центров распределений интенсивности пропорциональны локальным углам наклона.

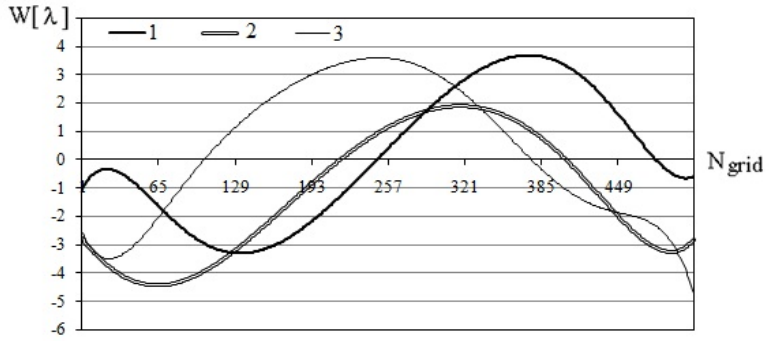
Количество фотонов, регистрируемых светочувствительной матрицей видеокамеры в пределах пикселя, является фактически единственной величиной, определяющей точность измерения локальных наклонов волнового фронта. Шумовая составляющая или фоновая засветка сигнала в плоскости регистрации излучения даёт ошибку в определении координат центроидов любыми алгоритмами оценивания излучения в фокальной плоскости. Но оценивание произведения регистрируемого распределения интенсивности и двумерного распределения Гаусса в качестве весовой функции, анализируемого в пределах окна анализа размером, соответствующим дисперсии нормального распределения Гаусса, обеспечивает быстродействие и точность измерения локальных наклонов волнового фронта пучка в плоскости регистрации [5].

Ошибка имеет место и при реконструкции волнового фронта посредством разложения волновой функции по базовым полиномам, например, по полиномам Цернике, ортогональным в круге единичного радиуса.

В основе построения прогноза опережающего волнового фронта лежит гипотеза «замороженной» турбулентности, согласно которой оптические неоднородности под действием поперечной составляющей скорости ветра переносятся неизменными вдоль входной апертуры системы. На рис. 1, а представлен набор случайных неоднородностей показателя преломления или моделируемый случайный фазовый экран [2] в моменты времени $t; t_1$, при условии, что $t - t_1 < \tau_0$; t_2, при $t - t_2 < \tau_0$.



а



б

Рис. 1, а – Профили моделируемых волновых фронтов размерностью $N_{grid} = 512$, интенсивностью $r_0 = 5$ *см* в моменты времени (кривая 1); t_1 (2); t_2 (3);
б – результаты реконструкции по 35–ти полиномам Цернике

Алгоритм реконструкции волнового фронта включает в себя решение матричного уравнения, где перестановка в матрице хотя бы двух элементов приводит к новому результату решения матричного уравнения.

На рис. 1, б реконструированные волновые фронты не демонстрируют поступательного движения одного из них относительно других вдоль входной апертуры системы в отличие от моделируемых волновых фронтов, иллюстрирующих линейное смещение неоднородностей показателя преломления, рис. 1, а.

Оптимальным способом опережающего формирования волнового фронта на входной апертуре адаптивной системы на основе анализа предыдущих фазовых искажений светового поля, измеренных датчиком волнового фронта, является применение фильтра Калмана. Этот фильтр может предсказывать состояние атмосферы на 1–2 шага вперед, компенсируя задержку электроники [6].

Архитектура фильтра Калмана строится с учётом теории прогнозирования Колмогорова, статистики фазовых флуктуаций светового поля Татарского, применённой в пределах действия гипотезы «замороженной» турбулентности Тейлора для измерений датчика волнового фронта Шэка – Гартмана, вычисленных посредством нейросети [5].

Работа выполнена в рамках госзадания ИОА СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков М. В., Богачев В. А., Стариков Ф. А., Шнягин Р. А. *Численные исследования динамической адаптивной фазовой коррекции турбулентных искажений излучения и оценка их временных характеристик с помощью датчика Шэка–Гартмана.* Оптика атмосферы и океана. 2021. Т. 34. № 07. С. 547–554.
2. Lavrinov V. V., Antoshkin L. V., Lavrinova L. N., Selin A. A. *Wavefront tilt correction on an adaptive optical system stand.* Instruments and Experimental Techniques. 2025.V. 68. № 1. P. 102–107.
3. Tokovinin A. *Measurement of seeing and the atmospheric time constant by differential scintilations.* Appl. Opt. 2002. V. 41. Iss. 10. P. 957–964.
4. Рукосуев А. Л., Богачев В. А., Волков М. В. [и др.] *Компенсация динамических флуктуаций волнового фронта лазерного излучения в условиях турбулентной среды.* Оптика атмосферы и океана. 2025. Т. 38. № 12. С. 976–982.
5. Лавринова Л. Н., Лавринов В. В., Антошкин Л. В. *Численное исследование центроидирования изображения оптического излучения в плоскости регистрации.* Математическая физика и компьютерное моделирование. 2025. Т. 28. № 4. С. 120–133.
6. Le Roux B., Conan J.-M., Kulcsar C. [et al.] *Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics.* JOSA A. 2004. V. 21. No. 7. P. 1261–1276.

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ С ТОНКИМ ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, СОЕДИНЁННЫМ ШАРНИРНО С ПОЛНОСТЬЮ ОТСЛОИВШИМСЯ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Н. П. Лазарев

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

Предложена новая математическая модель равновесия пластины с двумя тонкими жёсткими включениями, соединёнными шарнирным соединением. Предполагается, что одно включение не отслаивается от упругой матрицы пластины, в то время как второе включение полностью отслаивается с обеих сторон, образуя две трещины. На кривых, описывающих трещины, накладываются нелинейные условия типа Синьорини, ранее использованные для моделей с включениями с неполным отслоением [1,2]. Установлено существование решения вариационной задачи. Для достаточно регулярных решений показано, что вариационная задача может быть эквивалентно представлена в дифференциальной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хлуднев А. М. *Задачи теории упругости в негладких областях.* М. : Физматлит, 2010. 252 с.
2. Rudoy E. M. *Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a thin delaminated rigid inclusion.* J. Appl. Ind. Math. 2016. V. 10. P. 264–276.

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ И ИНТЕНСИВНОСТИ ИСПАРЕНИЯ НА СТРУКТУРУ ЖИДКОСТНЫХ ПЛЁНОК

Е. В. Ласковец

Алтайский государственный университет, Барнаул

Определение условий на свободных границах и границах раздела жидкости в рамках исследования течений тонких слоёв представляет собой важный, но достаточно сложный аспект математического моделирования подобных процессов. Корректная формулировка граничных условий позволяет проанализировать влияние различных факторов на изменение структуры течения [1].

Рассматривается течение тонкой плёнки жидкости под влиянием гравитации и градиента температуры на твёрдой подложке. Двумерная односторонняя модель сформулирована на основе классических уравнений конвекции при умеренных числах Рейнольдса. Граничные условия на подвижной границе раздела обобщены с учётом описания процесса испарения [1, 2].

На основе параметрического анализа определены факторы, влияющие на структуру потока. Сформулированы эволюционные уравнения для расчёта толщины слоя жидкости. Реализован численный алгоритм, позволяющий моделировать периодическое стекание. Установлены предельные значения безразмерных параметров, учитывающих энергозатраты на деформацию поверхности под влиянием эффектов испарения и сил Марангони. Проведено сравнение полученных предельных значений параметров для математических моделей, основанных на уравнениях Навье – Стокса и Обербека – Буссинеска.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2024–2026) (госзадание FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. В. *Тепломассообмен на поверхности раздела жидкость – пар.* Известия РАН. МЖГ. 2011. № 5. С. 97–107.
2. Laskovets E. V. *Mathematical modeling of the thin liquid layer runoff process based on generalized conditions at the interface parametric analysis and numerical solution.* J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2023. V. 16. № 1. P. 56–65.

О ТРЁХМЕРНОМ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ ПРИ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Е. Н. Лемешкова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассматривается трёхмерное течение вязкой несжимаемой жидкости в слое постоянной толщины l на плоской твёрдой неравномерно нагретой поверхности. На свободной поверхности $y = 0$ задано условие теплового контакта, поверхностное натяжение σ квадратично зависит от температуры: $\sigma(\theta) = \sigma_0 + \eta(\theta - \theta_0)^2$, σ_0, η, θ_0 – положительные постоянные. Температура в жидкости распределена линейно по x, y: $\theta - \theta_0 = a(z)x + b(z)y + d(z)$, где $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $-l < z < 0$. Пусть

$$u_1 = [f(z) + h(z)]x, \quad u_2 = [f(z) - h(z)]y, \quad u_3 = -2\int\limits_0^z f(\xi)\,d\xi \quad -$$

компоненты вектора скорости, $p(x, y, z)$ – давление, тогда стационарное течение в слое, соответствующее установлению на свободной поверхности жидкости баланса касательных термокапиллярных и вязких напряжений, описывается следующей совокупностью уравнений и граничных условий:

$$\begin{gathered} f^2 + h^2 - 2f_z\int\limits_0^z f\,d\xi = \nu f_{zz} - s_1, \quad 2fh - 2h_z\int\limits_0^z f\,d\xi = \nu h_{zz} - s_2, \\ a(f+h) - 2a_z\int\limits_0^z f\,d\xi = \chi a_{zz}, \quad b(f-h) - 2b_z\int\limits_0^z f\,d\xi = \chi b_{zz}, \quad -2d_z\int\limits_0^z f\,d\xi = \chi d_{zz}, \end{gathered} \tag{1}$$

$$f(-l) = h(-l) = 0, \quad \int\limits_{-l}^0 f(z)\,dz = 0, \quad a(-l) = a_{10}, \quad b(-l) = b_{10}, \quad d(-l) = d_{10}, \tag{2}$$

$$f_z(0) = h_z(0) = \eta\mu^{-1}a^2(0), \quad a_z(0) = q_{10}, \quad b_z(0) = q_{20}, \quad d_z(0) = q_{30}. \tag{3}$$

В уравнениях (1) $\nu > 0$, $\chi > 0$ – постоянные кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости соответственно. Давление представимо в виде

$$\frac{1}{\rho}\,p(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(s_1x^2 + s_2y^2\right) - 2\left(\int\limits_{z_0}^z f\,d\xi\right)^2 - 2\nu f - gz + \frac{1}{\rho}\,p_0$$

с произвольными постоянными p_0, s_1, s_2; ρ – плотность жидкости, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, $g > 0$ – ускорение свободного падения. В равенствах (2) a_{10}, b_{10}, d_{10} – известные постоянные. Первые два условия в (3) суть следствия динамического условия, а остальные диктуются заданием на свободной поверхности потока тепла $q = q_{10}x + q_{20}y + q_{30}$. Из условия для нормальных напряжений получаем, что свободная поверхность остается плоской. Данное

предположение может выполняться, например, при действии достаточно большого капиллярного давления (величина $\sigma_0 \gg 1$). Задачи для функций $b(z)$ и $d(z)$ могут быть решены после определения функций $f(z)$, $h(z)$, $a(z)$, их решение не влияет на гидродинамическую часть задачи. В связи с этим ограничимся анализом обратной краевой задачи для функций $f(z)$, $h(z)$, $a(z)$, в которой градиенты давления $s_{1,2}$ также подлежат определению.

Введём следующие безразмерные функции и параметры:

$$z = l\xi, \quad a = a_{10}A, \quad (h, f) = \frac{\nu}{l^2}\,(H, F)\,, \quad s_{1,2} = \frac{\chi^2}{l^4}\,S_{1,2},$$

$$\mathrm{M} = \frac{\eta a_{10}^2 l}{\rho\nu^2} - \text{число Марангони}, \quad \mathrm{P} = \frac{\nu}{\chi} - \text{число Прандтля}.$$

Если положить $H(\xi) = 0$, тогда исходная задача является осесимметрической. Сделаем замену $\xi' = \xi + 1$ и $W = -2\int_0^\xi F(\zeta)\,d\zeta$, тогда для функций $W(\xi), A(\xi)$ и параметра S получим нелинейную двухточечную краевую задачу (штрихи опущены)

$$\frac{1}{2}\,W_\xi^2 - WW_{\xi\xi} + W_{\xi\xi\xi} + 2S = 0, \quad A_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}AW_\xi - \mathrm{P}A_\xi W = 0 \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad \xi = 0: \quad W = 0, \quad W_\xi = 0, \quad A = 1, \\ &\text{при} \quad \xi = 1: \quad W = 0, \quad W_{\xi\xi} = -2\mathrm{M}A^2, \quad A_\xi = \mathrm{Q}. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение задачи (4), (5) при $\mathrm{M} = 0$ таково:

а) при $\mathrm{Q} = 0 \quad W^{(0)} = 0, \quad F^{(0)} = 0, \quad A^{(0)} = 1;$

б) при $\mathrm{Q} \neq 0 \quad W^{(0)} = 0, \quad F^{(0)} = 0, \quad A^{(0)} = \mathrm{Q}\xi + 1.$

При $|\mathrm{M}| \ll 1$ решение ищем в виде

$$W = \mathrm{M}W^{(1)}, \quad S = \mathrm{M}S^{(1)}, \quad A = A^{(0)} + \mathrm{M}A^{(1)}, \tag{6}$$

где порядок величин $W^{(1)}$, $S^{(1)}$, $A^{(1)}$ равен единице. Подставив (6) в систему (4), (5) и пренебрегая квадратичными по M членами, получим линейную задачу для $W^{(1)}$, $S^{(1)}$ и $A^{(1)}$. После решения полученной задачи для функций W, A и постоянной S с точностью до $O(\mathrm{M}^2)$ имеем

$$\begin{gathered} W = \mathrm{M}(\mathrm{Q}+1)(\xi^3 - \xi), \quad S = 1.5\mathrm{M}(\mathrm{Q}+1)^2, \\ A = \mathrm{Q}\xi + 1 - \frac{\mathrm{MP}(\mathrm{Q}+1)^2}{360}\Big(\mathrm{Q}\,(9\xi^5 - 15\xi^4) - 3\mathrm{Q}\xi^6 - 4.5(1-\mathrm{Q})\xi^5 + 7.5\xi^4 + (7\mathrm{Q}+5)\xi\Big). \end{gathered} \tag{7}$$

Согласно [1], преобразуем переменные, входящие в уравнения (4), следующим образом:

$$\xi = \gamma_1\overline{\xi}, \quad W = \gamma_2\overline{W}, \quad A = \overline{A}, \tag{8}$$

где $\gamma_k \neq 0$ — параметры, подлежащие определению, $k = 1, 2$. При условии

$$\gamma_2 = \gamma_1^{-1} \tag{9}$$

преобразованные уравнения (4) примут вид

$$\overline{W}'^2 - 2\overline{W}\,\overline{W}'' + 2\overline{W}''' + 4\overline{S} = 0, \quad \overline{A}'' + \mathrm{P}(2\overline{A}\,\overline{W}' - \overline{A}'\,\overline{W}) = 0, \tag{10}$$

где $\overline{S} = \gamma_1^4 S$.

Граничные условия в точке $\xi = 0$ в результате преобразования (8) таковы:

$$\overline{\xi} = 0: \quad \overline{W} = 0, \quad \overline{W}' = 0, \quad \overline{A} = 1. \tag{11}$$

Недостающими условиями при $\overline{\xi} = 0$ являются условия на W'' и A'. Применяя к этим функциям преобразования (8) и требуя их независимости от γ_1, получим

$$\overline{\xi} = 0: \quad \overline{W}'' = 1, \quad \overline{A}' = 1.$$

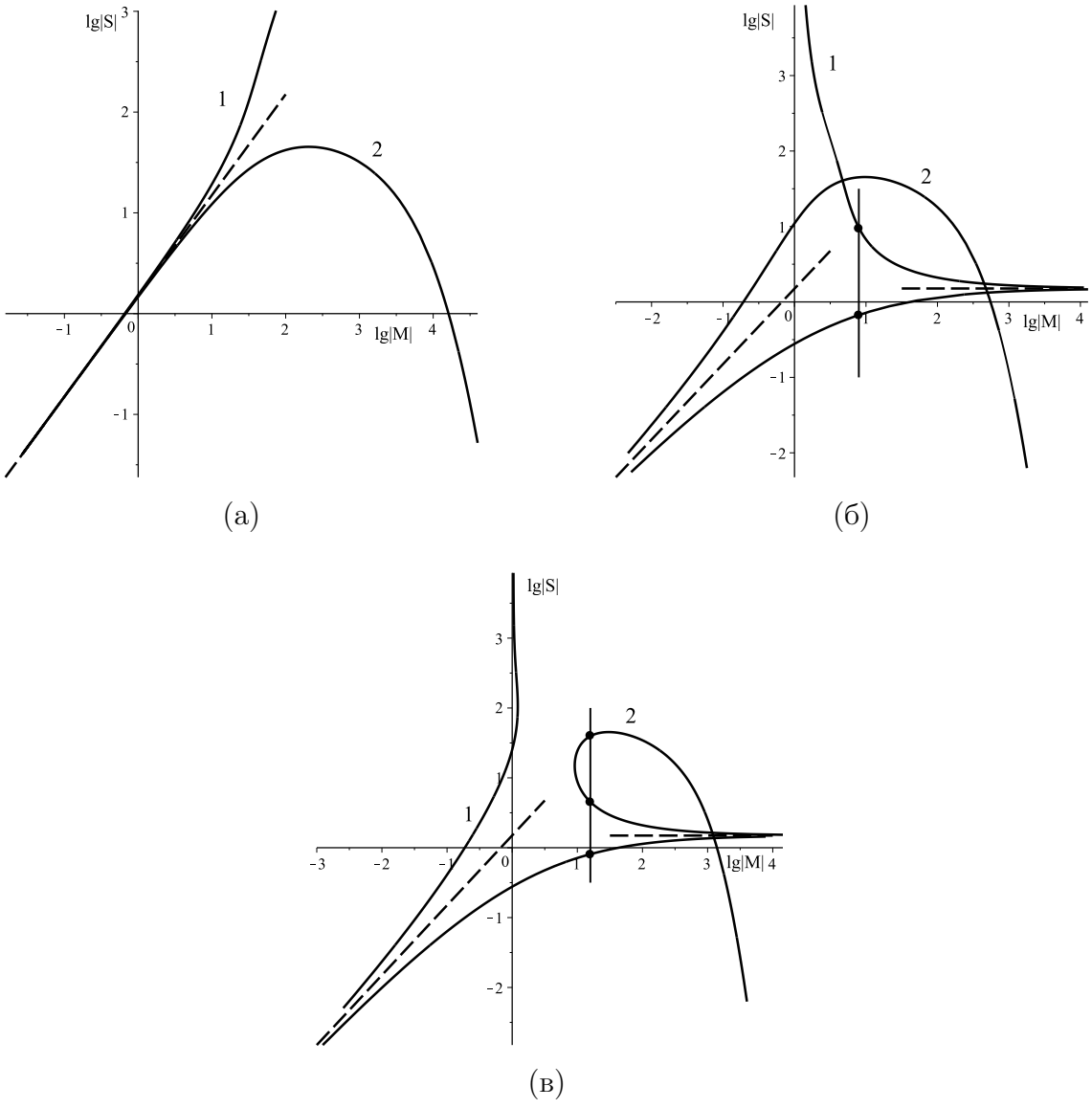


Рис. 1. Спектр $S = S(\mathrm{M})$ при $\mathrm{P} = 0$ и $\mathrm{Q} = 0$ (а), $\mathrm{Q} = 1$ (б), $\mathrm{Q} = -1$ (в)

Эти условия вместе с условиями (11) позволяют решить систему уравнений (10) как задачу Коши. Из первого условия (5) в точке $\xi = 1$ после преобразования (8) имеем

$$\overline{W}(\gamma_1^{-1}) = 0, \tag{12}$$

что даёт возможность определить параметр преобразования γ_1, а значит, и γ_2 из (9). Значения параметров M и Q находим, используя последние два условия из (5) при $\xi = 1$, а именно, с учётом (8),

$$\mathrm{M} = -\frac{1}{2}\gamma_1^{-3}\overline{W}''(\gamma_1^{-1})\overline{A}^{-2}(\gamma_1^{-1}), \quad \mathrm{Q} = \gamma_1^{-1}\overline{A}'(\gamma_1^{-1}).$$

На рис. 1 показан спектр $S = S(\mathrm{M})$ при $\mathrm{P} = 0$ в зависимости от значений безразмерного параметра Q в логарифмических координатах. Ветвь 1 соответствует отрицательным значениям S, M, а ветвь 2 – положительным. При $\mathrm{Q} = 0$ на ветвях 1, 2 имеется только одно решение (рис. 1(а)). Один из концов ветвей 1, 2 соответствует найденной асимптотике (7) (штриховая линия). При $\mathrm{Q} = 1$ ветвь 1 разделяется на две ветви с общей горизонтальной асимптотой $S = -1.507$ (рис. 1(б)). В этом случае на ветви 1 имеется от одного до двух решений (при $\mathrm{M} = -8$ $S = -0.672$ и $S = -9.474$), а на ветви 2 – только одно решение. При $\mathrm{Q} = -1$ ветвь 2 разделяется на две ветви с общей горизонтальной асимптотой $S = 1.493$ (рис. 1(в)). При этом на ветви 1 имеется не более двух решений (при $\mathrm{M} = -1.122$ $S = -41.184$ и $S = -437.494$), а на ветви 2 – от одного до трёх решений (при $\mathrm{M} = 15.85$ $S = 39.539$, $S = 4.524$ и $S = 0.808$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Na T. Y. *Computational methods in engineering boundary value problems.* New York : Academic Press, 1979. 309 p.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАНАТА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. Л. Литвинов[1], *К. В. Литвинова*[2]

[1]*Самарский государственный технический университет*
[2]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

До настоящего времени задачи продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами решались преимущественно в линейной постановке, при этом не учитывался энергообмен через движущуюся границу и взаимодействие продольных и поперечных колебаний [1–3]. В редких случаях учитывалось действие сил сопротивления внешней среды. Реальные технические объекты гораздо сложнее, например, с увеличением интенсивности колебаний геометрическая нелинейность объекта оказывает большое влияние на колебательный процесс.

В связи с интенсивным развитием численных методов стало возможным более точное описание сложных математических моделей продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами, учитывающих большое количество факторов, влияющих на колебательный процесс. В данной работе представлена новая нелинейная математическая модель продольно-поперечных колебаний каната с движущейся границей, учитывающая геометрическую нелинейность, энергообмен через границу, которая численно решается в среде Matlab. Граничные условия определены в случае взаимодействия частей объекта слева и справа от движущейся границы. Модель линеаризована, при этом соблюдается принцип однородности: в частном случае малых колебаний математическая модель совпадает с классической, что указывает на корректность полученных результатов. Такие математические модели позволяют описывать интенсивные колебания одномерных механических объектов с движущимися границами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвинов В. Л. *Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегродифференциальных уравнений*. Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 188–199.
2. Литвинов В. Л., Литвинова К. В. *Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегродифференциальным уравнениям*. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 6. С. 977–986.
3. Литвинов В. Л., Шамолин М. В. *Об одном асимптотическом методе решений однородных интегродифференциальных уравнений, описывающих колебания объектов с движущимися границами*. Сибирский журнал индустриальной математики. 2025. Т. 28. № 2. С. 39–54.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ НА ОСНОВЕ ТПМП

А. А. Любимова, Н. В. Еленская, М. А. Ташкинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

В современной тканевой инженерии и регенеративной медицине одним из ключевых направлений является создание пористых структур (скаффолдов) для восстановления костной ткани. Такие структуры должны не только обладать механической прочностью, сопоставимой с натуральной костью, но и обеспечивать подходящие для транспорта питательных веществ, кислорода и продуктов метаболизма условия. В последнее время внимание исследователей привлекают структуры, полученные на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП). Для успешного применения структур на основе ТПМП в клинической практике необходимо понимание структуры течения жидкости через подобные пористые среды, поскольку именно перенос жидкости определяет эффективность массообмена, клеточную активность и процесс васкуляризации имплантата [1].

В рамках работы были исследованы пористые структуры на основе двух типов ТПМП-геометрий: Diamond и Gyroid. Данные конфигурации были выбраны из-за их широкой распространённости в литературе и доказанным потенциалом для применения в костной тканевой инженерии. Для оценки гидродинамических характеристик был провёден ряд численных экспериментов с использованием методов вычислительной гидродинамики. В качестве рабочей жидкости использовалась вода, а течение принималось ламинарным. Для каждого типа структуры были рассмотрены образцы двух различных линейных размеров с целью оценки влияния масштабного фактора на проницаемость. Количественная оценка проницаемости проводилась на основе закона Дарси.

Установлено, что геометрия скаффолда оказывает влияние на его гидродинамические свойства: структуры Diamond и Gyroid демонстрируют различные значения проницаемости, что согласуется с данными, представленными в литературе [2, 3]. Помимо влияния геометрии, выявлено существенное влияние масштаба образца на рассчитанные значения проницаемости. Для структур меньшего размера характерны более низкие значения проницаемости по сравнению с крупными образцами, что объясняется возрастанием вклада краевых эффектов при уменьшении характерных размеров системы. Во всех рассмотренных случаях течение сохраняло ламинарный характер, что подтверждает применимость закона Дарси.

Результаты получены при выполнении госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект FSNM-2025-0001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Karageorgiou V., Kaplan D. *Porosity of 3D biomaterial scaffolds and osteogenesis.* 2006. V. 26. № 27. P. 5474–5491.
2. Pires T. H. V., Madeira J. F. A., Castro A. P. G., Fernandes P. R. *Direct MultiSearch optimization of TPMS scaffolds for bone tissue engineering.* Computer Methods and Programs in Biomedicine. 2024. V. 257. Art. 108461.

3. Li K., Liang H., Liao R. [et al.] *Topologically engineered spinodal scaffolds for tunable mechanics and mass transport in bone tissue engineering.* Thin-Walled Structures. 2026. V. 220. Art. 114354.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ДЛИННОМ ЦИЛИНДРЕ, СОВЕРШАЮЩЕМ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ АКСИАЛЬНЫЕ ВИБРАЦИИ

Т. П. Любимова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Исследуется устойчивость механического равновесия бинарной смеси в длинном цилиндре кругового сечения при наличии продольных градиентов температуры и концентрации примеси и высокочастотных аксиальных вибраций. Рассматривается устойчивость описанного режима по отношению к длинноволновым возмущениям. В первой части работы пренебрегается силой тяжести. Найдено преобразование, переводящее сформулированную задачу в известную задачу о неустойчивости равновесия бинарной смеси в поле тяжести при отсутствии вибраций. Обнаружено, что при достаточно больших интенсивностях вибраций возможна монотонная неустойчивость состояния покоя, если равновесные градиенты концентрации тяжёлого компонента и температуры параллельны, а их отношение B лежит в интервале $1/\mathrm{Le} < B < 1$, где Le – число Льюиса. Для осесимметричных возмущений результат не зависит от тепловых условий на боковой поверхности цилиндра. Неосесимметричные монотонные возмущения исследованы для двух предельных случаев: бесконечно теплопроводных и теплоизолированных границ. Найдено, что в обоих случаях наиболее опасными являются возмущения с азимутальным числом, равным единице. Обнаружена также колебательная вибрационная мода неустойчивости, которая существует при $1 < B < B^*$, где B^* не зависит от Le. Таким образом, в случае бинарной смеси, в отличие от случая однокомпонентной жидкости, вибрации, параллельные градиенту плотности, могут порождать неустойчивость. Механизм этой неустойчивости аналогичен механизму, обнаруженному при изучении парадокса устойчивости для бинарных смесей в поле тяжести. Он действует тем более эффективно, чем больше разница коэффициентов диффузии и температуропроводности, что объясняет полученную в работе обратную пропорциональность критического значения вибрационного числа Релея Ra_v числу Льюиса при больших Le.

Во второй части работы исследуется влияние вибраций на устойчивость равновесия бинарной смеси при наличии тяжести и высокочастотных аксиальных вибраций. Для этого случая также найдено преобразование, переводящее сформулированную задачу в задачу об устойчивости равновесия бинарной смеси в поле тяжести в отсутствие вибраций. Получены границы устойчивости в пространстве параметров. Показано, что можно полностью нейтрализовать силу тяжести вибрациями, для этого достаточно взять $\mathrm{Ra}_v = \mathrm{Ra}/(1-B)$. Поскольку Ra_v всегда положительно, то это возможно при подогреве снизу, если $B < 1$, т. е. когда внизу избыток легкого компонента смеси, а если внизу находится тяжелый компонент, то нужно, чтобы его было не слишком много.

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКОЙ DEM-МОДЕЛИ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ВИБРАЦИОННЫХ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

И. П. Лян

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва

Вибрационные транспортно-технологические машины (ВТТМ) широко применяются для транспортирования, классификации, дозирования и других видов обработки сыпучих материалов [1–3]. Динамика подобных машин формируется в результате взаимодействия вибровозбудителей, упруго закреплённого рабочего органа и обрабатываемого материала. Известно, что параметры колебаний рабочего органа определяют движение обрабатываемого материала. Однако, в свою очередь, материал оказывает на рабочий орган переменное силовое воздействие, зависящее от массы загрузки, распределения материала по рабочей поверхности, взаимного движения его слоёв и контактных свойств отдельных частиц. Это воздействие также оказывает влияние на амплитуды и характер колебаний рабочего органа, частоты вращения и взаимный сдвиг фаз дебалансных вибровозбудителей [3, 4]. Таким образом, вибрационная машина и обрабатываемый материал образуют взаимосвязанную динамическую систему, адекватное описание которой требует совместного рассмотрения входящих в неё подсистем.

При математическом моделировании динамики вибрационных машин влияние обрабатываемого материала нередко учитывают при помощи введения присоединённой массы, дополнительного демпфирования либо представления материала в виде нескольких твёрдых тел, соединённых между собой и с рабочим органом эквивалентными упруго-диссипативными элементами [1–3]. Такой подход позволяет существенно упростить расчёт, однако требует предварительного определения параметров эквивалентной модели. Эти параметры зависят от режима возбуждения, массы загрузки и характера движения материала, поэтому значения, полученные для одних условий работы, не могут быть непосредственно перенесены на другие условия без дополнительной калибровки.

Во многих ВТТМ рабочий орган совершает плоское колебательное движение в вертикальной плоскости, проходящей через технологическую ось машины (ось, вдоль которой происходит вибрационное транспортирование материала) [1, 3]. Это позволяет описывать основные особенности динамики таких систем с использованием плоских расчётных схем и тем самым существенно сокращать размерность математической модели и сопутствующие вычислительные затраты.

Наиболее детализированное описание движения сыпучего материала по поверхности рабочего органа может быть получено с использованием метода дискретных элементов (DEM) [2, 5]. В DEM-модели материал представляется совокупностью отдельных расчётных элементов, контактирующих между собой и с поверхностями машины. Такой подход позволяет учитывать перераспределение материала, его перемещение по рабочему органу и характеристики движения отдельных частиц. Вместе с тем результаты расчёта зависят от выбора моделей нормального и касательного контактного взаимодействия, формы и размеров расчётных элементов, а увеличение их числа приводит к существенному росту вычислительных затрат [2, 5].

В большинстве DEM-моделей вибрационного транспортирования движение рабочего органа задаётся кинематически, что исключает обратное влияние материала на параметры его колебаний и режим работы вибровозбудителей [2]. В работе используется плоская DEM-модель, согласованная с плоской расчётной схемой ВТТМ. В такой постановке пространственно распределенный слой материала заменяется совокупностью расчётных элементов, движение которых рассматривается в одной плоскости. Несмотря на существенное снижение вычислительных затрат по сравнению с трёхмерными DEM-моделями, в этом случае возникает задача определения достаточного числа элементов и их массовых характеристик.

Цель работы состоит в разработке и обосновании методики выбора параметров плоской DEM-модели на основе результатов натурных испытаний.

Плоская DEM-модель материала. Обрабатываемый материал представляется совокупностью N круглых расчётных элементов. Радиусы r_i, $i = 1, \ldots, N$, выбираются случайным образом в соответствии с логнормальным распределением эквивалентных радиусов частиц обрабатываемого материала. На основании анализа экспериментальных данных о движении частиц принято допущение о возможности пренебрежения вращательной степенью свободы элементов. В качестве модели нормального контактного взаимодействия используется модель Герца – Кувабара – Коно [6], в качестве модели касательного взаимодействия – модель Тсужи – Танака [7] с ограничением по закону Кулона. Параметры моделей контакта определяются на основании экспериментальных данных о взаимодействии частиц материала и контактных поверхностей машины.

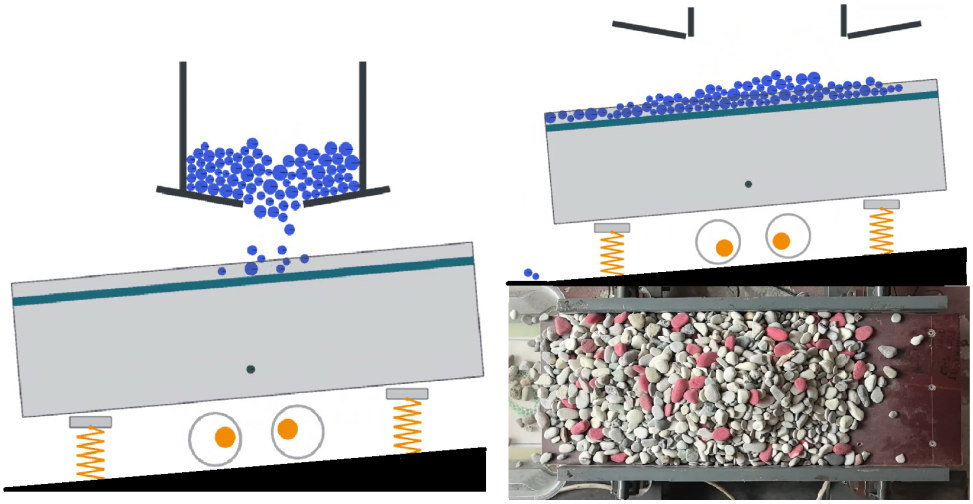


Рис. 1. Расчётная схема ВТТМ и сопоставление распределения обрабатываемого материала в расчётном и натурном экспериментах

Каждый плоский круглый элемент модели интерпретируется как сечение цилиндра радиуса r_i и эффективной толщины b. Ось цилиндра направлена по ширине рабочего органа перпендикулярно расчётной плоскости (рис. 1). Тогда масса элемента определяется выражением

$$m_i = \pi \rho r_i^2 b, \tag{1}$$

где ρ – плотность частиц материала. Число элементов выбирается из условия близости суммарной массы элементов заданной массе порции M. Для сопоставления расчётных случаев вводится параметр $\alpha = M/b$, равный массе материала, приходящейся на единицу

эффективной толщины цилиндра, и имеющий размерность кг/м. Суммарная площадь элементов в расчётной плоскости равна

$$A_\Sigma = \sum_i \pi r_i^2 = \frac{M}{\rho b} = \frac{\alpha}{\rho}\,. \tag{2}$$

Таким образом, уменьшение параметра b приводит к пропорциональному увеличению числа элементов, их суммарной площади в расчётной плоскости и значения α.

Параметры расчётов и эксперимента. В качестве экспериментального материала использовался галтованный щебень фракции 10–30 мм с плотностью частиц $\rho = 2575$ кг/м^3. Параметры распределения радиусов и плотность получены по экспериментальной выборке из 200 частиц. В расчётах использовано усечённое логнормальное распределение эквивалентных радиусов с медианой 7.786 мм, логарифмическим стандартным отклонением 0.254 и диапазоном радиусов 5.204–11.405 мм.

Эксперимент проводился с использованием лабораторного макета ВТТМ [4]. Макет оснащён двумя дебалансными вибровозбудителями, работающими в режиме самосинхронизации. Массовые и геометрические параметры рабочего органа, упругого подвеса и вибровозбудителей в модели выбраны в соответствии с параметрами лабораторного макета. Модель верифицирована на основе сопоставления амплитудно-частотных и фазовых характеристик пустой машины в диапазоне частот питания от 25 до 50 Гц. В качестве режима для исследования влияния изменения параметра b на динамический отклик ВТТМ был выбран околорезонансный режим колебаний при частоте питания 47 Гц. Масса рабочего органа составляла 30 кг, масса обрабатываемого материала 1.65, 3.30 и 4.95 кг, ширина рабочего органа $W = 0.25$ м, длина $L = 0.67$ м. Во всех расчётах использованы одинаковые распределения радиусов, параметры генераторов случайных чисел и модели контакта.

Для оценки влияния эффективной толщины цилиндра b на характеристики транспортирования материала и динамический отклик системы проведена серия расчётных экспериментов. На рис. 2 приведены результаты для $b = 0.25$; 0.125; 0.08; 0.0625; 0.05; 0.04 и 0.035 м при массе материала $M = 1.65$; 3.30 и 4.95 кг. Такой ряд обеспечивает приблизительно равномерное увеличение числа элементов, например для случая $M = 1.65$ кг: $N = 13$; 29; 45; 58; 72; 86 и 98.

С экспериментом сопоставлялись масса разгруженного материала m, его средняя скорость относительно рабочего органа $\overline{v}$, амплитуды ускорений рабочего органа в направлении, перпендикулярном рабочей поверхности, и взаимный сдвиг фаз вращения вибровозбудителей. Для оценки колебаний рабочего органа экспериментальные и расчётные сигналы нормального ускорения обрабатывались одинаковым способом: из сигналов выделялась полоса частот 15–150 Гц, после чего определялась среднеквадратическая огибающая ускорений a_{rms}. Экспериментальная средняя скорость движения частиц материала определялась по видеозаписи эксперимента по траекториям окрашенных частиц материала.

Динамика и геометрия слоя материала на рабочем органе. Для разделения стадий процесса определены времена t_{25}, t_{50} и t_{75}, соответствующие разгрузке 25, 50 и 75 % массы материала с рабочего органа в приёмный контейнер. Высота слоя материала над рабочей поверхностью H_{90} определялась как 90-й процентиль координат верхних точек элементов по нормали к поверхности. Значения усреднялись на интервале от t_{25} до t_{50}. Для всех расчётных вариантов зависимость усреднённого значения $\overline{H}_{90}$ от α с высокой

точностью описывается линейной функцией; коэффициент детерминации аппроксимации составляет $R^2 = 0{,}975$.

Из-за неправильной формы частиц щебня прямое сопоставление толщины экспериментального и расчётного слоёв неоднозначно. Поэтому дополнительно сопоставлялось характерное число слоёв материала. В эксперименте оно оценивалось по кадрам видеозаписи, в расчёте – по отношению усреднённой высоты слоя к медианному диаметру элемента. На основе анализа результатов можно сделать вывод, что соответствие расчётного числа слоёв экспериментальному наблюдается в той же области значений α, в которой достигается достаточно близкое согласование расчётных и экспериментальных технологических и динамических характеристик.

На рис. 2 показано изменение массы разгруженного материала и его средней скорости транспортирования при изменении α для массы 1.65 кг. Результаты для масс 3.30 и 4.95 кг носят качественно аналогичный характер.

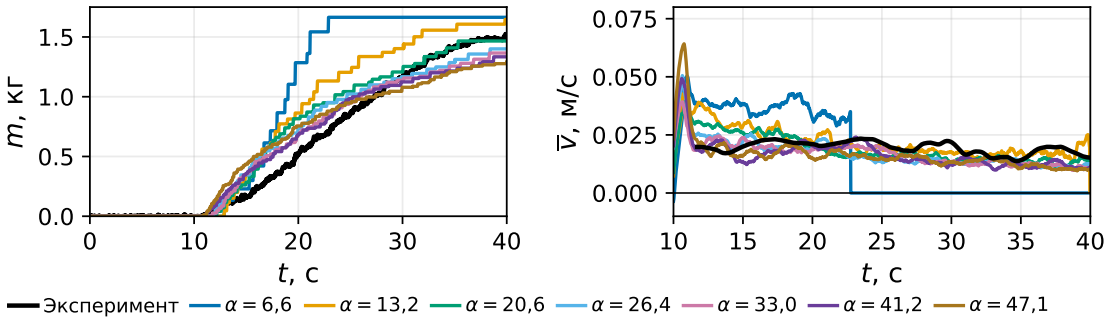


Рис. 2. Изменение массы разгруженного материала и его средней скорости транспортирования при массе порции 1.65 кг и частоте питания 47 Гц

При наименьшем α, соответствующем наименьшему числу элементов, разгрузка имеет выраженный ступенчатый характер и не воспроизводит наблюдаемые в эксперименте характеристики потока материала. Для $M = 1.65$ кг увеличение $\alpha = 6.6$–33.0 кг/м (уменьшение $b = 0.25$–0.05 м) снижает нормированное среднеквадратическое отклонение кривой разгрузки от 26.42 до 6.84 %, а средняя высота основной части слоя на рабочем органе возрастает примерно от 19 до 33 мм.

Связь характеристик разгрузки с α усиливается по мере развития процесса. Начальная стадия определяется преимущественно условиями подачи и полной массой материала, тогда как поздняя стадия в большей степени зависит от сформированной структуры слоя. Наиболее выраженная связь с α наблюдается для поздней стадии разгрузки.

Таким образом, при фиксированной массе M увеличение α, соответствующее уменьшению b, сопровождается снижением и последующей стабилизацией расчётной средней скорости транспортирования вблизи экспериментальных значений.

Динамический отклик ВТТМ. Расчётные варианты воспроизводят снижение огибающей нормального ускорения рабочего органа (рис. 3) по мере разгрузки и её общий уровень 12–15 м/с^2. Для $M = 1.65$ кг при увеличении $\alpha = 6.6$–47.1 кг/м (уменьшении $b = 0.25$–0.035 м) нормированное среднеквадратическое отклонение расчётной огибающей от экспериментальной снижается с 8.61 до 1.66 %. Качественно аналогичные результаты получены и для масс 3.30 и 4.95 кг – увеличение числа элементов приводит к постепенному снижению отклонения огибающей нормального ускорения рабочего органа от экспериментальной.

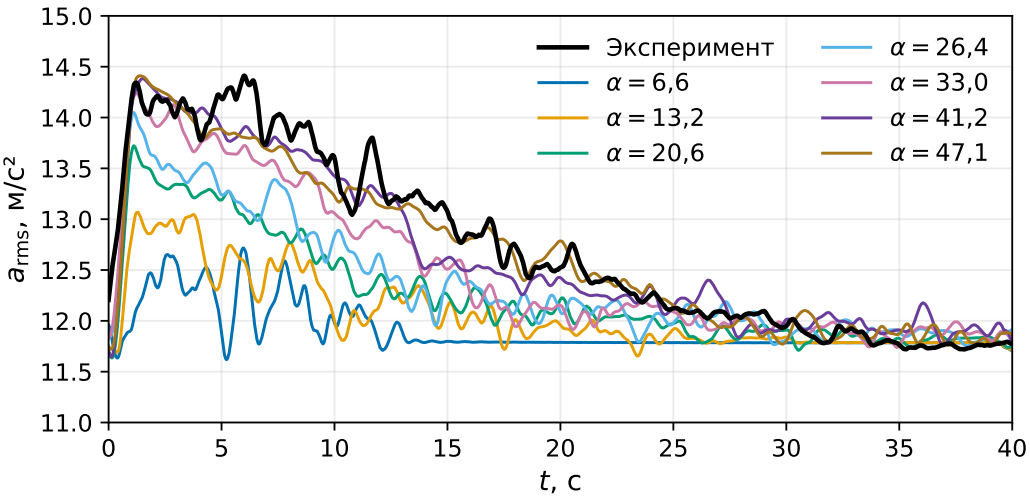


Рис. 3. Среднеквадратические огибающие нормальных ускорений рабочего органа

Для $M = 1.65$ кг минимальное нормированное отклонение огибающей ускорения от экспериментальной составляет 1.66 % при $\alpha = 47.1$ кг/м. Во всех расчётных случаях расхождение взаимного сдвига фаз с экспериментом не превышает 2 %.

Выбор эффективной толщины цилиндра. Предлагаемый подход включает два этапа. На первом этапе исключаются варианты с недостаточным пространственным разрешением потока обрабатываемого материала, а также варианты, в которых расчётное число слоёв не соответствует экспериментальной оценке. В исследованной серии это соответствовало $N < 45$. На втором этапе среди оставшихся вариантов выбирается наибольшее значение b, обеспечивающее экспериментальное воспроизведение характеристик разгрузки, средней скорости материала и динамического отклика рабочего органа.

Основные результаты и выводы. В работе исследовано влияние эффективной толщины цилиндра b расчётного элемента DEM-модели на формирование слоя обрабатываемого материала, характеристики технологического процесса и динамический отклик ВТТМ. Установлено, что эффективная толщина цилиндра b определяет уровень дискретизации модели обрабатываемого материала и геометрию слоя: суммарную площадь в расчётной плоскости, количество и массы расчётных элементов и позднюю стадию разгрузки. Полученные закономерности установлены путём сопоставления результатов численных экспериментов с использованием комплексной модели ВТТМ с экспериментальными данными. На основе сопоставления с экспериментом предложен двухэтапный подход к выбору b, учитывающий число слоёв материала, характеристики разгрузки, среднюю скорость и динамический отклик рабочего органа.

Работа выполнена в рамках госзадания, код научной темы FFGU-2024-0018.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вибрации в технике: справочник: в 6 т. Т. 4. Вибрационные процессы и машины.* Под ред. Э. Э. Лавендела. М.: Машиностроение, 1981. 509 с.
2. Вайсберг Л. А., Демидов И. В., Иванов К. С. *Механика сыпучих сред при вибрационных воздействиях: методы описания и математического моделирования.* Обогащение руд. 2015. № 4. С. 21–31.
3. Блехман И. И. *Теория вибрационных процессов и устройств: вибрационная механика и вибрационная техника.* СПб.: Руда и металлы, 2013. 639 с.

4. Panovko G. Y., Shokhin A. E. *Analysis of the influence of contact interactions on the dynamics of the vibrating machine–granular medium system.* J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2026. V. 55. No. 2. P. 115–123.
5. Cundall P. A., Strack O. D. L. *A discrete numerical model for granular assemblies.* Géotechnique. 1979. V. 29. No. 1. P. 47–65.
6. Kuwabara G., Kono K. *Restitution coefficient in a collision between two spheres.* Japanese J. of Applied Physics. 1987. V. 26. No. 8. P. 1230–1233.
7. Tsuji Y., Tanaka T., Ishida T. *Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe.* Powder Technology. 1992. V. 71. No. 3. P. 239–250.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРООРГАНИЗМОВ В МОДУЛИРОВАННОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНОМ ГРАВИТАКСИСЕ

А. М. Мезенцева, Б. Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Биоконвекция – макроскопические течения, вызванные перераспределением в окружающей водной среде самодвижущихся (плавающих) микроорганизмов (одноклеточные водоросли, бактерии, жгутиковые простейшие). Если определяющим фактором направленного движения микроорганизмов и, следовательно, формирования биоконвективных структур является поле тяжести, то говорят о гравитактической биоконвекции [1]. Экспериментально установлено, что модуляция ускорения свободного падения влияет на плавательные движения микроорганизмов [2] и отражается на характеристиках биоконвективных структур, например, приводит к изменению их пространственных масштабов [3].

В докладе обсуждаются результаты моделирования поведения суспензии гравитактических микроорганизмов в горизонтальной ячейке с твёрдыми, непроницаемыми для микроорганизмов границами в случае модуляции силы тяжести с амплитудой η и частотой ω.

Для основного состояния (механического равновесия суспензии) концентрация микроорганизмов $C_0(t, z)$ зависит только от вертикальной координаты z и времени t и определяется активной диффузией клеток и их самодвижением в модулированном поле:

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = \Delta C_0 + \mathrm{Pe}(1 + \eta \cos \omega t)\mathbf{k} \cdot \nabla C_0,$$

$\mathbf{k}$ – единичный вектор, направленный вверх. Пространственно-временны́е распределения концентрации микроорганизмов $C_0(t, z)$ зависят от числа Пекле Pe (безразмерной скорости плавания клеток), амплитуды и частоты модуляции гравитационного поля. Для малых значений Pe получено приближённое аналитическое решение $C_0(t, z)$. Профили концентрации микроорганизмов по высоте ячейки построены в различные моменты периода внешнего воздействия в широком диапазоне его изменения. При высоких и конечных частотах модуляции в слое распространяется вынужденная концентрационная волна. В случае низкой частоты модуляции гравитационного поля изменения концентрации в разных точках слоя происходят синфазно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Childress S., Levandowsky M., Spiegel E. A. *Pattern formation in a suspension of swimming microorganisms: equations and stability theory.* J. Fluid Mech. 1975. V. 63. P. 591–613.
2. Richter P. R., Schuster M., Meyer I. [et al.] *Indications for acceleration-dependent changes of membrane potential in the flagellate Euglena gracilis.* Protoplasma. 2006. V. 229. P. 101–108.
3. Noever D. A. *Evolution of bioconvective patterns in variable gravity.* Phys. Rev. A. 1991. V. 44. Iss. 8. P. 5281–5991.

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРЕ С ПОРИСТОЙ РАДИАЛЬНОЙ ПЕРЕГОРОДКОЙ

О. В. Мотыгин

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

1. Введение

Задача о свободных колебаниях жидкости в контейнерах с перегородками имеет многочисленные приложения. Перегородки существенно изменяют спектр собственных частот [1, 2] и могут, в частности, использоваться для подавления нежелательных колебаний. Особый практический и теоретический интерес представляют пористые перегородки. Исследование течений в областях с пористыми границами восходит к основополагающей работе Тейлора [3]; в дальнейшем Чванг [4] развил эту идею в теории пористого волнопродуктора, после чего она была распространена на задачи о пористых барьерах. В последние годы активно изучается задача о колебаниях жидкости в контейнерах с пористыми перегородками (см. [5] и ссылки в этой работе) – протекание через перегородку обычно описывается законом Дарси.

В недавней работе [6] построены явные решения задачи о колебаниях в контейнерах с пористыми перегородками, простирающимися на всю глубину. Ключевая особенность найденных в [6] решений состоит в том, что перепад давления на перегородке для них тождественно обращается в ноль. Вследствие этого такие решения совпадают с решениями для твёрдой перегородки той же конфигурации [2] и не зависят от параметра пористости. Соответствующие собственные частоты вещественны, а колебания не затухают во времени.

Закон Дарси делает спектральную задачу несамосопряжённой, и это свойство задачи предполагает существование и другого семейства собственных значений — комплексных, описывающих затухающие моды, которые существенно зависят от параметра пористости. В настоящей работе рассматривается весь дискретный спектр задачи о колебаниях жидкости в вертикальном круговом цилиндре с тонкой радиальной пористой перегородкой, проходящей от оси до стенки на всю глубину.

С помощью энергетического тождества, вытекающего из формулы Грина, доказано, что спектр этой задачи исчерпывается двумя семействами: (i) вещественные собственные значения, совпадающие с частью спектра задачи с твёрдой перегородкой и отвечающие чётным относительно $\theta = \pi$ модам, для которых перепад давления на перегородке тождественно равен нулю; (ii) комплексные собственные значения, соответствующие нечётным модам с ненулевым перепадом давления и описывающие затухающие колебания. Для численного изучения комплексного спектра разработан гибридный метод, сочетающий коллокацию условия Стеклова на свободной поверхности с проекцией условия Дарси на перегородке на тестовые функции.

2. Постановка задачи

Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость в вертикальном круговом цилиндре единичного радиуса, глубина жидкости h (рис. 1). Используем цилиндрические координаты (r, θ, z); ось z направлена вертикально вверх, начало координат расположено на свободной поверхности. Область, занятая жидкостью, параметризуется следующим образом:

$$W = \{(r, \theta, z) : \ r \in (0, 1), \ \theta \in (0, 2\pi), \ z \in (-h, 0)\}.$$

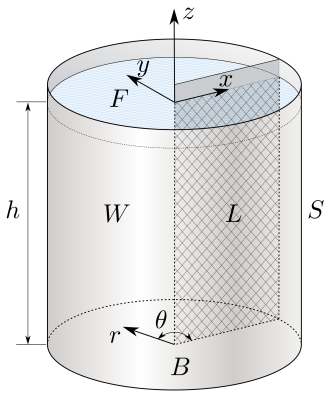


Рис. 1. Круговой цилиндр с радиальной перегородкой

Обозначим (см. рис. 1): F — свободная поверхность, S — боковая стенка, B – дно. В плоскости $\theta = 0$ расположена тонкая радиальная перегородка

$$L = \{(r, 0, z) :\ r \in (0, 1),\ z \in (-h, 0)\},$$

проницаемая для жидкости и проходящая от оси цилиндра до стенки на всю глубину.

Движение жидкости предполагается потенциальным: $\mathbf{v} = \nabla\Phi$. Моды свободных колебаний ищутся в виде $\mathrm{Re}\{\Phi(r, \theta, z)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\}$, где $\omega \in \mathbb{C}$ – комплексная собственная частота. Спектральная задача имеет вид

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{в } W, \tag{1}$$

$$\Phi_z = \omega^2\Phi \quad \text{на } F = \{(r, \theta, 0) :\ r \in (0, 1),\ \theta \in (0, 2\pi)\}, \tag{2}$$

$$\Phi_z = 0 \quad \text{на } B = \{(r, \theta, -h) :\ r \in (0, 1),\ \theta \in (0, 2\pi)\}, \tag{3}$$

$$\Phi_r = 0 \quad \text{на } S = \{(1, \theta, z) :\ \theta \in (0, 2\pi),\ z \in (-h, 0)\}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\,\Phi_\theta\Big|_{0^+} = \frac{1}{r}\,\Phi_\theta\Big|_{2\pi^-} = -i\beta\omega\,[\Phi] \quad \text{на } L, \tag{5}$$

где $[\Phi] = \Phi(r, 0^+, z) - \Phi(r, 2\pi^-, z)$ – скачок потенциала на перегородке, $\beta = \beta_r + i\beta_i$ ($\beta_r > 0,\ \beta_i > 0$) – комплексный параметр пористости перегородки: β_r представляет собой коэффициент активного (диссипативного) сопротивления, а β_i – коэффициент реактивного (инерционного) сопротивления, обусловленного инерцией жидкости в порах перегородки. В случае твёрдой перегородки ($\beta = 0$) задача самосопряжённая, и её спектр вещественный и дискретный (см. [2]). При $\beta \neq 0$ задача становится несамосопряжённой; далее предполагаем, что её спектр также дискретен (строгое доказательство выходит за рамки настоящей работы).

Задача (1)–(5) записана в безразмерных переменных:

$$r = \frac{r_{\text{разм}}}{R}\,, \quad z = \frac{z_{\text{разм}}}{R}\,, \quad h = \frac{h_{\text{разм}}}{R}\,, \quad \omega = \omega_{\text{разм}}\sqrt{R/g}\,, \quad \beta = \beta_{\text{разм}}\sqrt{gR}$$

относительно исходных размерных величин. Здесь R – радиус цилиндра и g – ускорение свободного падения.

3. Характеризация спектра

Основной результат данного раздела состоит в строгом разделении спектра задачи (1)–(5) на два семейства в зависимости от чётности собственных функций относительно $\theta = \pi$.

Для любой собственной пары (Φ, ω) задачи (1)–(5) первая формула Грина даёт комплексный энергетический баланс:

$$\int_W |\nabla\Phi|^2\, dV = \omega^2 \int_F |\Phi|^2\, dS + i\beta\omega \int_L |[\Phi]|^2\, dS. \tag{6}$$

Полагая $\omega = \omega_r + i\omega_i$ и разделяя вещественную и мнимую части (6), получаем

$$\int_W |\nabla\Phi|^2\, dV = (\omega_r^2 - \omega_i^2) \int_F |\Phi|^2\, dS - (\beta_r\omega_i + \beta_i\omega_r) \int_L |[\Phi]|^2\, dS, \tag{7}$$

$$0 = 2\omega_r\omega_i \int_F |\Phi|^2\, dS + (\beta_r\omega_r - \beta_i\omega_i) \int_L |[\Phi]|^2\, dS. \tag{8}$$

Пусть ω вещественно ($\omega_i = 0$). Тогда (8) принимает вид: $\beta_r\omega_r \int_L |[\Phi]|^2\, dS = 0$. Для физически реалистичной пористой перегородки $\beta_r > 0$, и при $\omega_r \neq 0$ (тривиальное постоянное решение исключено) отсюда следует

$$[\Phi] \equiv 0 \quad \text{на } L.$$

Таким образом, *каждая вещественная собственная частота соответствует моде с тождественно нулевым перепадом давления на перегородке*. Условие Дарси (5) при этом вырождается в условие твёрдой перегородки $\Phi_\theta|_{0^+} = \Phi_\theta|_{2\pi^-} = 0$, и задача сводится к классической самосопряжённой задаче с твёрдой перегородкой. Её решения имеют вид (см. [2])

$$\Phi_{n,s}(r,\theta,z) = A\, J_n(k_{n,s}\, r)\cos(n\theta)\, \cosh(k_{n,s}(z+h)), \qquad \omega_{n,s}^2 = k_{n,s}\tanh(k_{n,s}\, h), \tag{9}$$

где $n = 0, 1, 2, ...$, $s = 1, 2, ...$, J_n – функция Бесселя первого рода, $k_{n,s}$ – s-й положительный корень уравнения $J_n'(k) = 0$. Зависимость от $\cos(n\theta)$ с целым n обеспечивает $[\Phi] \equiv 0$ и $\Phi_\theta|_L = 0$, так что условие Дарси выполнено тождественно при любом β [6]. Эти моды не затухают ($\operatorname{Im}\omega = 0$) и не несут информации о пористости.

Подчеркнём, что вещественный спектр пористой задачи совпадает не со всем спектром твёрдой перегородки, а лишь с его частью, отвечающей чётным относительно $\theta = \pi$ собственным функциям (9) (целые угловые гармоники n). Поскольку собственные функции задачи с твёрдой перегородкой образуют полную систему [2], а каждая вещественная мода пористой задачи соответствует моде твёрдой перегородки с $[\Phi] \equiv 0$, явные решения (9) исчерпывают весь вещественный спектр задачи с пористой перегородкой.

Задача с твёрдой перегородкой допускает также собственные функции, нечётные относительно $\theta = \pi$ и отвечающие полуцелым значениям индекса n ($n = 1/2,\, 3/2, \ldots$). Для таких функций скачок $[\Phi]$ на перегородке не равен нулю, тогда как нормальная производная $(1/r)\Phi_\theta|_L$ обращается в нуль, вследствие чего условие Дарси (5) не выполнено при $\beta \neq 0$. Поэтому при $\beta \neq 0$ соответствующие собственные значения непрерывно уходят с вещественной оси в комплексную область ($\operatorname{Im}\omega < 0$).

Полагая $\omega = i\omega_i$ (апериодическое движение без колебаний), из (8) при $\beta_i > 0$ получаем $[\Phi] \equiv 0$, после чего (7) принимает вид: $\int_W |\nabla\Phi|^2\, dV = -(\omega_i^2) \int_F |\Phi|^2\, dS$, что невозможно

при $\omega_i \neq 0$ (левая часть положительна, правая неположительна). Таким образом, чисто мнимых собственных значений не существует: любое движение в системе сопровождается колебаниями.

4. Численная схема

Согласно разделу 3 все моды делятся на два семейства по чётности относительно $\theta = \pi$. Первое семейство – чётные моды с целыми угловыми гармониками n. Их собственные значения вещественны и совпадают с частью спектра задачи с твёрдой перегородкой; явные решения даются формулой (9) и не требуют численного расчёта.

Второе семейство – нечётные моды, отвечающие комплексным (затухающим) собственным значениям. Для их нахождения решение ищется в виде суммы дискретной и непрерывной части:

$$\Phi(r,\theta,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\,\Psi_{\nu_m,n}(r,\theta,z) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/2}^{\infty} c_n(\mu)\,\Psi_{\mu,n}(r,\theta,z)\,d\mu, \tag{10}$$

где $\nu_m = m/2$, $m = 1,2,3,\ldots$, $k_{\mu,n}$ – n-й корень $J'_\mu(k) = 0$, базисные функции

$$\Psi_{\mu,n}(r,\theta,z) = J_\mu(k_{\mu,n}\,r)\,\sin\left(\mu(\theta-\pi)\right)\,\frac{\cosh\left(k_{\mu,n}(z+h)\right)}{\cosh(k_{\mu,n}\,h)}$$

автоматически удовлетворяют условиям (1), (3), (4). Коэффициенты $a_{m,n}$ и функции $c_n(\mu)$ должны быть найдены. Дискретная часть содержит как полуцелые ($[\Phi] \neq 0$, $\Phi_\theta|_L = 0$), так и целые ($[\Phi] = 0$, $\Phi_\theta|_L \neq 0$) угловые гармоники; оба типа необходимы для выполнения условия Дарси (5). Нижний предел интегрирования $1/2$ определён условием конечности энергии $\Phi \in H^1(W)$ и известными асимптотиками $J_\mu(r)$ при $r \to 0$. Численные расчёты подтверждают важную роль непрерывной части: она, в частности, содержит существенную часть энергии решения.

В численной схеме используется аппроксимация решения (10):

$$\Phi(r,\theta,z) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N_d} a_{m,n}\,\Psi_{\nu_m,n}(r,\theta,z) + \sum_{n=1}^{N_c}\int_{1/2}^{\mu_{\max}} c_n(\mu)\,\Psi_{\mu,n}(r,\theta,z)\,d\mu. \tag{11}$$

Условие Стеклова (2) дискретизируется методом коллокации на сетке узлов Чебышёва первого рода для (r,θ) в $(0,1)\times(0,\pi)$, условие Дарси (5) проецируется на тестовые функции. Интеграл по μ в (11) аппроксимируется квадратурой Кленшоу – Куртиса. Плотность $c_n(\mu)$ раскладывается по полиномам Чебышёва.

Эта схема приводит к квадратичному матричному пучку вида

$$\mathbf{Z}(\omega,\beta)\,\mathbf{a} = \left(\mathbf{K} + i\omega\beta\,\mathbf{D} - \omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{12}$$

где вектор неизвестных $\mathbf{a}$ объединяет коэффициенты разложения $a_{m,n}$ дискретной части и коэффициенты разложения плотности $c_n(\mu)$ по полиномам Чебышёва. При выборе параметров дискретизации важно добиться баланса количества уравнений, соответствующих условиям (2) и (5), а матрицы в (12) должны быть квадратными.

Комплексные собственные значения пучка находятся методом гомотопии по параметру β. Исходной точкой служит $\beta = 0$, для которой спектр вещественен и известен аналитически (полуцелые индексы для нечётных мод). Траектория прослеживается вплоть до

целевого значения β. На каждом шаге гомотопии k используется предсказание экстраполяцией Лагранжа по предыдущим точкам траектории $\omega(\beta)$ с последующей корректировкой методом Ньютона с проекционной нормировкой $\langle \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k \rangle = 1$. Последняя фиксирует фазу и масштаб искомого вектора относительно решения $\mathbf{a}_{k-1}$, найденного на предыдущем шаге по β, что гарантирует непрерывное отслеживание одной и той же ветви спектра.

Расширенная система Ньютона на шаге гомотопии k и итерации ℓ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}(\omega_k^{(\ell)}, \beta_k) & \mathbf{Z}_\omega \, \mathbf{a}_k^{(\ell)} \\ \mathbf{a}_{k-1}^H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{a}_k^{(\ell)} \\ \Delta \omega_k^{(\ell)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(\omega_k^{(\ell)}, \beta_k) \, \mathbf{a}_k^{(\ell)} \\ \mathbf{a}_{k-1}^H \mathbf{a}_k^{(\ell)} - 1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\mathbf{Z}_\omega = i\beta_k \, \mathbf{D} - 2\omega \, \mathbf{M}$. Начальное приближение $(\omega_k^{(0)}, \mathbf{a}_k^{(0)})$ для внутреннего итерационного процесса на шаге k находится экстраполяцией. Обновление решения на каждой ньютоновской итерации выполняется по правилу $\mathbf{a}_k^{(\ell+1)} = \mathbf{a}_k^{(\ell)} + \Delta \mathbf{a}_k^{(\ell)}$, $\omega_k^{(\ell+1)} = \omega_k^{(\ell)} + \Delta \omega_k^{(\ell)}$. На первом шаге гомотопии ($k = 1$), когда история траектории отсутствует, задаётся $\omega_1^{(0)} = \omega_0 - i\varepsilon$ (смещение в комплексную область, соответствующую затухающей ветви) при малом шаге β_1. На последующих шагах размер шага подбирается адаптивно с учётом скорости изменения траектории и сходимости метода Ньютона.

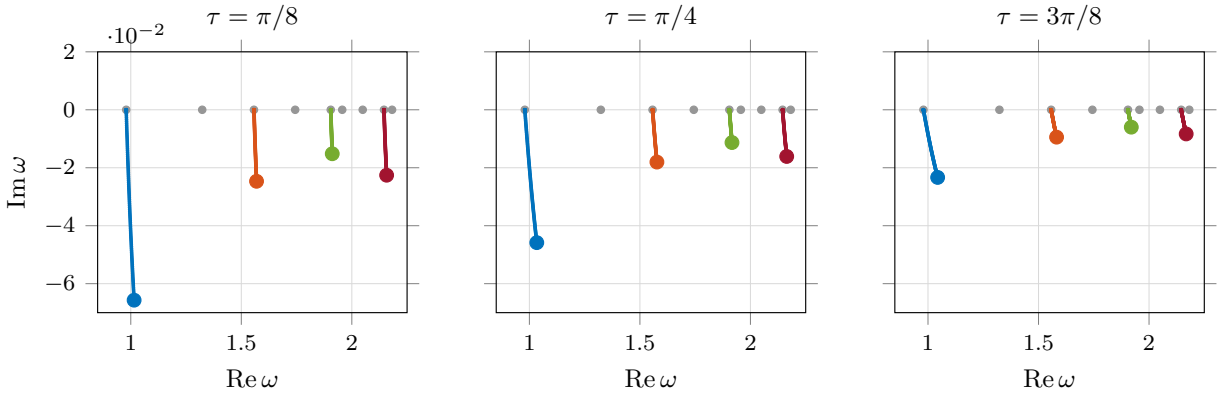


Рис. 2. Первые комплексные собственные значения $\omega(\beta)$ для $\beta = |\beta| \, e^{i\tau}$, где $\tau = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$, $|\beta|$ изменяется от 0 до 0.15

На рис. 2 для $h = 1$ показаны траектории первых четырёх комплексных собственных значений $\omega(\beta)$ (отвечающих наименьшим вещественным собственным значениям для нечётных мод при $\beta = 0$) для $\beta = |\beta| \, e^{i\tau}$, где $\tau = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$ и $|\beta|$ изменяется от 0 до 0.15. Символ • отмечает конечные точки траекторий при $|\beta| = 0.15$. Серые точки соответствуют вещественному спектру твёрдой перегородки.

5. Заключение

Спектр задачи о колебаниях жидкости в цилиндре с пористой перегородкой распадается на два семейства, различающиеся чётностью относительно $\theta = \pi$: (i) чётные моды отвечают вещественному спектру, совпадающему с частью спектра твёрдой перегородки (моды с нулевым перепадом давления, не зависящие от пористости); (ii) нечётные моды отвечают комплексному спектру затухающих колебаний, существенно зависящему от параметра пористости β. Доказательство основано на энергетическом тождестве, вытекающем

из формулы Грина; показано также отсутствие чисто мнимых собственных значений. Разработанный гибридный численный метод позволяет находить комплексные собственные значения и изучать их свойства при изменении пористости.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124040800009-8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Evans D. V., McIver P. *Resonant frequencies in a container with a vertical baffle.* J. Fluid Mech. 1987. V. 175. P. 295–307.
2. Kuznetsov N. G., Motygin O. V. *Sloshing in vertical cylinders with circular walls: The effect of radial baffles.* Physics of Fluids. 2021. V. 33. Art. 102106.
3. Taylor G. I., *Fluid flow in regions bounded by porous surfaces.* Proc. R. Soc. A. 1956. V. 234. P. 456–475.
4. Chwang A. T. *A porous wavemaker theory.* J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 395–406.
5. Turner M. R. *Dynamic sloshing in a rectangular vessel with porous baffles.* J. Eng. Math. 2024. V. 144. Art. 22.
6. Kuznetsov N. G., Motygin O. V. *Sloshing in vertical cylinders with circular walls and porous, radial baffles: examples of explicit solutions.* Days on Diffraction 2025. St. Petersburg, 2025. P. 119–125. Препринт: arXiv:2504.10505 [physics.flu-dyn].

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ИСПАРИТЕЛЬНО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ БИНАРНЫХ СРЕД

К. Е. Найденова

Алтайский государственный университет, Барнаул

В двухслойных системах с испарением на границе раздела бинарной жидкости и газопаровой смеси структура течения определяется сосуществованием различных физических механизмов. Изменение таких параметров системы бинарных сред, как толщина слоёв, интенсивность граничной тепловой нагрузки, средняя концентрация испаряющегося компонента, может приводить к существенной перестройке топологической, температурной и концентрационной картин основного течения, к потере его устойчивости. Исследование условий формирования и устойчивости режимов испарительной конвекции представляет интерес как для теории конвекции, так и для приложений, связанных с разработкой жидкостных технологий и методов управления процессами тепломассопереноса на межфазной границе, например, в технологиях охлаждения микроэлектронного оборудования, термического нанесения покрытий или сушки и др.

Точные решения задач испарительной конвекции ранее были построены и использовались для описания двухслойных течений в системах однородной жидкости и газопаровой смеси (см. [1]). Для ряда постановок была исследована устойчивость таких решений [2], изучено влияние геометрии системы [3] и интенсивности теплового воздействия [4] на характеристики возмущений. Дальнейшее развитие математических моделей испарительной конвекции связано с рассмотрением системы вязких несжимаемых сред, в которой оба слоя являются бинарными смесями [5]. Для этой системы было получено точное стационарное решение и исследовано влияние средней концентрации летучего компонента на характеристики основного течения [6]. Вместе с тем вопрос об устойчивости данного решения до настоящего времени оставался открытым. Настоящая работа посвящена исследованию его линейной устойчивости и влияния температурных, концентрационных и геометрических параметров системы на структуру течения, интенсивность испарения и свойства характеристических возмущений.

Рассматривается двумерное двухслойное течение в узком горизонтальном канале. Нижний слой толщины h_1 заполнен бинарной жидкостью, а верхний слой толщины h_2 – смесью газа и пара летучего компонента. Слои разделены плоской границей, на которой происходит испарение диффузионного типа. Движение обеих сред описывается уравнениями Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска, дополненными уравнениями конвективной диффузии с учётом эффекта Соре. На твёрдых стенках канала задаются условия прилипания, отсутствия потока вещества, а также линейное распределение температуры вдоль продольной координаты. На границе раздела выполняются условия непрерывности скоростей и температуры, кинематическое и динамическое условия, а также соотношения баланса тепловых и массовых потоков. Концентрация пара на межфазной границе определяется линеаризованным соотношением концентрации насыщенного пара [7]. Для замыкания стационарной задачи задаётся средняя концентрация испаряющегося компонента в жидком слое.

Основное состояние описывается ранее полученным точным стационарным решением специального вида [6]. Это решение является обобщением решения Бириха и моделиру-

ет однонаправленное течение в каждом из слоёв. Продольные градиенты температуры и концентрации линейно зависят от поперечной координаты y, а продольная скорость и аддитивные составляющие температуры и концентрации представляются полиномиальными функциями переменной y.

Устойчивость основного течения исследуется в рамках линейной теории, рассматриваются малые плоские возмущения скорости, давления, температуры и концентрации типа нормальных мод

$$\left(U^j, V^j, P^j, \theta^j, S^j\right) = \left(\overline{U}^j, \overline{V}^j, \overline{P}^j, \overline{\theta}^j, \overline{S}^j\right)(y)\, e^{i(\alpha x - \lambda t)}, \qquad j = 1, 2.$$

Здесь α – продольное волновое число, λ – комплексный спектральный параметр, а функции с чертой определяют распределение амплитуд возмущений по поперечной координате. При таком выборе формы функций возмущений знак мнимой части λ определяет рост или затухание возмущений, тогда как действительная часть характеризует частоту их колебаний.

Подстановка нормальных мод в исходные уравнения и граничные условия приводит к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд возмущений. Полученная задача решается численно, а устойчивость основного течения оценивается по найденным значениям комплексного спектрального параметра λ при различных значениях волнового числа α.

При проведении численного исследования устойчивости течений в системе «водный раствор этанола – смесь азота и паров этанола» варьировались величина продольного температурного градиента, средняя концентрация летучего компонента в жидком слое, а также толщины жидкого и газопарового слоёв. Остальные параметры задачи в каждой серии расчётов оставались неизменными. Для каждого набора параметров определялась зависимость мнимой части спектрального параметра от волнового числа α, выбиралась наиболее опасная мода и исследовались распределения малых возмущений скорости, температуры и концентрации. Полученные результаты позволяют оценить влияние исследуемых параметров на устойчивость основного течения и структуру возникающих возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2024–2026) (госзадание FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н. *Задачи испарительной конвекции (обзор).* Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 219–260.
2. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Резанова Е. В., Шефер И. А. *Устойчивость двухслойных течений жидкости с испарением на границе раздела.* Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2017. № 2. С. 23–35.
3. Shefer I. A. *Effect of the System Geometry on the Flow Stability of an Evaporating Liquid.* Fluid Dynamics. 2018. V. 53. P. 59–68.
4. Rezanova E. V., Shefer I. A. *Influence of Thermal Load on the Characteristics of a Flow with Evaporation.* J. of Applied and Industrial Mathematics. 2017. V. 11. P. 274–283.
5. Bekezhanova V. B., Stepanova I. V. *Evaporation Convection in Two-Layers Binary Mixtures: Equations, Structure of Solution, Study of Gravity and Thermal Diffusion Effects on the Motion.* Applied Mathematics and Computation. 2022. V. 414. Art. 126424.

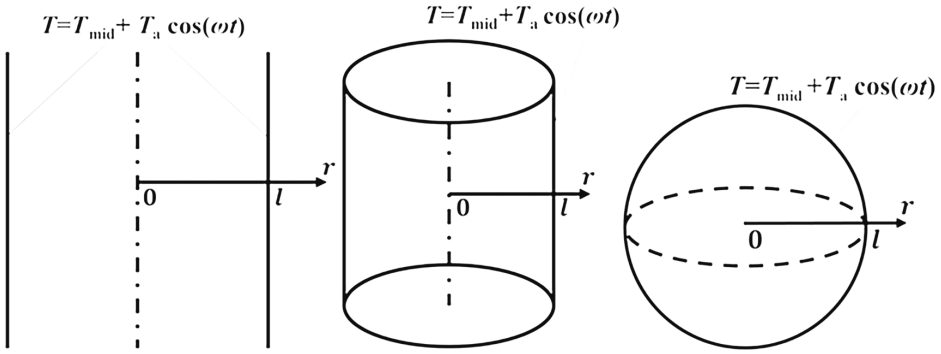
6. Bekezhanova V. B., Stepanova I. V. *Mathematical Modeling of Concentration Influence on Evaporative Convection in a Bilayer System of Binary Mixtures.* Int. J. of Heat and Fluid Flow. 2024. V. 107. Art. 109385.
7. Шлиомис М. И., Якушин В. И. *Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением.* Учёные записки Пермского государственного университета. Серия «Гидродинамика». 1972. № 4. С. 129–140.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВОЛНЫ В ОБЛАСТЯХ С РАЗЛИЧНОЙ СИММЕТРИЕЙ ПРИ УЧЁТЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Э. И. Нарыгин[1], *А. В. Пяткова*[1,2]

[1] *Тюменский государственный университет*
[2] *Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН*

Численно решена задача о распространении температурных волн при наличии фазового перехода в областях с различной симметрией: пластине толщины $2l$ (плоская симметрия), цилиндре радиуса l (цилиндрическая симметрия) и шаре радиуса l (сферическая симметрия). На границах областей температура меняется по гармоническому закону. Температура фазового перехода принадлежит интервалу изменения температуры границ. В силу симметрии задача решена в одномерной постановке. Введём предположения, что плотности обеих фаз равны и постоянны, конвективный перенос тепла отсутствует, а фазовый переход является равновесным. Удельная теплоёмкость и теплопроводность постоянны для каждой фазы.



Для моделирования фазового перехода применён метод энтальпии [1], который реализован в программном коде, написанном на языке FORTRAN. Для проверки достоверности результатов проведено сравнение численного решения с известными аналитическими решениями и результатами других авторов. Решение задачи находилось в безразмерных переменных. Безразмерные параметры таковы: отношение коэффициентов теплопроводности твёрдой фазы к жидкой, отношение коэффициентов теплоёмкости твёрдой фазы к жидкой, число Стефана, безразмерная температура фазового перехода, безразмерная начальная температура, тип симметрии области и размер области. Наибольшее внимание уделяется влиянию безразмерных параметров на среднюю за период температуру в центре, которая характеризует количество теплоты, выделенной или поглощённой областью. Также исследована проникающая способность температурных волн. В основном рассматривается периодический режим колебаний, когда от начала процесса прошло достаточно много времени.

Характер распространения температурных волн в двухфазной области отличается от однофазного случая, когда в любой точке средняя температура равна средней температуре границы [2] и, в случае пластины, амплитуда колебаний температурной волны убывает

по экспоненциальному закону. В случае когда теплопроводность твёрдой фазы выше теплопроводности жидкой фазы, за один период с поверхности отбирается больше тепла, чем поступает в область. Вследствие этого температура в центре области становится ниже средней температуры границы.

Как показали расчёты, безразмерная начальная температура не влияет на среднее значение температуры в центре области. Это выполняется для всех типов симметрии. Однако тип области влияет на минимальное количество периодов, необходимых для выхода решения на периодический режим и проникающую способность температурной волны. Для пластины проникающая способность минимальна, для шара – максимальна.

Наибольшее влияние на температуру в центре области оказывают безразмерная температура фазового перехода, отношение теплопроводностей фаз и число Стефана. Симметрия области (пластина, цилиндр или шар) оказывает существенное влияние лишь на амплитуду колебания температуры, проникающую способность температурных волн и время выхода на периодический режим.

Существует один глобальный экстремум зависимости безразмерной температуры в центре области от безразмерной температуры фазового перехода, обеспечивающий максимальную разницу между средней температурой на границе и в центре области. В случае экстремума температура в центре области равна температуре фазового перехода, а проникающая способность температурной волны минимальна. Получена корреляционная зависимость для определения экстремального значения безразмерной температуры от наиболее влияющих теплофизических параметров [3].

Работа выполнена в рамках госзадания ИТПМ СО РАН (№ госрегистрации 124021500017-5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамсундар Н., Спэрроу Е. М. *Применение метода энтальпии к анализу многомерной задачи теплопроводности при наличии фазового перехода.* Теплопередача. 1976. № 3. С. 14–23.
2. Зырянов В. Н., Хубларян М. Г. *Пампинг-эффект в теории нелинейных процессов типа уравнения теплопроводности и его приложение в геофизике.* Докл. АН. 2006. Т. 408. № 4. С. 535–538.
3. Нарыгин Э. И., Пяткова А. В. *Распространение температурных волн в областях с фазовым переходом.* Теплофизика и аэромеханика. 2026. Т. 33. № 3. С. 477–493.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПЛОСКО-ВОГНУТОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ИЗ ПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ

А. В. Наседкин, А. А. Наседкина, А. Н. Рыбянец

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Пьезоэлектрические устройства широко применяются в многочисленных наукоёмких и промышленных приложениях, поскольку они за счёт явления пьезоэффекта позволяют преобразовывать механическую энергию в электрическую, и наоборот. При этом проблемы повышения эффективности пьезопреобразователей остаются до сих пор достаточно актуальными.

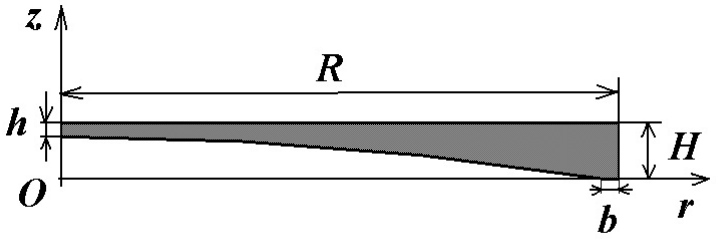
Так, были разработаны гибкие преобразователи (Flextensional Transducers) с лунообразными (Moonie) и тарелкообразными (Cymbal) накладками, которые демонстрируют большую связанность планарных и толщинных колебаний. В ультразвуковых приложениях важную роль играют возможности фокусировки акустических полей и управления характеристиками фокального пятна. В таких устройствах часто применяются сферические излучатели [1] или преобразователи с фокусирующими переходными слоями [2].

Помимо поиска новых геометрических форм, для повышения эффективности пьезопреобразователей можно подбирать подходящие пьезоэлектрические материалы, и, в частности, использовать композитные пьезокерамики. Так, пористая пьезокерамика стала применяться в гидроакустических излучателях, сенсорах, в преобразователях «зелёной» энергии, а также в устройствах медицинского ультразвука. Одна из очевидных причин эффективности её использования состоит в более низком акустическом импедансе по сравнению с плотной, что уменьшает амплитуды отражённых волн, и позволяет конструировать ультразвуковые излучатели без переходных слоёв. Кроме того, было обнаружено, что у многих пористых пьезокерамик толщинный пьезомодуль практически не зависит от пористости, а гидроакустические показатели качества возрастают с увеличением пористости.

В данной работе исследуется дисковой пьезоэлектрический преобразователь, в котором одна из его торцевых поверхностей имеет плоско-вогнутую форму, а также анализируется эффективность использования в нём различных материалов пористой пьезокерамики. Такой преобразователь был разработан ранее в НИИ физики ЮФУ под руководством А. Н. Рыбянца. Были проведены эксперименты для плоско-вогнутого преобразователи, выполненного из пьезокерамики ПКР-1, с электродированными торцевыми поверхностями. Эффективный толщинный пьезомодуль d_{33} измерялся при квазистатических испытаниях и нагрузке силой F, приложенной в центре верхней торцевой поверхности плоской формы. Преобразователь лежал на основании, касаясь его по плоской части своей нижней плоско-вогнутой торцевой поверхности. При приложении силы F преобразователь деформировался, и за счёт пьезоэффекта на электродах появлялись заряды Q, которые и регистрировались. Эффективный толщинный пьезомодуль определялся как отношение наведённого заряда к подаваемой силе: $d_{33}^{\text{eff}} = Q/F$. Проводились также эксперименты при динамических режимах работы преобразователя, в частности, измерялись амплитудно-частотные и импульсные характеристики.

Различные варианты плоско-вогнутого преобразователя изучались методами вычислительной механики в программном комплексе ANSYS, хорошо зарекомендовавшем себя

при компьютерных исследованиях различных пьезоэлектрических устройств. Рассматривались осесимметричные модели преобразователя, геометрия меридионального сечения которого показана на рисунке.



Этот преобразователь был исследован ранее авторами в [3] для одного варианта геометрических параметров R, H, b и h без акустической нагрузки при силовых и электрических воздействиях в статическом режиме и в режиме установившихся колебаний. Применялась одна модели пьезокерамики при различной пористости. Однако, как было показано в [4,5], для ряда ультразвуковых применений плоско-вогнутых преобразователей необходимо учитывать внешнюю акустическую среду и исследовать её фокальные характеристики. Кроме того, при использовании эффективных модулей пористой пьезокерамики важно учитывать модели неоднородной поляризации [6]. Этим, ещё не изученным вопросам, а также решению задач оптимизации и было посвящено новое исследование авторов.

Как и ранее, для предлагаемых плоско-вогнутых дисковых преобразователей было осуществлено конечно-элементное моделирование с использованием специального программного инструментария, разработанного на языке APDL ANSYS. Были построены параметрические твердотельные и конечно-элементные модели преобразователя в осесимметричной постановке, удобные для оптимизационных задач. Разработанные программы позволили вычислить эффективные толщинные пьезомодули при варьировании входных геометрических и физико-механических параметров в статических постановках и в режиме установившихся колебаний.

Полное компьютерное исследование включало следующие этапы:
– решение задач гомогенизации об определении эффективных модулей композитной пьезокерамики в зависимости от характеристик пор и принятых моделей поляризации;
– определение электрически активных резонансных частот, которые для пьезоэлектрических тел стандартно называются частотами электрических резонансов и антирезонансов, вычисление динамических коэффициентов электромеханической связи;
– построение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) ненагруженного на акустическую среду преобразователя в окрестности основных рабочих резонансных частот;
– построение АЧХ преобразователя с учётом внешней акустической среды в окрестности выбранных рабочих частот;
– исследование поля давления и фокального пятна во внешней акустической среде на рабочих частотах;
– решение нестационарной задачи и анализ волн давления при импульсных воздействиях для преобразователя с учётом внешней акустической среды;
– решение оптимизационных задач в зависимости от геометрических параметров преобразователя, условий его закрепления и пористости пьезокерамики.

Для тестовых образцов результаты экспериментов и компьютерных вычислений показали достаточно хорошую согласованность между собой, что позволило верифицировать

разработанные компьютерные модели пористой пьезокерамики и прогнозировать эффективные свойства плоско-вогнутого преобразователя при различных входных данных.

Как и ожидалось, было обнаружено, что чем меньше высота диска и чем больше радиус вогнутости, тем большими оказываются эффективные пьезомодули преобразователя. Так, для ряда наборов геометрических размеров было получено увеличение эффективного толщинного пьезомодуля по сравнению с модулем d_{33} пьезокерамического материала в сотни раз, что подтвердило эффективность использования плоско-вогнутой формы дискового преобразователя в разнообразных применениях.

Результаты расчётов также показали, что эффективность применения пористой пьезокерамики в плоско-вогнутом преобразователе отличается в режимах излучения и приёма. Причём при актуаторных применениях наилучшие результаты достигаются при возбуждении колебаний пористого пьезопреобразователя электрическим током вблизи соответствующей частоты электрического антирезонанса. Можно отметить, что аналогичные выводы об эффективности использования пористых пьезокерамик были получены для ряда пьезопреобразователей в [7–10] и в других работах авторов.

Отметим, что при всех рассмотренных внешних воздействиях плоско-вогнутый преобразователь имел бóльшие осевые смещения, чем аналогичный пьезокерамический диск канонической формы. Наибольшая чувствительность плоско-вогнутого преобразователя из пористой пьезокерамики при механических воздействиях позволяет рекомендовать его в качестве сенсора или приёмника акустических колебаний. В режимах излучения рассматриваемый преобразователь также демонстрирует достаточную эффективность, особенно в его оптимальных вариантах.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-11-00302-П, https://rscf.ru/project/22-11-00302-П/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bai X., Wang D., Zhen L. [et al.] *Design and micromanufacturing technologies of focused piezoelectric ultrasound transducers for biomedical applications.* Int. J. of Extreme Manufacturing. 2024. V. 6. No. 6. Art. 062001.
2. Sun Y., Tao J., Guo F. [et al.] *AZ31B magnesium alloy matching layer for Lens-focused piezoelectric transducer application.* Ultrasonics. 2023. V. 127. Art. 106844.
3. Наседкин А. В., Наседкина А. А., Рыбянец А. Н. *Моделирование и конечно-элементный анализ преобразователя из пористой пьезокерамики в форме диска с плосковогнутой поверхностью.* Дефектоскопия. 2018. № 6. С. 23–31.
4. Kim J., Kim M. *Focal position control of ultrasonic transducer made of plano-concave form piezoelectric vibrator.* Ultrasonics. 2022. V. 121. Art. 106668.
5. Kobayashi T., Tai H., Kato S. *Measurement method of particle concentration and acoustic properties in suspension using a focused ultrasonic impulse radiated from a plano-concave transducer.* Ultrasonics. 2006. V. 44. P. e491–e496.
6. Наседкин А. В., Наседкина А. А., Толмачева Я. В. *Компьютерная гомогенизация пористых пьезокерамик различной сегнетожесткости при случайной структуре пористости и неоднородности поля поляризации.* Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16. № 4. С. 476–492.
7. Iovane G., Nasedkin A. V. *Computer simulation of torsional transducer from porous piezoceramics with twisted rod.* Days on Diffraction 2019. IEEE Publ. 2019. P. 68–73.

8. Наседкин А. В., Наседкина А. А., Нассар М. Э. *Конечно-элементный расчет дискового преобразователя с тарелкообразными накладками и активным элементом из пористой пьезокерамики с экстремальной проводимостью поверхностей пор.* Проблемы прочности и пластичности. 2023. Т. 85. № 1. С. 63–76.
9. Nassar M. E., Nasedkin A. *Numerical study of moonie transducer with active element made of porous piezoceramics with metallized pore surfaces.* Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. PHENMA 2024. I. A. Parinov, S.-H. Chang, N. Sohani, V. K. Gupta (Eds.) Springer Proceedings in Materials. Springer Cham, 2025. V. 3. P. 483–496.
10. Nasedkin A. V., Nasedkina A. A. *Analysis of the influence of porosity and non-uniform polarization of piezoelectric ceramics on the efficiency of a bridge transducer as sensor and actuator.* J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2025. V. 18. No. 2. P. 218–228.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОКОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

О. О. Некрасов, Б. Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Рассматривается плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости. Под слабопроводящей понимается жидкость, имеющая малую электропроводность, что позволяет исключить появление значимого тока заряда и, соответственно, магнитных эффектов, при этом оставляя возможность манипулировать движением жидкости за счёт внешнего электрического поля [1]. Слой жидкости помещён между идеально проводящими твёрдыми обкладками конденсатора и умеренно нагревается сверху. Обкладками конденсатора генерируется переменное электрическое поле.

Для описания динамики системы используется классическая система электрогидродинамических уравнений, содержащая уравнение Навье – Стокса с двумя массовыми силами (сила тяжести и сила Кулона), условие несжимаемости, уравнение температуропроводности, закон сохранения заряда, учитывающий диффузию заряда, а также зависимости между плотностью заряда, напряжённостью электрического поля и электрическим потенциалом [2]:

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v} + q\vec{E}, \\ \operatorname{div}\vec{v} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)T = \chi\Delta T, \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma\vec{E} - D\nabla q) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)q = 0, \\ \operatorname{div}\vec{E} = q/\varepsilon\varepsilon_0, \\ \vec{E} = -\nabla\Phi, \end{cases} \tag{1}$$

где ρ – плотность жидкости, $\vec{v}$ – поле скорости, p – поле давления, $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, η – динамическая вязкость, q – плотность заряда, $\vec{E}$ – напряжённость электрического поля, T – температура, χ – коэффициент температуропроводности, σ – электропроводность, D – коэффициент диффузии заряда, ε – диэлектрическая проницаемость, ε_0 – электрическая постоянная, Φ – электрический потенциал.

Система (1) дополняется граничными условиями на горизонтальных обкладках конденсатора:

$$\begin{gathered} \text{при } z = 0: \ \vec{v} = 0, \quad T = \theta, \quad \Phi = U\cos(\omega t), \quad \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \\ \text{при } z = h: \quad \vec{v} = 0, \quad T = 0, \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

На границах подразумевается отсутствие проницаемости заряда [3]. На вертикальных границах ставятся условия периодичности, при этом ширина расчётной области определяет горизонтальный масштаб возмущений (волновое число).

Ключевой особенностью задачи является взаимодействие двух механизмов возникновения конвекции: термогравитацонного [4], связанного с действием силы плавучести на неоднородно нагретую жидкость, и электрокондуктивного [5], возникающего из-за действия силы Кулона на заряд с проводимостью, линейно зависящей от температуры. Взаимодействие механизмов приводит к появлению эффектов, не наблюдаемых в рамках их отдельного действия.

Система (1) обезразмеривается, при этом применяется электрогидродинамическое [6], безындукционное [7] приближение и приближение Буссинеска; рассматривается случай двумерного движения в некой вертикальный плоскости $\vec{v} = (u, 0, w)$ и $\partial/\partial y = 0$, вводится функция тока ψ следующим образом: $v_x = -\partial\psi/\partial z$, $v_z = \partial\psi/\partial x$. В конечном итоге система (1) приводится к виду [8]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \dfrac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial z}\Delta\psi - \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial x}\Delta\psi\right) = \Delta^2\psi + \mathrm{Ra}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \mathrm{Ra}_\sigma\dfrac{\partial q}{\partial x}\cos(2\pi\nu t), \\ \mathrm{Pr}\dfrac{\partial T}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial T}{\partial z} - \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{\partial T}{\partial x} = \Delta T + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \mathrm{Pr}_e\dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\mathrm{Pr}_e}{\mathrm{Pr}}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial q}{\partial z} - \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{\partial q}{\partial x}\right) + q + \dfrac{\partial T}{\partial z}\cos(2\pi\nu t) = D^*\Delta q, \end{cases} \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\text{при } z = 0: \ \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \quad T = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \\ &\text{при } z = 1: \ \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \quad T = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Система (3) содержит ряд безразмерных параметров: число Прандтля $\mathrm{Pr} = \eta(\chi\rho_0)^{-1}$, число Рэлея $\mathrm{Ra} = \rho_0 g\beta_\theta\theta h^3(\chi\eta)^{-1}$, электрическое число Рэлея $\mathrm{Ra}_\sigma = \varepsilon_0\varepsilon U^2\beta_\sigma\theta(\chi\eta)^{-1}$, безразмерную частоту $\nu = \omega\rho_0 h^2(2\pi\eta)^{-1}$, электрическое число Прандтля $\mathrm{Pr}_e = \varepsilon\varepsilon_0\eta(h^2\sigma_0\rho_0)^{-1}$ и безразмерный коэффициент диффузии заряда $D^* = D\rho_0(\eta)^{-1}$. Электрическое число Рэлея является аналогом термического числа Рэлея, а электрическое число Прандтля представляет собой безразмерное время релаксации заряда. В качестве управляющих параметров рассматриваются электрическое число Рэлея, пропорциональное амплитуде напряжения на обкладках конденсатора и частота колебаний электрического поля. Прочие безразмерные параметры принимают фиксированные значения, типичные для технических масел (кукурузного или трансформаторного): $\mathrm{Ra} = -500$, $\mathrm{Pr} = 100$, $\mathrm{Pr}_e = 10$, $D^* = 10^{-2}$.

Для анализа линейной устойчивости системы (3) в переменном поле используется метод Галёркина [4] и теория Флоке [9], при этом для разложений функции тока применяются функции Петрова [10].

Набор нейтральных кривых линейной устойчивости для различных частот внешнего поля представлен на рис. 1. Как видно из рисунка, на всех нейтральных кривых, кроме той, что соответствует случаю постоянного поля, присутствуют как области квазипериодического отклика, так и мешки синхронизации, при этом, в зависимости от частоты электрического поля, мешок синхронизации может быть удалён от области глобального минимума нейтральной кривой ($\nu = 0.03$), может частично перекрывать область глобального минимума, оставляя зазор между различными типами возбуждения движения ($\nu = 0.04$), а также может полностью перекрывать область глобального минимума ($\nu = 0.05$). Для

этих трёх случаев исследована эволюция нелинейной системы (3) при помощи конечно-разностного метода дробного шага [11] в соответствии с вертикальными разрезами нейтральных кривых на рис. 1.

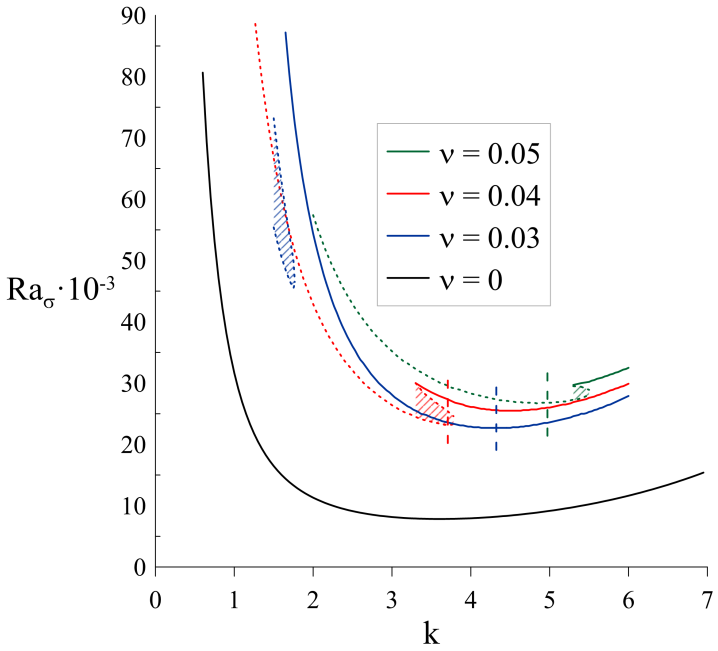


Рис. 1. Нейтральные кривые для различных частот внешнего воздействия, сплошная линия соответствует квазипериодическому отклику, прерывистая – синхронному

График зависимости числа Нуссельта (безразмерного теплопотока на горизонтальной границе задачи) от электрического числа Рэлея для первого случая ($\nu = 0.03$) представлен на рис. 2.

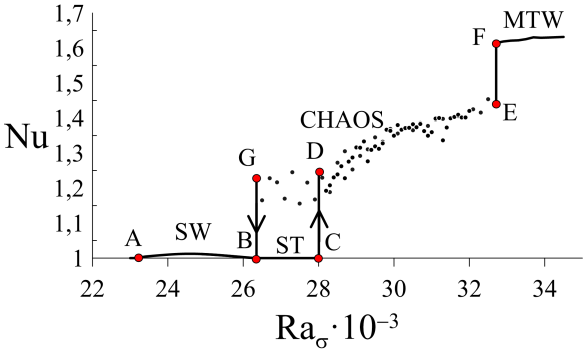


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма эволюции движения жидкости для случая $\nu = 0.03$ (синий график рис. 1)

Конвекция возникает мягким образом при $\mathrm{Ra}_\sigma = 22.3 \cdot 10^3$ в виде бегущей волны (traveling wave – TW). С ростом управляющего параметра интенсивность теплопереноса возрастает до тех пор, пока система при $\mathrm{Ra}_\sigma = 23.3 \cdot 10^3$ скачкообразно путём обратной бифуракции не переходит к режиму стоячих волн (standing wave – SW). Между этими двумя режимами существует переходная область $22.7 \cdot 10^3 < \mathrm{Ra}_\sigma < 23.3 \cdot 10^3$, в рамках которой система периодически переключается между тем и другим режимом (на рис. 1 обозначено TW + SW).

Бифуркационная диаграмма для случая $\nu = 0.04$ изображена на рис. 3.

При увеличении управляющего параметра конвекция возникает в точке A ($\mathrm{Ra}_\sigma = 23.2 \cdot 10^3$) мягким образом в виде стоячих волн, которые существуют на интервале AB ($23.2 \cdot 10^3 < \mathrm{Ra}_\sigma < 26.4 \cdot 10^3$), отвечающим области мешка синхронизации на соответствующей нейтральной кривой. В области BC ($26.4 \cdot 10^3 < \mathrm{Ra}_\sigma < 28.0 \cdot 10^3$) конвекция подавляется, а в точке C ($\mathrm{Ra}_\sigma = 28.0 \cdot 10^3$) система скачкообразно переходит к апериодическому хаотическому режиму движения.

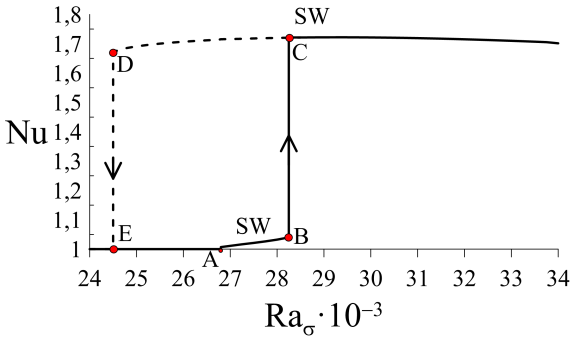


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма эволюции движения жидкости для случая $\nu = 0.04$ (красный график рис. 1)

Интенсивность хаотических колебаний возрастает с ростом управляющего параметра вплоть до точки E ($\mathrm{Ra}_\sigma = 32.7 \cdot 10^3$), где система скачкообразно переходит к режиму модулированных бегущих волн (modulated traveling wave – MTW), интенсивность конвекции которых меняется с частотой внешнего поля.

При уменьшении управляющего параметра из области конвекции система эволюционирует иначе: хаотические колебания существуют левее точки D ($\mathrm{Ra}_\sigma = 28.0 \cdot 10^3$) вплоть до точки E ($\mathrm{Ra}_\sigma = 26.4 \cdot 10^3$), где система с резким уменьшением теплопотока возвращается к синхронному отклику. Таким образом, наблюдается петля гистерезиса BCDE, на которой сосуществуют отсутствие конвекции и хаотические возмущения.

Бифуркационная диаграмма для случая $\nu = 0.05$ изображена на рис. 4.

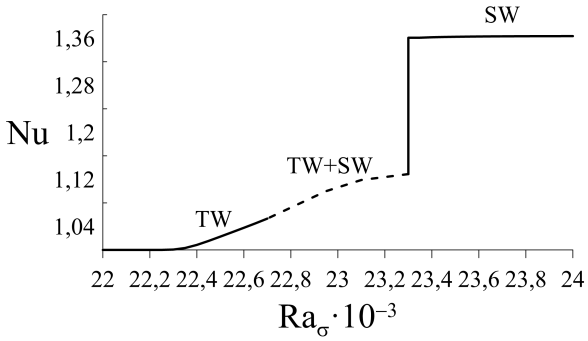


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма эволюции движения жидкости для случая $\nu = 0.05$ (зелёный график рис. 1)

При увеличении управляющего параметра из стационарной области конвекция возникает в точке A ($\mathrm{Ra}_\sigma = 26.8 \cdot 10^3$) в соответствии с линейной теорией в виде стоячих волн, при этом наблюдается небольшой скачок теплопотока. Затем при увеличении управляющего параметра интенсивность колебаний возрастает вплоть до точки B ($\mathrm{Ra}_\sigma = 28.2 \cdot 10^3$),

где система скачкообразно переходит к высокоинтенсивному режиму стоячих волн, отличающемуся проявлением старших гармоник в распределениях функции тока и плотности заряда. При уменьшении управляющего параметра высокоинтенсивные стоячие волны существуют вплоть до точки D ($\mathrm{Ra}_\sigma = 24.5 \cdot 10^3$), где конвекция исчезает скачкообразно. Таким образом, на нижней ветви петли гистерезиса EBCD (рис. 3) наблюдается отсутствие конвекции и, затем, низконеинтенсивные стоячие волны, а на верхней ветви – высокоинтенсивные стоячие волны.

Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда № 25-21-20108, https://rscf.ru/project/25-21-20108/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Остроумов А. Г. *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей.* М. : Наука, 1979. 320 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика.* М. : Наука, 1986. 736 с.
3. Pèrez A. T., Castellanos A. *Role of charge diffusion in finite-amplitude electroconvection.* Phys. Rev. A. 1991. V. 44. No. 8. P. 6659-6664.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.* М. : Наука, 1972. 392 с.
5. Turnbull R. J. *Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient. I. Theory.* The Physics of Fluids. 1968. V. 11. Iss. 12. P. 2588–2596.
6. Болога М. К., Гросу Ф. П., Кожухарь И. А. *Электроконвекция и теплообмен.* Кишинёв : Штиинца, 1977. 320 с.
7. Turnbull R. J. *Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient. II. Experimental results.* The Physics of Fluids. 1968. V. 11. Iss. 12. P. 2597–2603.
8. Картавых Н. Н., Смородин Б. Л., Ильин В. А. *Параметрическая электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном плоском конденсаторе.* ЖЭТФ. 2015. Т. 138. Вып. 1. С. 178–189.
9. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* М. : Издательство иностранной литературы, 1958. 474 с.
10. Петров Г. И. *Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости.* Прикладная математика и механика. 1940. Т. 4. № 3. С. 3–12.
11. Роуч П. *Вычислительная гидродинамика.* М. : Мир, 1980. 618 с.

КОМБИНИРОВАННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНИКИ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

И. С. Никитин[1,2], *В. И. Голубев*[1,2], *А. В. Шевченко*[1,2], *А. Д. Никитин*[1,2]

[1] *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва*
[2] *Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный*

Многослойная микроструктура наложенных отверждённых треков, возникающая в процессе 3D-печати изделий из металлических порошков с использованием технологии селективного лазерного плавления (СЛП), в значительной степени определяется соотношением основных параметров технологического процесса – мощностью лазерного луча, скоростью его движения и шагом смещения соседних треков. Недоплавленные или переплавленные микрозоны создают систему неоднородностей (микропор или, наоборот, микровключений повышенной твёрдости), которые при высокочастотном циклическом нагружении приводят к более раннему зарождению микротрещин и в дальнейшем к преждевременному усталостному макроразрушению [1, 2].

Ещё одним важным фактором, существенно влияющим на усталостную прочность и долговечность 3D-напечатанных образцов, является наведённое в процессе аддитивной печати поле остаточных напряжений [3]. Для оценки параметров усталостной прочности напечатанного образца необходимо построить связанную термомеханическую модель процесса СЛП, предложить и реализовать численный метод решения соответствующей нестационарной системы уравнений.

При решении многопараметрических нелинейных задач теплопроводности с многократными фазовыми переходами (металлический порошок – расплав – твёрдый сплав) в окрестности подвижного теплового источника (лазерного луча) в большинстве современных работ используется энтальпийная формулировка нелинейной задачи теплопроводности [2], которая не требует явного выделения подвижных межфазных границ с выполнением условий Стефана.

Для решения задачи определения полей напряжений, возникающих в термомеханическом процессе СЛП, предлагается использовать термоупруговязкопластическую модель сплошной среды [4] с сильной нелинейной зависимостью основных механических параметров (объёмного модуля упругости K, модуля сдвига μ, предела текучести σ_s) от температуры T вплоть до околонулевых значений μ и σ_s в ванне расплава (жидкой фазе) с возможностью их восстановления по мере остывания (отверждения). Такая модель позволяет вести сквозной расчёт многофазной термомеханической задачи на основе единой системы уравнений для твёрдой и жидкой фаз.

В этой связанной системе уравнений имеется параболическая часть (нелинейное уравнение теплопроводности в энтальпийной формулировке) и гиперболическая часть (система уравнений упруговязкопластической (УВП) среды с термическим разупрочнением–упрочнением). При сильном термическом разупрочнении до околонулевых значений предела текучести и модуля сдвига девиаторная часть тензора напряжений также становится околонулевой, сам тензор напряжений близок к шаровому, что соответствует жидкой фазе в ванне расплава. Затем при остывании происходит термическое упрочнение сплава (увеличение предела текучести и модуля сдвига), что соответствует процессу отверждения трека за подвижной ванной расплава.

Ранее были построены явно-неявные схемы различного порядка аппроксимации для системы уравнений – УВП среды с упрочнением-разупрочнением [4] для моделирования различных динамических процессов в средах с меняющейся внутренней структурой. Такие явно-неявные схемы могут быть использованы для численного решения системы уравнений УВП среды с термическим разупрочнением–упрочнением. В результате реализации комбинированного численного метода (безматричная неявная схема для параболической части и явно-неявная сеточно-характеристическая схема для гиперболической части) получено решение ряда задач, моделирующих процесс воздействия лазерного нагрева на слой металлического сплава, определены нестационарные поля механических напряжений, в том числе, остаточные напряжения после остывания слоя.

Математическая формулировка нелинейной задачи теплопроводности, описывающая процесс СЛП, для функции энтальпии H выглядит следующим образом [2]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot (k(H)\nabla T(H)). \tag{1}$$

Граничные условия на гранях параллелепипеда задаются с учётом теплообмена с окружающей средой, а на грани $x_3 = 0$, где действует тепловой подвижный источник, имеют вид

$$k(H)\frac{\partial T}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = -\beta(T_{x_3=0} - T_{ext}) + q(x_1 - vt, x_2)/(\pi R^2), \quad q(x_1 - vt, x_2) = q_0 H(R - r),$$

где R – радиус пятна лазерного луча, q_0 – мощность лазерного луча, $r(x_1 - vt, x_2) = \sqrt{(x_1 - vt)^2 + x_2^2}$ – расстояние до центра лазерного пятна, который движется со скоростью v вдоль оси x_1, $H(x)$ – функция Хэвисайда, T_{ext} – температура внешней среды, β – коэффициент теплопередачи «металл – внешняя среда». Зависимость температуры и теплопроводности от энтальпии учитывает возможные фазовые переходы [2]. Также задаются начальные условия для энтальпии и распределения температур.

Для уменьшения времени расчёта, что особенно важно в случае нестационарного 3D моделирования процесса построения многослойной системы отверждённых треков, предложена безматричная неявная схема [5] в варианте метода конечных объёмов. Аппроксимация во внутренних точках основана на интегрировании уравнения (1) по объёму ячейки с центральной точкой определения неизвестных сеточных функций энтальпии и температуры на $n+1$-ом слое по времени. Неявная аппроксимация на шаге «предиктор» записывается с коэффициентами теплопроводности и теплоёмкости энтальпийного уравнения, взятыми с предыдущего n-го слоя. Неявный шаг «корректор» проводится с пересчитанными значениями коэффициента теплопроводности и теплоёмкости энтальпийного уравнения.

Данная неявная схема, допускающая гораздо больший шаг по времени, чем условие устойчивости явной схемы, приводит к необходимости решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений вида $A\mathbf{q} = \mathbf{b}$. Здесь неизвестный вектор $\mathbf{q}$ обозначает все неизвестные значения энтальпии H, известный вектор правой части $\mathbf{b}$ зависит от известных значений энтальпии с текущего шага по времени, A – матрица системы. Для решения этой системы был использован итерационный метод сопряжённых градиентов. Одним из его преимуществ является отсутствие необходимости явного формирования, запоминания и каких-либо операций с матрицей системы A. Требуется только алгоритм вычисления невязки $A\mathbf{q}_n - \mathbf{b}$ и её однородной части $A\mathbf{q}_n$. В нестационарных задачах за счёт того, что решение на предыдущем временно́м слое является хорошим начальным приближением к решению на новом слое, число итераций метода сопряжённых градиентов резко

падает, и безматричные алгоритмы неявных схем на основе метода сопряжённых градиентов начинают работать так же быстро, как явные схемы. Описанный безматричный алгоритм был реализован и показал свою эффективность в рассматриваемой нестационарной многофазной задаче теплопроводности в энтальпийной формулировке.

Система уравнений изотропной термоупруговязкопластической среды была использована для описания эффектов термического упрочнения–разупрочнения металлических сплавов с фазовыми переходами [4]. Особый интерес представляют уравнения для девиаторов напряжений с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром в его знаменателе:

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t} = 2\mu(T)\boldsymbol{e'} - 2\mu(T)\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}/2}}\left\langle F\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}/2}}{\sigma_s(T)} - 1\right)\right\rangle \Big/ \tau(T), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{e} = (\nabla \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \otimes \nabla)/2, \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma \boldsymbol{I}, \quad \sigma = (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{I})/3, \quad \boldsymbol{e'} = \boldsymbol{e} - (\boldsymbol{e} : \boldsymbol{I})\boldsymbol{I}/3,$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\mathbf{s}$ – девиатор тензора напряжений, σ – среднее напряжение, $\mathbf{e}$ – тензор скорости деформации, $\boldsymbol{e'}$ – девиатор тензора скорости деформации, $\boldsymbol{e'}_{vp}$ – девиатор тензора скорости вязкопластической деформации, $\boldsymbol{J}_2^s = \boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}/2$ – второй инвариант девиатора напряжений, $F(x)$ – нелинейная функция вязкости, $F \geq 0$, $F(0) = 0$, $\langle F \rangle = FH(x)$, $H(x)$ – функция Хэвисайда, $\tau(T)$ – характерное время релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести, $\sigma_s(T)$ – переменный предел текучести, зависящий от температуры T, $\mu(T)$ – модуль упругости Ламе, α – линейный коэффициент теплового расширения. Зависимости параметров металлического сплава в различных фазовых состояниях от температуры были выбраны по результатам экспериментов, приведённых в работах различных авторов, в частности в [3].

Была построена явно-неявная численная схема для решения УВП системы уравнений с термическим разупрочнением–упрочнением (2). Аппроксимация уравнений движения для компонент скорости и уравнения для среднего напряжения по какой-либо явной схеме требуемого порядка не вызывает затруднений [4]. Будем считать, что такая аппроксимация проведена, значения скоростей и среднего напряжения на верхнем временно́м слое определены с учётом необходимых по постановке начальных и граничных условий.

Неявная аппроксимация уравнения для девиаторов тензора напряжений с учётом возможного малого параметра в знаменателе нелинейного свободного члена имеет вид

$$\frac{\boldsymbol{s}^{n+1} - \boldsymbol{s}^n}{\Delta t} = 2\mu^{n+1}\boldsymbol{e'}^{n+1} - \frac{2\mu^{n+1}}{\tau^{n+1}}\frac{\boldsymbol{s}^{n+1}}{\sqrt{\boldsymbol{s^{n+1}} : \boldsymbol{s^{n+1}}/2}}\left\langle F\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{s^{n+1}} : \boldsymbol{s^{n+1}}/2}}{\sigma_s^{n+1}} - 1\right)\right\rangle,$$

где приняты обозначения для параметров среды $\mu^{n+1} = \mu(T^{n+1})$, $\sigma_s^{n+1} = \sigma_s(T^{n+1})$, $\tau^{n+1} = \tau(T^{n+1})$. В результате аналитического решения этой системы алгебраических уравнений неявной аппроксимации для линейной функции вязкости была получена формула для девиатора напряжений в термоупруговязкопластической среде, которая представляет собой алгебраическую корректировку «упругого» девиатора и имеет вид

$$\boldsymbol{s}^{n+1} = \frac{(\sigma_s^{n+1} + \delta^{n+1}\Sigma)}{(1 + \delta^{n+1})}\frac{\boldsymbol{s}_e^{n+1}}{\Sigma}, \quad \Sigma = \sqrt{\boldsymbol{s}_e^{n+1} : \boldsymbol{s}_e^{n+1}/2}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{s}_e^{n+1} = \boldsymbol{s}^n + 2\mu^{n+1}\boldsymbol{e'}^{n+1}\Delta t$ – известные компоненты девиатора после «упругого» шага по времени, $\delta^{n+1} = \tau^{n+1}\sigma_s^{n+1}/(2\mu^{n+1}\Delta t)$ – дополнительный параметр системы, возможно, малый.

Предложенная явно-неявная схема позволяет свести численное решение термоупруговязкопластической системы уравнений к явному расчёту упругой части системы уравнений и алгебраической корректировке промежуточных «упругих» девиаторов напряжений в соответствии с полученной формулой (3).

Для расчёта шага по времени динамической системы уравнений упругости был выбран высокоточный сеточно-характеристический метод повышенного порядка аппроксимации с расщеплением по пространственным направлениям, сводящим исходную трёхмерную нестационарную систему уравнений к набору из последовательно решаемых одномерных уравнений переноса [6].

С помощью предложенной комбинированной схемы был решен ряд термомеханических задач о воздействии неподвижного импульсного и подвижного лазерного луча на подложку с порошковым слоем из титанового сплава. Получены геометрические параметры ванн расплава, распределения температур, а также распределения напряжений, возникающих в процессе остывания и отверждения треков. Рассчитанная структура неоднородностей отверждённых многослойных треков наряду с неоднородным полем остаточных напряжений позволят в дальнейшем получить уточнённую оценку снижения усталостной прочности напечатанного образца при циклическом высокочастотном нагружении.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 26-19-00315, https://rscf.ru/project/26-19-00315/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hrabe N., Gnaupel-Herold T., Quinn T. *Fatigue properties of a titanium alloy (Ti-6Al-4V) fabricated via electron beam melting (EBM): effects of internal defects and residual stress*. Int. J. of Fatigue. 2017. V. 94. P. 202–210.
2. Никитин И. С., Голубев В. И., Никитин А. Д., Стратула Б. А. *Численное моделирование усталостного разрушения легких сплавов, полученных по аддитивной технологии*. Вычислительная механика сплошных сред. 2025. Т. 18. № 2. С. 173–201.
3. Cao J., Gharghourib M. A., Nash Ph. *Finite-element analysis and experimental validation of stress and distortion in electron beam additive manufactured Ti-6Al-4V build plates*. J. of Materials Processing Technology. 2016. No. 237. P. 409–419.
4. Nikitin I. S., Golubev V. I., Shevchenko A. V. *Numerical schemes for problems in the dynamics of elastoviscoplastic media with anarbitrary hardening-softening function*. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2026. V. 66. No. 6. P. 1005–1017.
5. Burago N. G., Nikitin I. S. *Matrix-free conjugate gradient implementation of implicit schemes*. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. V. 58. No. 8. P. 1247–1258.
6. Mi X., Golubev V. I., Golubeva Y. A. *Grid-characteristic two-dimensional schemes for dynamic problems of linearly elastic layered media*. Differential Equations. 2025. V. 61. P. 1136–1149.

ЛИГАМЕНТЫ, ПОВЕРХНОСТНЫЕ И ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ: ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

А. А. Очиров, Ю. Д. Чашечкин

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Наблюдение волн на поверхности и в толще жидкостей вызывает интерес исследователей на протяжении длительного времени и не теряет актуальности в настоящее время в связи с большим количеством академических и практических приложений. Внимание к периодическим движениям жидкостей и газов связано с построением теории плавучести и полёта свободных тел, взаимодействием волн и гидротехнических сооружений, практическими применениями в метеорологии, акустике, океанологии и многих других приложениях. Все встречающиеся в природе жидкости стратифицированы, при этом на фоне монотонной стратификации, характеризующейся профилем плотности $\rho(z)$, масштабом $\Lambda = |d\ln\rho/dz|^{-1}$, частотой $N = \sqrt{g/\Lambda}$ и периодом T_b плавучести наблюдаются тонкие высокоградиентные прослойки [1, 2].

Динамика и структура возмущений гетерогенных жидкостей является предметом теоретических и экспериментальных исследований интенсификация которых произошла с развитием математических методов, программ численного моделирования, вычислительной техники и методики эксперимента. Изучается геометрия, динамические характеристики и структурные особенности различных компонентов периодических возмущений. Настоящая работа посвящена построению методики получения полных решений линеаризованной задачи и лабораторному наблюдению различных компонентов периодических возмущений в стратифицированной жидкости. Опыты выполнены на стендах Уникальной исследовательской установки «ГФК ИПМех РАН» [3]. Теоретические исследования базируются на системе фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей, отдельные уравнения которой впервые приведены в 1944 году [4], а в исследовании [5] обсуждается необходимость их совместного решения с использованием объединённой теории регулярных и сингулярных асимптотических возмущений [6].

Система фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей включает в себя уравнения переноса импульса, температуры, примесей, сохранения вещества, баланса энергии и уравнения состояния для термодинамического потенциала Гиббса и для плотности, связывающего последнюю с термодинамическими параметрами [5]. Эта система уравнений имеет высокий ранг и соответствующее количество решений, которые можно получить с использованием объединённых методов теории регулярных и сингулярных асимптотических возмущений. Для демонстрации методики сделаны упрощающие предположения, которые понижают ранг системы и, следовательно, уменьшают количество получаемых решений.

Рассматривается задача в двумерной постановке в декартовой системе координат Oxz, в которой ось Oz направлена вертикально вверх, а горизонтальная ось совпадает с равновесным положением свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости с кинематической вязкостью ν и плотностью, распределение которой задаётся экспоненциальным профилем $\rho = \rho_{00}\exp(-z/\Lambda)$. Для рассмотрения методики получения полных решений, содержащих и волновые, и структурные компоненты течений, ограничимся определением равновесного профиля стратификации без указания её физической природы. Система

уравнений решается совместно с граничными условиями на свободной поверхности и естественным условием затухания движения с глубиной. В модели несжимаемой жидкости поле скоростей $\mathbf{u}$ записывается с использованием функции тока ψ

$$\mathbf{u} = (\partial_z\psi; -\partial_x\psi)\,,$$

а линеаризованную задачу можно свести к одному уравнению [7]:

$$\partial_{tt}\Delta\psi - \nu\partial_t\Delta\Delta\psi + \frac{\nu}{\Lambda}\,\partial_{zt}\Delta\psi - \frac{1}{\Lambda}\,\partial_{ztt}\psi + N^2\partial_{xx}\psi = 0. \tag{1}$$

Для аналитического анализа уравнения (1) проведём процедуру обезразмеривания на собственные параметры среды, характеризующие естественные масштабы задачи. В качестве временно́го масштаба выберем обратную частоту плавучести $\tau_b = N^{-1}$, а в качестве пространственного масштаба – вязкий волновой масштаб Рэлея $\delta_N^\nu = (\nu g)^{1/3}\,N^{-1}$. При таком выборе параметров обезразмеривания в задаче естественным образом возникает малый параметр $\varepsilon = \delta_g^\nu/\delta_N^\nu$, определяющий отношение собственных масштабов задачи – вязкого $\delta_g^\nu = \sqrt[3]{\nu^2/g}$ и вязкого волнового масштаба Рэлея δ_N^ν. В безразмерном виде уравнение (1) переписывается:

$$\partial_{t*t*}\Delta\psi_* - \varepsilon\partial_{t*}\Delta_*\Delta_*\psi_* + \frac{\varepsilon}{\Lambda_*}\,\partial_{z*t*}\Delta_*\psi_* - \frac{1}{\Lambda_*}\,\partial_{z*t*t*}\psi_* + \partial_{x*x*}\psi_* = 0. \tag{2}$$

В выражении (2) индекс «$*$» определяет безразмерные переменные и производные по обезразмеренным координатам. Здесь малый параметр ε стоит при старшей производной, следовательно, уравнение относится к классу сингулярно возмущённых. Регулярные асимптотические разложения позволяют получить только два корня из четырёх, из которых с учётом условия затухания движения остается только один, описывающий волновой компонент течения. Приближённое значение регулярного решения ψ_{reg*} с точностью до главных слагаемых записывается следующим образом:

$$\psi_{reg*} \approx A_* \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Lambda_*} + \sqrt{\frac{1}{\Lambda_*} + \frac{4k_{x*}^2}{\omega_*^2}\,(\omega_*^2 - 1)}\right) z_*\right] \exp\left(ik_{x*}x_* - i\omega_* t_*\right). \tag{3}$$

Недостающие два решения определяются с использованием метода доминирующего баланса теории сингулярных возмущений. Из этих решений с учётом условия затухания движения с глубиной также отбирается физически реализуемый корень, приближённое значение которого ψ_{sing*} с точностью до главных слагаемых выписано ниже:

$$\psi_{sing*} \approx B_* \exp\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega_*}{\varepsilon}}\,z_*\right) \exp\left(ik_{x*}x_* - i\omega_* t_*\right). \tag{4}$$

Полные решения исходной системы уравнений в линейном приближении определяются комбинацией регулярных (3) и сингулярных (4) корней, которая при переходе к размерным переменным записывается следующим образом:

$$\psi \approx \left[A\exp\left(k_z z\right) + B\exp\left(k_\ell z\right)\right]\exp\left(ik_x x - i\omega t\right). \tag{5}$$

Здесь k_z и k_ℓ – суть компоненты волнового вектора регулярного (3) и сингулярного (4) решений соответственно. Совместное решение задачи с граничными условиями позволяет

получить дисперсионное уравнение, связывающее компоненты волнового вектора с положительно определённой частотой периодического возмущения, и отношения между амплитудами компонентов:

$$\begin{aligned}&\left(k_x^2+k_z^2\right)\left[k_\ell\omega^2-gk_x^2-\gamma k_x^4+i\omega\nu k_\ell\left(3k_x^2-k_\ell^2\right)\right]-\\&-\left(k_x^2+k_\ell^2\right)\left[k_z\omega^2-gk_x^2-\gamma k_x^4+i\omega\nu k_z\left(3k_x^2-k_z^2\right)\right]=0,\end{aligned}\qquad(6)$$

$$\frac{B}{A}=-\frac{k_x^2+k_z^2}{k_x^2+k_\ell^2}\,.$$

Здесь γ – нормированный на равновесное значение плотности коэффициент поверхностного натяжения, g – ускорение свободного падения.

Выражения (1)–(6) получены без использования стандартного приближения Буссинеска, что позволяет использовать решение во всей области, занимаемой жидкостью, не ограничиваясь тонким приповерхностным слоем.

Описанная методика применима и к другим типам периодических течений. В частности, для сжимаемой жидкости с использованием описанной методики получено дисперсионное уравнение для плоских внутренних волн с положительно определённой частотой ω и комплексным волновым вектором $\mathbf{k}$ [8]:

$$\left(\omega+i\nu k^2\right)\left[c_s^2\omega ik^4\nu-c_s^2N^2k_\perp^2+c_s^2k^2\omega^2+N^2\omega\left(\omega+i\nu k^2\right)+g^2k_\perp^2\right]=0,\qquad(7)$$

где ν – кинематическая вязкость, c_s – скорость звука, $k_\perp^2=k_x^2+k_y^2$, $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$.

Дисперсионное уравнение (7) переходит в уравнение коротких внутренних волн, не содержащее длину волны, если пренебречь сжимаемостью и вязкостью жидкости:

$$\omega^2k^2=N^2k_\perp^2\qquad\text{или}\qquad\omega^2=N^2\sin^2\vartheta.$$

Здесь угол ϑ обозначает наклон линии распространения внутренней волны к горизонту.

Для слабовязких однородных жидкостей в отсутствие силы тяжести высокочастотное приближение приводит дисперсионное уравнение к виду

$$\left(\nu k^2-i\omega\right)\left(ik^2+\frac{\omega\left(4\nu k^2-3i\omega\right)}{3c_s^2}\right)=0,$$

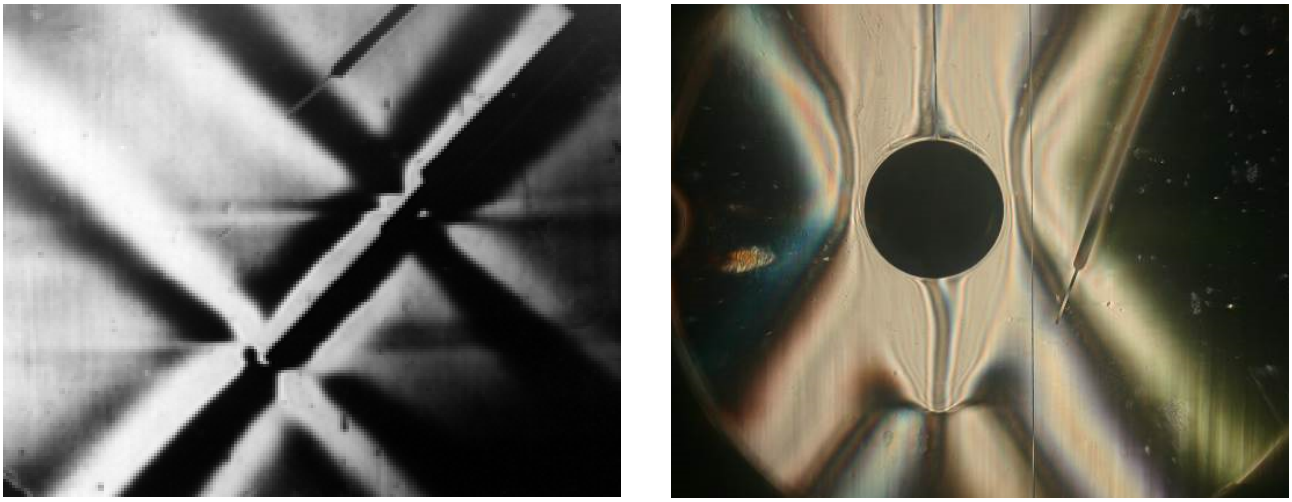
с регулярными k_z и сингулярными k_l решениями вида

$$k_{z1}=\pm\sqrt{-k_x^2+\frac{3\omega^2}{3c_s^2-4i\nu\omega}}\,,\qquad k_l=\pm\sqrt{-k_x^2+\frac{i\omega}{\nu}}\,.$$

Регулярное решение в приближении $(\omega\nu)/c_s^2\ll1$ переходит в известное дисперсионное соотношение для акустических волн в однородной среде [4]:

$$k^2=k_z^2+k_x^2=\frac{\omega^2}{c_s^2}\,.$$

Тонкие компоненты течений хорошо наблюдаются в лабораторном эксперименте в стратифицированных жидкостях (рис. 1). Лигаменты формируются на твёрдой границе и непосредственно в волновом поле без контакта с твёрдыми телами или границами жидкости в областях пересечения пучков внутренних волн.



а) б)

Рис. 1. Теневые фотографии пучков внутренних волн и лигаментов, индуцированных а) пластиной $L = 6$ см, б) вокруг сферы диаметром $D = 4.5$ см, вертикально осциллирующей в стратифицированной жидкости

Разработана методика построения полных решений линеаризованных систем уравнений механики гетерогенных жидкостей. Она основывается на применении объединённой теории регулярных и сингулярных асимптотических возмущений. Предложенный метод позволяет производить расчёты дисперсионных соотношений для волн и лигаментов, наблюдаемых в эксперименте в виде высокоградиентных прослоек и струй.

Эксперименты проведены на стендах УИУ «ГФК ИПМех РАН».

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-29-01124, https://rscf.ru/project/25-29-01124/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров К. Н. *Тонкая техмохалинная структура океана.* Л. : Гидрометеоиздат, 1976. 184 с.
2. Атмосфера стандартная. Межгосударственный стандарт ГОСТ 4401-81.
3. УИУ «ГФК ИПМех РАН». 2026. Сайт http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#equip.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика.* М. : Наука, 1986. 736 с.
5. Chashechkin Yu. D. *Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows.* Axioms. 2021. V. 10. No. 4. P. 286.
6. Найфе А. Х. *Введение в методы возмущений.* М. : Мир, 1984. 535 с.
7. Chashechkin Yu. D., Ochirov A. A. *Dispersion of periodic flows on the surface of a viscous heterogeneous liquid.* Networks and Heterogeneous Media. 2026. V. 21. No. 4. P. 1227–1261.
8. Chashechkin Y. D., Ochirov A. A. *Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field.* Mathematics. 2023. V. 11. No. 21. Art. 4443.

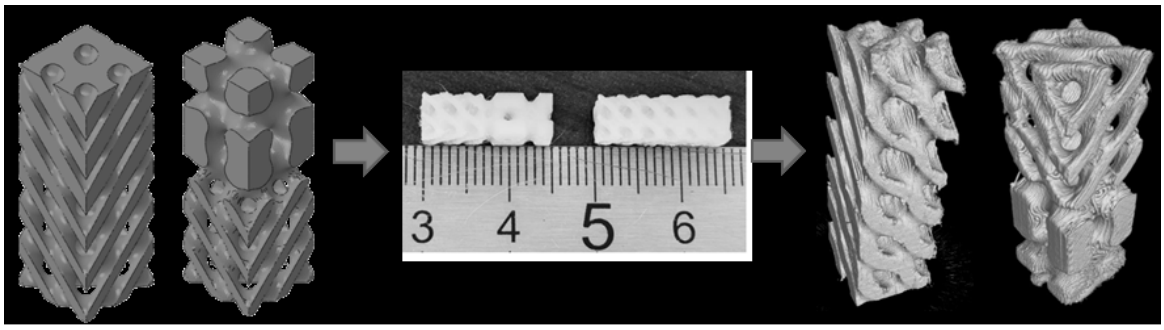
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЕГРАДАЦИИ ПОЛИМЕРНЫХ СКАФФОЛДОВ НА ИХ МЕХАНИЧЕСКИЙ ОТКЛИК ПО ДАННЫМ ТОМОГРАФИИ

Д. А. Павлецов[1], *Н. В. Еленская*[1], *Е. В. Садырин*[2], *И. В. Виндокуров*[1], *М. А. Ташкинов*[1]

[1]*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*
[2]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Замещение костной ткани – одна из актуальных проблем в медицине. Спрос на ткань постоянно растёт в связи с тем, что кость является самой трансплантируемой тканью в мире. Материалы для изготовления костных скаффолдов (решётчатых структур) требуют учёта строгих критериев, обеспечивающих успешное клиническое применение. При проектировании скаффолдов для костной инженерии важнейшим критерием является скорость биодеградации, которая должна соответствовать постепенному замещению скаффолдов клетками организма. При этом процессы деградации в полимерных каркасах зависят как от биохимических свойств материала, так и от внутренней архитектуры скаффолда, его морфометрических характеристик и условий нагружения.

В рамках данной работы объектами исследования являются реконструированные по данным томографии (получены на установке Xradia Versa 520 (РЦКП НОЦ «Материалы» ДГТУ)) полимерные образцы функционально-градиентных структур на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП), предназначенные для замещения повреждённой костной ткани в переходной трабекулярно-кортикальной зоне (см. рисунок).



Реконструкция была проведена для контрольных образцов, а также для образцов, подвергнутых воздействию жидкой среды в течение 7 и 14 дней при температуре 37 °C. Для полученных численных моделей были рассчитаны морфометрические характеристики для оценки поверхностной эрозии. Оценка механических характеристик проводилась под воздействием следующих типов нагружения, характерных для костной ткани: свободное сжатие, растяжение, изгиб и сдвиг. Задача прогнозирования механического отклика рассматривалась в линейно-упругой постановке, адгезия между слоями печати считалась идеальной. Изменение механического отклика оценивалось на основе данных об эффективной жёсткости скаффолда и распределения напряжений по его структуре.

Согласно полученным данным, воздействие жидкой среды влияет как на морфометрические, так и на эффективные механические свойства скаффолда. На основании данных расчёта морфометрических параметров показано, что при температуре, сопоставимой с температурой тела человека, поверхностная эрозия возникает на ранних этапах

деградации. Это, в свою очередь, влечёт за собой снижение эффективных жёсткостных характеристик структуры скаффолда.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSNM-2025-0001).

ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ ПРИ НАНЕСЕНИИ ПОКРЫТИЯ В УСЛОВИЯХ ЛАЗЕРНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Е. С. Парфёнова, А. Г. Князева

Институт физики прочности и материаловедения им. В. Е. Панина СО РАН, Томск

Лазерные технологии активно применяются для синтеза и модификации многослойных металлических пластин, позволяя создавать изделия с уникальным сочетанием свойств [1]. Однако лазерное воздействие часто приводит к образованию растягивающих остаточных напряжений, пористости и анизотропной столбчатой структуры, что снижает эксплуатационные характеристики [2, 3]. Для решения этих проблем разрабатываются гибридные подходы, сочетающие лазерную обработку с механической деформацией (прокаткой, ультразвуковой обработкой, ударно-импульсным воздействием). Механическая обработка, следующая за лазером, например прокатка роликом, способствует улучшению адгезии, формированию более плотной структуры, снижению остаточных напряжений [4].

В настоящей работе предлагается численная модель для расчёта прогиба, деформаций и напряжений в пластине с покрытием в условиях лазерного сплавления порошкового материала на поверхности подложки с последующей прокаткой роликом.

Поскольку толщина покрытия h_R и подложки h_S значительно меньше остальных размеров пластины, это позволяет усреднить исходные уравнения по толщине и свести задачу к изгибу тонкой пластины. В такой постановке эффективные свойства материала могут зависеть от температуры, а для покрытия зависят от состава, который может изменяться при нагреве. В приближении Кирхгофа имеем:

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,, \quad \varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,, \quad 2\varepsilon_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\,,$$

где w – смещения в направлении, перпендикулярном пластине; z – расстояние от средней линии; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ – компоненты тензора деформаций в плоскости пластины; x, y – пространственные координаты. Из соотношений Дюамеля – Неймана находим остальные компоненты тензоров напряжений и деформаций. Уравнение прогиба двухслойной пластины, построенное с учётом различия в подходах к усреднению в теории теплопроводности и в теории пластин [5], имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[(1-\nu)\,D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] =$$

$$= q - \frac{\partial^2 \left[A\,(T - T_0) + B\omega_{ch}\right]}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \left[A\,(T - T_0) + B\omega_{ch}\right]}{\partial y^2}\,,$$

где

$$A = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{h^3}{12}\left(K\alpha_T\right)_{eff}\,, \quad B = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{h^3}{12}\frac{K_R h_R}{h_S + h_R}\,, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^3}{12}\,, \quad h = h_S + h_R,$$

D – цилиндрическая жёсткость; E – эффективный модуль упругости; ν – эффективный коэффициент Пуассона; K_R – объёмный модуль упругости подложки; α_T – коэффициент теплового расширения; T_0 – начальная температура; ω_{ch} – относительное объёмное изменение вследствие изменения состава.

Для решения задачи используется метод конечных разностей и итерационный метод Гаусса – Зейделя. Граничные условия (защемление, свободный край) аппроксимируются с использованием фиктивных узлов. Для примера на рис. 1 представлен вариант расчёта прогиба пластины для несвязанной задачи без химических реакций. Материал основы – Ti, покрытия – Fe. Распределение температуры соответствует движению луча лазера вдоль оси двухслойной пластины. За лазером следует ролик, площадью 6 мм^2 с распределённой нагрузкой $q = 1000$ Н/см. На границах $x = 0$, $x = 2$ выполняется условие жёсткого защемления, границы $y = 0$, $y = 1$ свободны от нагрузки.

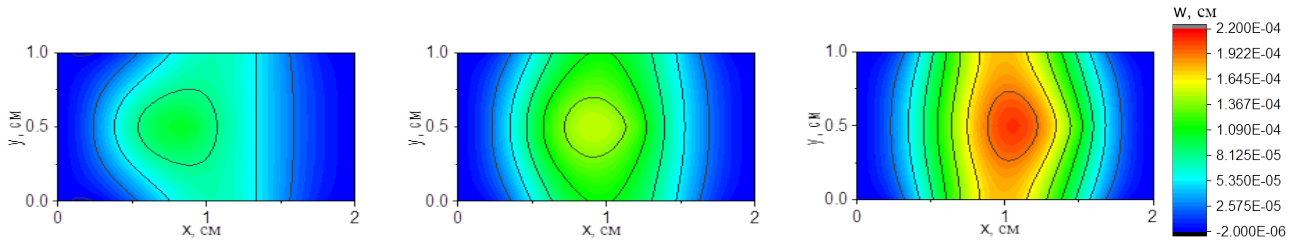


Рис. 1. Изгиб пластины в три последовательных момента времени

Видно, что прогиб симметричен относительно центра пластины, что является следствием осесимметричного нагружения и симметрии граничных условий.

На рис. 2 представлено изменение компонент тензоров деформаций и напряжений ε_{xx}, σ_{xx} в процессе синтеза покрытия.

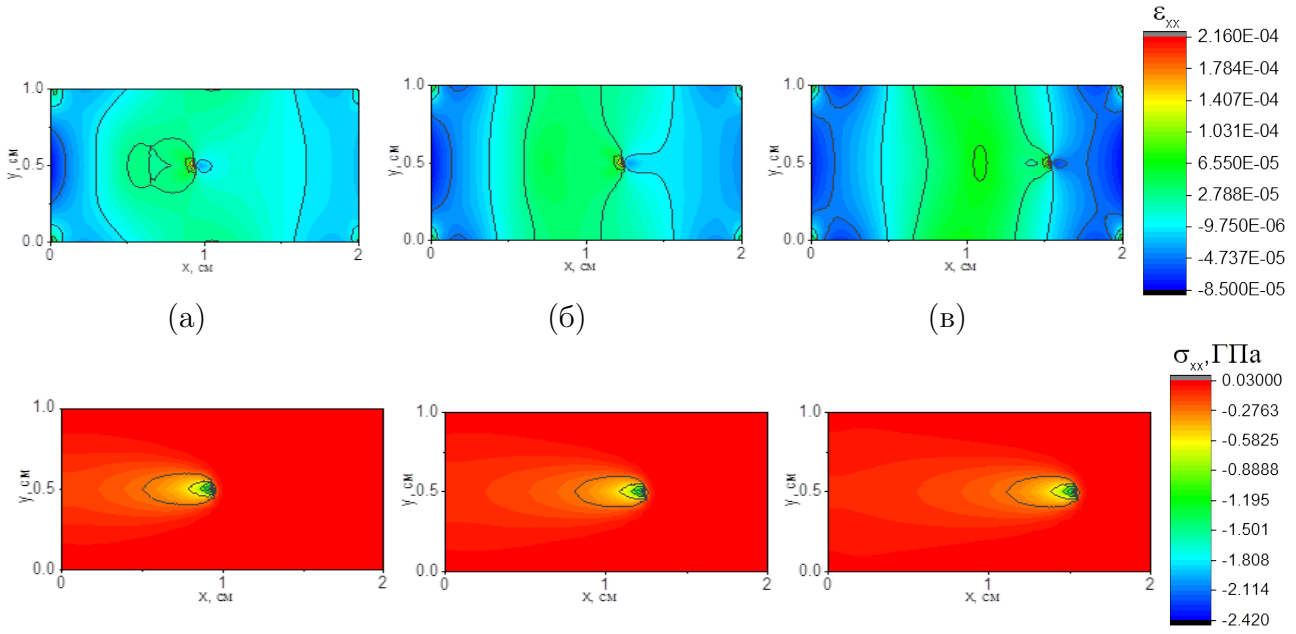


Рис. 2. Деформация ε_{xx} (а) – (в) и напряжения σ_{xx} (г) – (е) в три последовательных момента времени

Представленная модель позволяет анализировать влияние температуры лазерной обработки и параметров механического воздействия на напряжённо-деформированное состояние и может быть использована для оптимизации процесса синтеза многослойных покрытий.

Работа выполнена в рамках госзадания ИФПМ СО РАН (номер темы FWRW-2026-0007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Yan L., Li B. *A bimodal and heterogeneous laminate structure with alternately distributed copper-base and nickel-base alloys via multi-material laser powder bed fusion (MM-LPBF) additive manufacturing.* Materials Letters. 2024. V. 377. Art. 137494.
2. Xu Y., Wang D., Wu Sh. [et al.] *Research progress on defect formation mechanism and process optimization of laser cladding high entropy alloy coatings.* Optics & Laser Technology. 2025. V. 187. Art. 112819.
3. Altay M., Aydm H., Karsi A. *Effect of heat input on martensitic stainless steel laser clad characteristics on ductile cast iron.* Weld World. 2025. V. 69. P. 3639–3655.
4. Raj R., Chiu L. N. S., Marla D. [et al.] *High fidelity thermo-mechanical model of in-situ micro-rolling in laser-directed energy deposition: multi-track multi-layer case.* Int. J. of Advanced Manufacturing Technology. 2026. V. 145. P. 1445–1463.
5. Knyazeva A. G. *Simple problems of mechanical equilibrium applicable to the synthesis and modification of materials.* In Advances in Linear and Nonlinear Continuum and Structural Mechanics. Cham : Springer, 2023. P. 215–243.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ УПРУГИХ ВОЛН В ГИРОТРОПНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМ СВОЙСТВАМИ

Д. М. Пашковский[1,2]

[1]*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*
[2]*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

Введение. Для описания механического поведения новых моделей материалов с микроструктурой используются обобщённые модели механики сплошных сред. В данной работе изучается поведение микрополярного гиротропного материала со случайными параметрами среды при различных динамических воздействиях. В рамках задачи о плоской деформации сформулирован вариационный принцип Остроградского – Гамильтона для гиротропной среды Коссера, учитывающий наличие хирального параметра в выражении для плотности энергии деформации. Для решения начально-краевой задачи рассматривается следующая схема: пространственная дискретизация выполнена методом конечных элементов с билинейными функциями формы, а интегрирование по времени осуществлено с помощью разрывного метода Галёркина. Проведена верификация разработанного алгоритма на тестовых задачах об импульсном силовом и моментном нагружении для прямоугольного образца из гиротропного микрополярного материала. Выполнен анализ волновых полей для случая ненулевого хирального параметра, показавший существенное влияние хиральности на структуру напряжений и моментных напряжений. Произведено моделирование эффекта локализации Андерсона для упругих волн в случайно-неоднородной среде Коссера. Исследована зависимость длины локализации от длительности импульсного воздействия и параметра разброса случайных свойств среды.

Основная часть. В линейной микрополярной упругости каждая точка среды представляется в виде квазитвёрдого тела, описываемого поступательными и вращательными степенями свободы [1, 2]:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + \theta \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla \boldsymbol{\theta}, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ – поле перемещений, $\boldsymbol{\theta}$ – поле вектора микроповорота, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ – меры деформаций. Энергия деформаций W для упругой изотропной гиротропной среды Коссера записывается следующим образом [1]:

$$W = \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\mu+\alpha}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^T) + \frac{\mu+\alpha}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\beta}{2}\,\mathrm{tr}^2(\boldsymbol{\kappa}) + \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\kappa}^T) + \\ + \frac{\gamma-\varepsilon}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\kappa}) + u\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\kappa})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + (s+\chi)\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\kappa}) + (s-\chi)\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\kappa}^T), \tag{2}$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе, α, β, γ, ε – микрополярные упругие модули, а u, s, χ – хиральные параметры (гиротропные модули). Рассматривается случай плоскодеформированного состояния:

- все поля не зависят от координаты z: $\partial/\partial z = 0$;
- вертикальное перемещение отсутствует: $u_z = 0$;

- микровращения: $\theta_x = \theta_y = 0$, учитывается только $\theta_z(x, y, t)$.

Для описания микрополярной упругой среды в случае плоской деформации записывается вариационный принцип Остроградского – Гамильтона [1]:

$$H[u_x, u_y, \theta_z] = \int_0^T \int_S (K - W)\, dx\, dy\, dt, \tag{3}$$

где плотность кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2}\,\rho(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2) + \frac{1}{2}\,J\dot{\theta}_z^2, \tag{4}$$

а плотность энергии деформации в плоской постановке имеет вид

$$W = \frac{1}{2}\,(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx}^2 + 2\lambda\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy}^2 + (\mu + \alpha)\varepsilon_{xy}^2 + 2(\mu - \alpha)\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx} + \\ + (\mu + \alpha)\varepsilon_{yx}^2 + (\varepsilon + \beta)(\kappa_{xz}^2 + \kappa_{yz}^2) + 2\chi(\varepsilon_{xy}\kappa_{xz} - \varepsilon_{yx}\kappa_{yz}). \tag{5}$$

Перекрёстное слагаемое между трансляционными и вращательными степенями свободы записывается через коэффициент хиральности χ.

Из условия стационарности функционала действия H сформулирована слабая форма разрывного метода Галёркина по времени [3] для уравнения на шаге I_n с учётом возможных разрывов в моменты t_n и t_{n+1}:

$$\int_{I_n} \delta\dot{\boldsymbol{\phi}}^T \cdot (\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\phi} - \mathbf{F})\, dt + \delta\boldsymbol{\phi}_n^T \cdot \mathbf{K} \cdot [\boldsymbol{\phi}_n] + \delta\dot{\boldsymbol{\phi}}_n^T \cdot \mathbf{M} \cdot [\dot{\boldsymbol{\phi}}_n] = 0, \tag{6}$$

где $\mathbf{M}$ – глобальная матрица масс, $\mathbf{K}$ – глобальная матрица жёсткости, $[\boldsymbol{\phi}_n] = \boldsymbol{\phi}(t_n^+) - \boldsymbol{\phi}(t_n^-)$, $[\dot{\boldsymbol{\phi}}_n] = \dot{\boldsymbol{\phi}}(t_n^+) - \dot{\boldsymbol{\phi}}(t_n^-)$ – скачки на левой границе шага, $\boldsymbol{\phi}$ и $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ – вектор обобщённых переменных и скоростей соответственно. Данное условие преобразуется к системе линейных уравнений [3, 4]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} - \dfrac{\Delta t^2}{12}\,\mathbf{K} & -\dfrac{\Delta t^2}{12}\,\mathbf{K} \\ \dfrac{\Delta t^2}{3}\,\mathbf{K} & \mathbf{M} + \dfrac{\Delta t^2}{6}\,\mathbf{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\phi}}_n^+ \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_{n+1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 + \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_n^- \\ \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_n^- - \Delta t\,\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\phi}_n^- \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\Delta t}{3}\,\mathbf{F}(t_n) + \frac{\Delta t}{6}\,\mathbf{F}(t_{n+1}), \qquad \mathbf{F}_2 = \frac{\Delta t}{6}\,\mathbf{F}(t_n) + \frac{\Delta t}{3}\,\mathbf{F}(t_{n+1}). \tag{8}$$

После решения системы вектор обобщённых переменных обновляется следующим образом:

$$\boldsymbol{\phi}_{n+1}^- = \boldsymbol{\phi}_n^- + \frac{\Delta t}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\phi}}_n^+ + \dot{\boldsymbol{\phi}}_{n+1}^-\right). \tag{9}$$

Для следующего шага полагаем $\boldsymbol{\phi}_n^+ = \boldsymbol{\phi}_{n+1}^-$, $\dot{\boldsymbol{\phi}}_n^+ = \dot{\boldsymbol{\phi}}_{n+1}^-$. Численная схема является симплектической, что позволяет гарантировать сохранение энергии при моделировании.

Для исследования локализации волн в микрополярной среде Коссера рассматривается двумерная прямоугольная область $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ в условиях плоской деформации. На левой границе $x = 0$ прикладывается импульсное сжимающее давление $p(t) = p_0\, H(T_{\text{imp}} - t)$, где $H(\cdot)$ – функция Хевисайда, p_0 – амплитуда, T_{imp} – длительность импульса. Остальные границы ($x = L_x$, $y = 0$, $y = L_y$) считаются свободными от силовых и моментных напряжений. Начальные условия нулевые:

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{u}}(x, y, 0) = \mathbf{0}, \quad \theta_z(x, y, 0) = 0, \quad \dot{\theta}_z(x, y, 0) = 0.$$

Такая постановка позволяет исследовать распространение волны, генерируемой источником на левой границе, и её последующее затухание в неоднородной среде со случайным свойствами [5–7]. На рис. 1 показана расчётная область для исследования эффекта локализации в случайно-неоднородной среде.

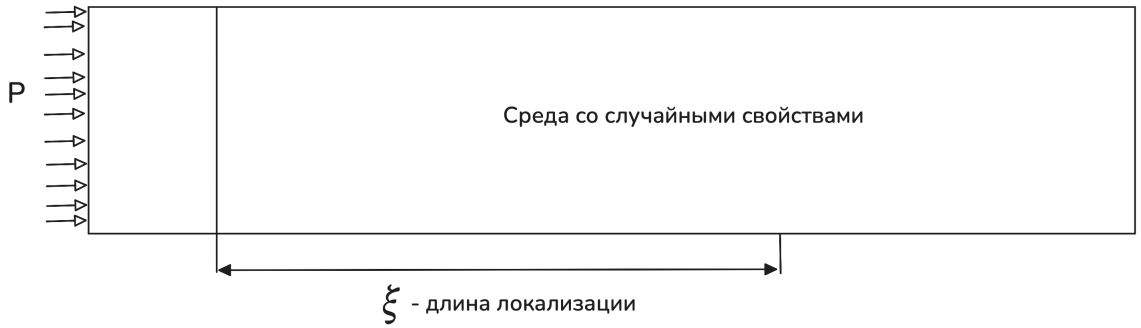


Рис. 1. Постановка задачи локализации в среде Коссера

Материальные свойства среды задаются как случайные поля, постоянные в пределах каждого конечного элемента. В качестве случайных параметров выбраны модули $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, в то время как хиральный параметр χ остаётся постоянным. Случайные поля имеют вид

$$\alpha(\boldsymbol{r}) = \alpha_0\big(1+\eta\, P_\alpha(\boldsymbol{r})\big),\ \beta(\boldsymbol{r}) = \beta_0\big(1+\eta\, P_\beta(\boldsymbol{r})\big),\ \gamma(\boldsymbol{r}) = \gamma_0\big(1+\eta\, P_\gamma(\boldsymbol{r})\big),\ \varepsilon(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\big(1+\eta\, P_\varepsilon(\boldsymbol{r})\big),$$

где α_0, β_0, γ_0, ε_0 – средние значения, η – значение разброса, $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma, P_\varepsilon$ – независимые случайные величины с равномерным распределением на $[-1, 1]$. Случайные значения присваиваются каждому элементу на основе координат его центра. Для каждой реализации случайного поля генерируется новый набор значений с использованием генератора псевдослучайных чисел. Затем проводится численное решение задачи с помощью разрывного метода Галёркина по времени и сохраняются поля перемещений, скоростей, напряжений и моментных напряжений на каждом временно́м шаге, кратном заданному интервалу сохранения. На рис. 2 показаны поля перемещений и микроповоротов.

Из рисунка видно, что в процессе движения волны в среде со случайными микрополярными модулями происходит множественное рассеивание возмущения. В результате волновой фронт локализуется на некотором расстоянии от левой границы прямоугольной области. Для количественной оценки локализации используется метод, основанный на анализе пространственного распределения плотности упругой энергии [6, 7]. На каждом сохранённом временно́м шаге для каждого элемента вычисляется плотность энергии:

$$E(x, y, t) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\kappa}\big) + \frac{1}{2}\,\rho\,\dot{\boldsymbol{u}}^2 + \frac{1}{2}\,J\,\dot{\boldsymbol{\theta}}^2. \tag{10}$$

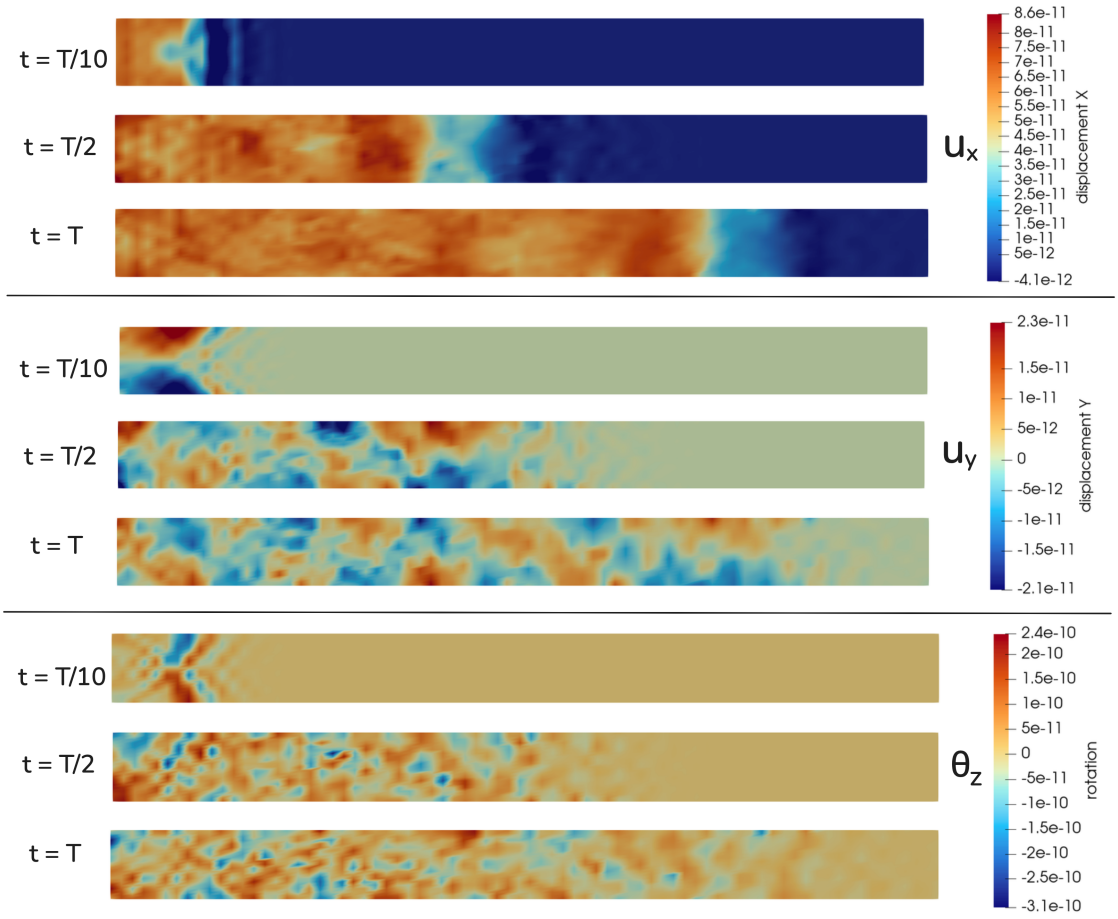


Рис. 2. Поля u_x, u_y, θ_z в разные моменты времени t для случайной среды первого типа

Все величины вычисляются в центре элемента с использованием матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$, определённых при численном моделировании. Плотность энергии нормируется на площадь конечного элемента. Далее выполняется осреднение энергии по вертикальной координате y для получения одномерного профиля энергии вдоль направления распространения волны x:

$$\langle E(x_i)\rangle = \frac{1}{N_y N_t}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_t} E(x_i, y_j, t_k). \tag{11}$$

Для локализованных волн профиль энергии должен экспоненциально затухать с расстоянием от источника:

$$\langle E(x)\rangle \approx a\exp\left(-\frac{x}{\xi}\right), \qquad x > x_{\text{left}}, \tag{12}$$

где a – амплитуда, ξ – длина локализации, характеризующая масштаб затухания. Чем меньше величина ξ, тем сильнее локализация волны. Параметр ξ определяется методом наименьших квадратов. Минимизация суммы квадратов невязок даёт величину длины локализации:

$$\xi = \arg\min_{a,\xi}\sum_i\left(\ln\langle E(x_i)\rangle - \ln a + \frac{x_i}{\xi}\right)^2. \tag{13}$$

Если профиль энергии не аппроксимируется экспоненциальной зависимостью (например при слабом беспорядке), локализация считается отсутствующей, и ξ полагается бесконечно большой. На рис. 3 показано распределение энергии $E(x, y, t)$ (10).

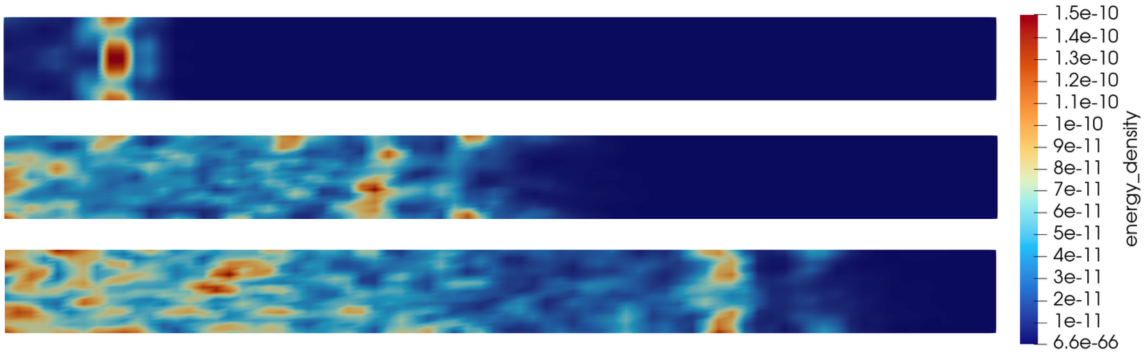


Рис. 3. Профиль полной энергии в разные моменты времени t для случайно-неоднородной среды

Для данного распределения строится осреднённый профиль энергии и его аппроксимация экспоненциальной зависимостью (рис. 4). На начальных временах волновой пакет распространяется вглубь области, однако с течением времени энергия концентрируется в ограниченной области вблизи источника. Вне этой области энергия экспоненциально убывает, что свидетельствует о локализации. На рисунке видно, как с увеличением времени максимум энергии смещается вправо, но при этом его амплитуда затухает, а ширина распределения остаётся ограниченной.

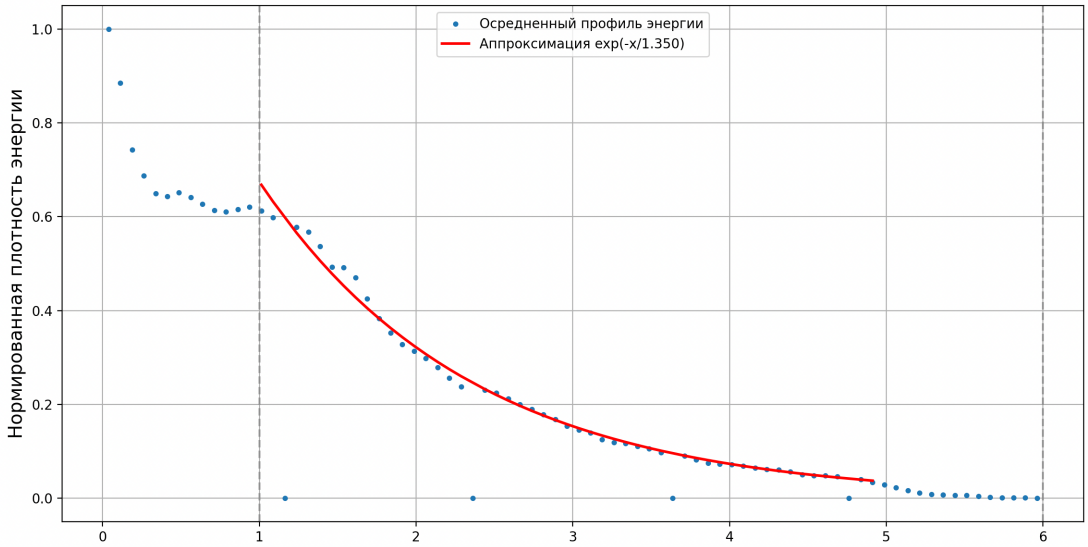


Рис. 4. Распределение осреднённой плотности энергии по x для случайно-неоднородной среды

Экспоненциальный характер затухания профиля (рис. 4) подтверждает наличие локализации Андерсона. Чем меньше значение ξ, тем сильнее выражен эффект локализации. В случае слабого беспорядка, когда профиль не аппроксимируется экспонентой, локализация считается отсутствующей.

Заключение. В работе разработана и верифицирована численная схема для моделирования распространения упругих волн в гиротропной микрополярной среде Коссера со случайными свойствами на основе вариационного принципа Остроградского – Гамильтона и разрывного метода Галёркина по времени. Проведённое моделирование эффекта локализации Андерсона для импульсного нагружения прямоугольного образца показало, что множественное рассеяние на случайных неоднородностях микрополярных модулей приводит к экспоненциальному затуханию осреднённой плотности энергии вдоль направления распространения волны, что количественно характеризуется длиной локализации ξ. Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования динамического поведения новых материалов с микроструктурой, включая метаматериалы и композиты.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-11-00364-П, https://rscf.ru/project/23-11-00364-П/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. *Foundations of micropolar mechanics.* Springer Science & Business Media, 2012. 125 p.
2. Ivanova E. A., Vilchevskaya E. N. *Micropolar continuum in spatial description.* Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. V. 28. P. 1759–1780.
3. Petersen S., Farhat C., Tezaur R. *A space–time discontinuous Galerkin method for the solution of the wave equation in the time domain.* Int. J. Numer. Methods Eng. 2009. V. 78. P. 275–295.
4. Xiu C., Chu X., Wan J., Wang J. *Numerical simulation of impulse waves in Cosserat media based on a time-discontinuous Galerkin finite element method.* Int. J. Numer. Methods Eng. 2021. V. 122. P. 1–34.
5. Anderson P. W. *Absence of diffusion in certain random lattices.* Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 1492–1505.
6. Lei Q., Sornette D. *Transport and localization of elastic waves in two-dimensional fractured media: consequences on scattering attenuation.* J. Geophys. Res. Solid Earth. 2021. V. 126. Iss. 6. e2020JB021178.
7. Lei Q., Sornette D. *Anderson localisation and reentrant delocalisation of tenorial elastic waves in two-dimensional fractured media.* EPL. 2021. V. 136. Art. 39001.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА В СНЕГЕ И ГРУНТЕ С УЧЁТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ И ИЗМЕНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СВОЙСТВ СРЕДЫ

Т. А. Пекарская[1], *А. Н. Сибин*[1,2]

[1]*Алтайский государственный университет, Барнаул*
[2]*Новосибирский государственный университет*

Надёжность гидрологических прогнозов в период весеннего снеготаяния определяется тем, насколько точно модель воспроизводит перераспределение талой воды между инфильтрацией в грунт и поверхностным стоком. В работе численный алгоритм для реализации модели тепломассопереноса в системе «снег – грунт» верифицируется на тестовой задаче с известным аналитическим решением, после чего на проверенной схеме исследуется влияние промерзания грунта на объём бокового стока.

Расчётная область состоит из слоёв воздуха, снега и грунта, расположенных на склоне с углом β; координата $y \in [0,\, l]$ направлена по нормали к поверхности вглубь области, $t \in [0,\, t_0]$. Снег и грунт описываются как пористая среда из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$), льда ($i = 3$) и твёрдого скелета в грунте ($i = 4$); лёд и частицы грунта образуют пористый скелет, пористость φ которого меняется при замерзании и оттаивании. Перенос вдоль склона явно не учитывается: боковой сток вводится в законы сохранения массы как сток интенсивности R. Уравнения модели имеют вид [3]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{3} I_{ji} - \delta_{i1} R, \quad i = 1,2,3; \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_4}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_4 \vec{u}_4) = 0; \tag{2}$$

$$\varphi s_i \vec{u}_i = -K_0 \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1,2, \quad p_2 - p_1 = p_c; \tag{3}$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{4} \rho_i^0 c_i \alpha_i\Big) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \Big(\sum_{i=1}^{4} \rho_i^0 \alpha_i c_i \vec{u}_i\Big) \nabla\theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla\theta) - \nu I. \tag{4}$$

Здесь $\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i$ – приведённые плотности; $\vec{u}_i$ – истинные скорости фаз; I_{ji} – интенсивности массообмена между j-й и i-й фазами; K_0 – проницаемость; $\bar{k}_{0i}(s)$ – относительные фазовые проницаемости; μ_i – вязкости; $p_c(s)$ – капиллярное давление [5]; θ – температура; ν, λ_c – теплота плавления льда и теплопроводность грунта; объёмные концентрации $\alpha_1 = \varphi s$, $\alpha_2 = \varphi(1-s)$, $\alpha_3 = (1-\varphi)s_3$, $\alpha_4 = (1-\varphi)s_4$. Фазы считаются несжимаемыми.

Сток вдоль склона параметризуется в кинематическом приближении [1] (градиент давления вдоль склона мал по сравнению с гравитацией) и включается в модель лишь после достижения пороговой водонасыщенности:

$$R(s,\varphi,\beta) = \begin{cases} \dfrac{K_0(\varphi)\, k_{01}(s)\, \rho_1^0\, g \sin\beta}{L}, & s > s_{\text{crit}}, \\ 0, & s \le s_{\text{crit}}, \end{cases} \tag{5}$$

где L – длина склона вдоль направления стока ($L \to \infty$ отвечает горизонтальной поверхности), $k_{0i} = \bar{k}_{0i}/\mu_i$ – подвижности фаз. Интенсивность фазового перехода вода–лёд задаётся кусочно по температуре [4]:

$$I(\varphi, \theta, s) = \begin{cases} -\zeta_1\, \varphi\, \theta\, s, & \theta < \theta^-, \\ 0, & \theta^- \le \theta \le \theta^+, \\ \zeta_2\, (\varphi_g - \varphi)^\chi \exp(\zeta_3(\theta - \theta^+)), & \theta > \theta^+, \end{cases} \tag{6}$$

где θ^- и θ^+ – температуры замерзания воды и плавления льда соответственно; ζ_1, ζ_2, ζ_3 – размерные константы ($[\zeta_1] = $ кг/(м^3 с K), $[\zeta_2] = $ кг/(м^3 с), $[\zeta_3] = 1/$K); χ – безразмерный параметр. Проницаемость и фазовые проницаемости задаются как $K_0(\varphi) = B\varphi^3$, $k_{0i}(s) = s_i^{m_i}$ при $0 \le s \le 1$.

Уравнения водонасыщенности и температуры аппроксимируются явной двухэтапной схемой Хойна второго порядка точности по времени, пористость – явной схемой Рунге – Кутты второго порядка, приведённое давление – неявной схемой второго порядка по пространству [6]. Нелинейности линеаризуются простой итерацией, линейные системы решаются прогонкой; при расходимости итераций шаг τ делится пополам.

Для верификации схема сводится к задаче Бакли – Леверетта с точным решением в виде ударной волны [2]. В случае $\varphi = \varphi_g$, $a(s, \varphi) = 0$, $F(s, \varphi) = 0$, $\beta = 0$ сток (5) тождественно равен нулю, и уравнение насыщенности принимает вид

$$\varphi_g \frac{\partial s}{\partial t} + v\, \frac{\partial b(s)}{\partial y} = 0, \qquad b(s) = \frac{s^2}{s^2 + (1-s)^2}\,. \tag{7}$$

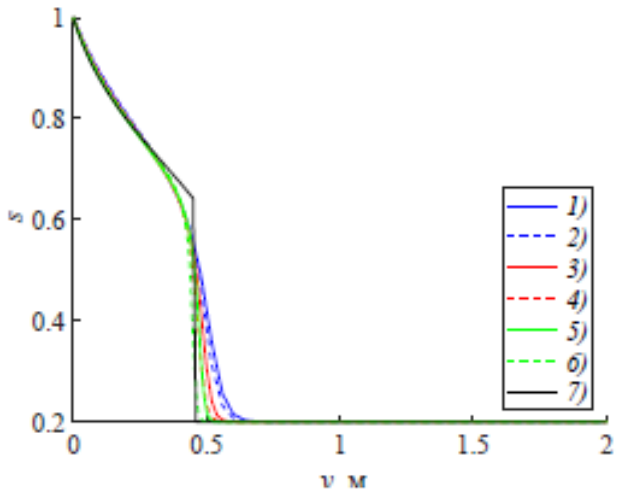


Рис. 1. Сравнение численного решения (схема Хойна, $h = 0.04; 0.02; 0.01$) с точным аналитическим решением задачи Бакли – Леверетта (чёрная линия) и решением, рассчитанным с помощью неявной схемы (пунктирная линия)

Сравнение с точным решением и с результатом, полученным с помощью неявной схемы из работы [7] показывает, что схема Хойна монотонна, не порождает осцилляций у разрыва, сохраняет массу на дискретном уровне и корректно воспроизводит скорость фронта (рис. 1); порядок сходимости по правилу Рунге при $\tau = \lambda h$ составил $R_s \approx 1$, как и ожидается для разрывных решений.

С помощью проверенной схемы исследуется влияние температурного режима грунта на формирование бокового стока. Сравниваются два режима. В первом температура нижней границы удерживается ниже точки замерзания, что соответствует промороженному грунту. Во втором она выше точки замерзания, то есть грунт тёплый. На верхней границе задаётся прогрев, при котором снежный покров тает.

Пока снег прогревается и таяние не началось, сток в обоих режимах очень мал. Различия появляются, когда вода доходит до контактного слоя снег – грунт. В промороженном грунте вода замерзает в порах, пористость снижается, и проницаемость падает настолько, что вода почти не просачивается вниз. Насыщение контактного слоя превышает порог s_{crit}, и согласно (5) начинается боковой сток; миграция влаги к фронту замерзания дополнительно увлажняет этот слой. В тёплом грунте поры открыты, вода просачивается вглубь, и сток развивается медленно. Объём стока, полученный интегрированием R по глубине и времени, в режиме промерзания оказывается примерно в полтора раза больше.

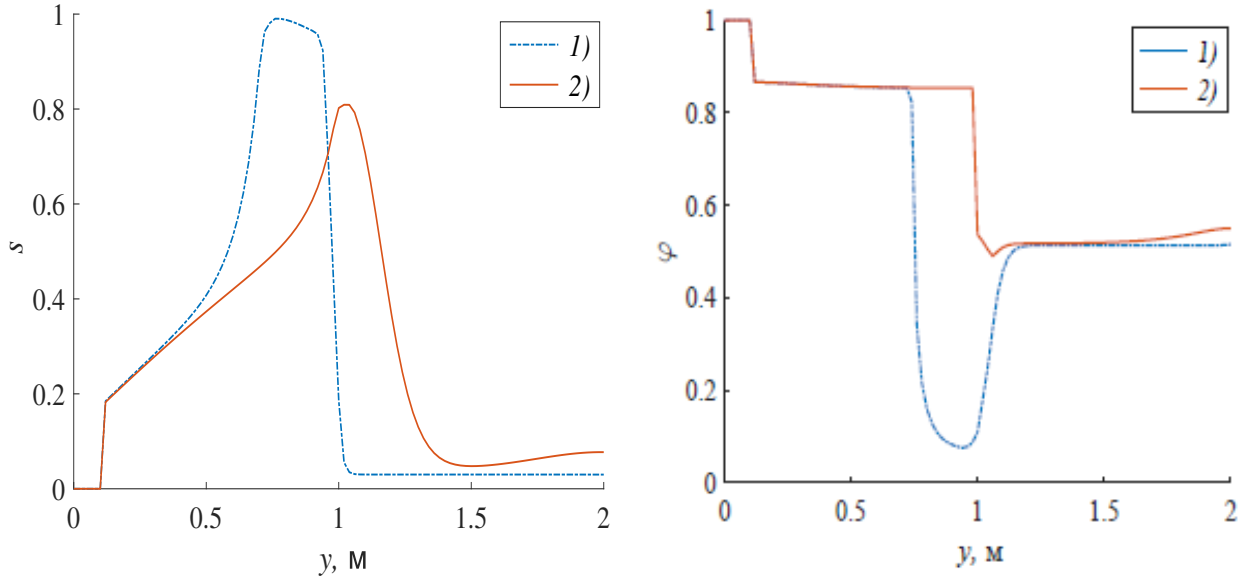


Рис. 2. Сравнение результатов численного моделирования изменения водонасыщенности (а) и пористости (б)

Распределения водонасыщенности (рис. 2, а) и пористости (рис. 2, б) по глубине столба к концу расчёта подтверждают этот механизм. В слое воздуха насыщенность равна нулю. В верхней части снежной толщи кривые обоих режимов совпадают и плавно растут, поскольку талая вода просачивается вниз. В промороженном грунте (кривая 1) насыщенность резко возрастает и в контактном слое достигает значений, близких к единице. Влага мигрирует к фронту замерзания и накапливается над слоем льда. На границе с грунтом насыщенность обрывается почти до нуля, так как в промороженный грунт вода практически не поступает. В тёплом грунте (кривая 2) фронт увлажнения свободно переходит границу снег – грунт. Максимум насыщенности здесь ниже и смещён в грунт, а ниже он плавно убывает. Пористость снежной толщи в обоих режимах высока, потому что часть льда скелета снега за время прогрева растаяла. В промороженном грунте в контактном слое образуется глубокий провал пористости. Замерзающая в порах вода снижает пористость приблизительно до 0.1, и на границе слоёв формируется сплошной слой льда. Ниже

границы пористость восстанавливается до грунтового значения. В тёплом грунте провала нет. Пористость переходит к грунтовому значению на границе снег–грунт и далее остаётся почти постоянной, поры открыты. Провал пористости на кривой 1 на рис. 2, б совпадает по положению с максимумом насыщенности, достигающим единицы на рис. 2, а. Слой над льдом полностью водонасыщен и превышает порог s_{crit}, поэтому согласно (5) разгружается вдоль склона.

Таким образом, модель воспроизводит следующий физический механизм. Промерзание превращает грунт из поглотителя влаги в барьер, который не пропускает воду вниз, и перенаправляет талую воду в поверхностный сток, что повышает паводковую опасность. Тёплый грунт, напротив, впитывает талую воду и снижает сток. Алгоритм верифицирован на тестовой задаче с разрывным решением. Параметрический учёт бокового стока позволяет воспроизводить влияние промерзания грунта на объём поверхностного стока без перехода к трёхмерному моделированию.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект по теме «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики», номер темы: FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Beven K. *Kinematic subsurface stormflow.* Water Resour. Res. 1981. V. 17. No. 5. P. 1419–1424.
2. Wang Y., Kao C.-Y. *Central schemes for the modified Buckley–Leverett equation.* J. Comput. Sci. 2013. V. 4. No. 1. P. 12–23.
3. Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С. *Физико-математические основы фильтрации воды.* М. : Мир, 1971. 451 с.
4. Sibin A. N., Pekarskaya T. A., Ianchenko N. I. *Mathematical modeling and numerical simulation of heat and mass transfer in snow cover and soil.* J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2025. V. 66. Suppl. 1. P. 46–53.
5. Цыпкин Г. Г. *Фазовый переход вода–лёд в ненасыщенном грунте при наличии капиллярного давления.* Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 5. С. 93–101.
6. Калиткин Н. Н. *Численные методы.* М. : Наука, 1978. 512 с.
7. Пекарская Т. А., Сибин А. Н. *Математическая модель тепломассопереноса в промерзающем грунте с учётом фазового перехода и капиллярного давления.* Вычислительные технологии. 2026. Т. 31. № 2. С. 32–48.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

М. Н. Перельмутер

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Для анализа концентрации напряжений при нестационарном теплообмене используется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). Для численного решения ГИУ нестационарной задачи теплопроводности возможно использование двух основных подходов. Первый из них основан на применении преобразования Лапласа к ГИУ, и решение выполняется в пространстве изображений для последовательности значений параметра преобразования [1]. Для нахождения значений неизвестных в действительном пространстве используется численная процедура обратного преобразования Лапласа. Второй подход основан на непосредственном интегрировании по времени ГИУ нестационарной теплопроводности с разбиением всего промежутка времени процесса теплообмена на последовательность временны́х шагов. Для численного решения ГИУ при этом используются две различные схемы [2]:

1) каждый шаг решения по времени рассматривается как новая задача и, ввиду этого, в конце каждого шага вычисляются значения температуры во внутренних точках области, которые используются как начальные значения для следующего шага по времени;

2) интегрирование по времени всегда начинается с начального момента времени, и в процессе вычислений нужно хранить значения температуры и её производных на границе тела для всех пройденных шагов по времени, а также соответствующие матрицы в дискретном представлении ГИУ. При такой схеме расчёта не требуется вычислять значения температуры во внутренних точках области на каждом шаге по времени. В данной работе численное решение ГИУ нестационарной задачи теплопроводности выполняется посредством прямого интегрирования по времени с использованием второго типа шаговой схемы. Первым этапом решения задачи термоупругости является решение задачи теплопроводности. Результаты решения задачи теплопроводности являются исходными данными для решения квазистатической несвязанной задачи термоупругости. Получены решения новых задач концентрации термоупругих напряжений в двумерной постановке.

В нестационарной задаче теплопроводности ГИУ для подобласти составной конструкции при постоянной начальной температуре тела имеет вид [2]

$$C(p)\,T(p,t_f) = \mathrm{K}\int_{t_o}^{t_f}\int_{\Gamma}\left[G(p,q,t_f,t)\,\psi(q,t) - F(p,q,t_f,t)\,T(q,t)\right]d\Gamma(q)\,dt, \qquad (1)$$

где K – коэффициент температуропроводности материала, $T(q,t)$ – температура на границе тела, $\psi(q,t) = dT(q,t)/dn$ – производная температуры по направлению внешней нормали к границе тела $\Gamma(q)$, t – время, t_0 и t_f – начальный и конечный моменты времени, параметр $C(p)$ зависит от локальной геометрии в граничной точке p. Фундаментальные решения для задач нестационарной теплопроводности $G(p,q,\tau)$ и $F(p,q,\tau)$ (здесь $\tau = t_f - t$) в ГИУ (1) приведены в [2]. Для несвязанной квазистатической задачи термоупругости без массовых сил ГИУ для однородной подобласти составной конструкции не

содержит интегралов по объёму тела [3]:

$$C_{ij}(p)\,u_j(p,t_f) = \int_\Gamma \left[G_{ij}(p,q)\,t_j(q,t) - F_{ij}(p,q)\,u_j(q,t)\right] d\Gamma(q) - \\ -K\int_{t_o}^{t_f}\int_\Gamma \left[Z_i(p,q,t_f,t)\,\psi(q,t) - R_i(p,q,t_f,t)\,T(q,t)\right] d\Gamma(q)\,dt, \quad i,j = 1,...,2, \tag{2}$$

где $u_j(q,t)$ и $t_j(q,t)$ – перемещения и усилия в точке q на границе подобласти от воздействия термомеханических нагрузок, коэффициенты матрицы $C_{ij}(p)$ зависят от локальной геометрии в граничной точке p, функции $G_{ij}(p,q)$ и $F_{ij}(p,q)$ – фундаментальные решения Кельвина статической задачи теории упругости, а функции $Z_i(p,q,t_f,t)$ и $R_i(p,q,t_f,t)$ являются решениями для перемещений и усилий при действии точечного теплового источника.

При рассмотрении составных конструкций на участках идеального контакта подобластей выполняются условия сопряжения для температуры $T(r,t)$ и теплового потока $\varphi(r,t)$

$$T^k(r,t) = T^n(r,t), \qquad \varphi^k(r,t) = -\varphi^n(r,t), \tag{3}$$

а также условия непрерывности для перемещений $u_i(r,t)$ и равновесия для усилий $t_i(r,t)$

$$u_i^k(r,t) = u_i^n(r,t), \qquad t_i^k(r,t) \;=\; -t_i^n(r,t). \tag{4}$$

Здесь k и n – номера соседних подобластей, $i = 1, 2$, параметр r определяет положение точки на границе тела.

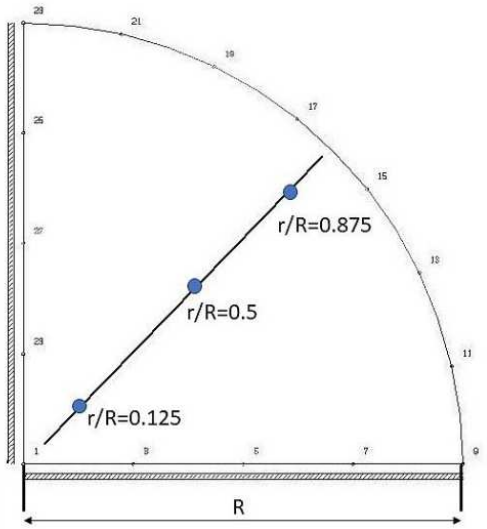


Рис. 1. Модель для решения задачи, 30 узлов на границе, заштрихованные зоны – области заданных нормальных перемещений

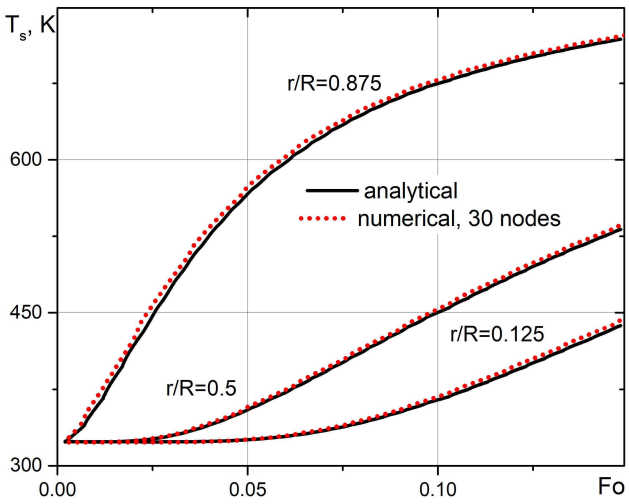


Рис. 2. Зависимости температуры T_s от времени во внутренних точках цилиндра, $Fo = Kt/R^2$ – параметр Фурье, время расчёта – 540 с

Численное решение ГИУ (1) выполняется посредством прямого интегрирования по времени с использованием шаговой схемы второго типа. Используется кусочно-постоянная

аппроксимация переменных задачи по времени: временно́й промежуток решения нестационарной задачи теплопроводности t_f разбивается на N шагов равной длительности и в пределах каждого шага температура и производная температуры по нормали к границе области полагаются постоянными. Для математического описания границы области при решении задачи теплопроводности используются линейные граничные элементы, на которых переменные задачи полагаются постоянными. Интегрирование по времени фундаментальных решений в ГИУ (1) выполняется аналитически. Интегрирование полученных выражений по пространственным координатам выполняется численно. Вклад температурной нагрузки в напряжённо-деформированное состояние тела, определяемый последними двумя интегралами в (2), вычисляется на каждом шаге по времени в ходе решения задачи теплопроводности с учётом того, что температура и производная температуры постоянны в пределах каждого шага по времени, а также постоянны на каждом линейном граничном элементе. Интегрирование соответствующих выражений выполняется, как и при дискретизации ГИУ (1), аналитически по времени и численно – по пространственным координатам. При решении ГИУ (2) квазистатической задачи термоупругости используются изопараметрические квадратичные граничные элементы. Интегрирование фундаментальных решений по граничным элементам выполняется численно, см. описание методики в [4, 5].

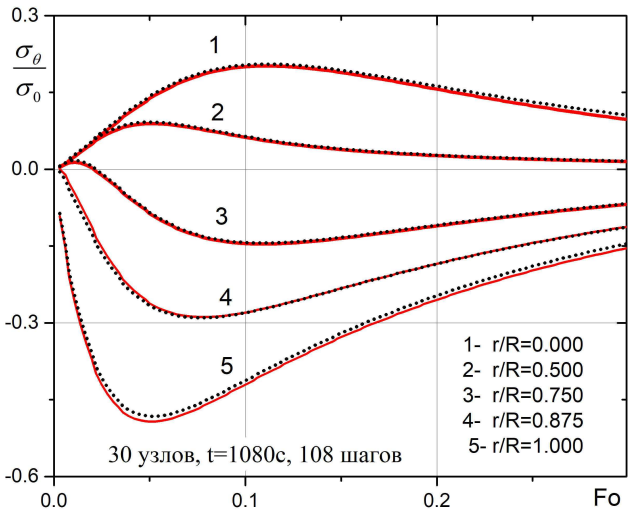


Рис. 3. Окружные напряжения в различных положениях вдоль радиуса цилиндра, сплошная линия – аналитическое решение, пунктир – численные результаты, время расчёта $1080c$

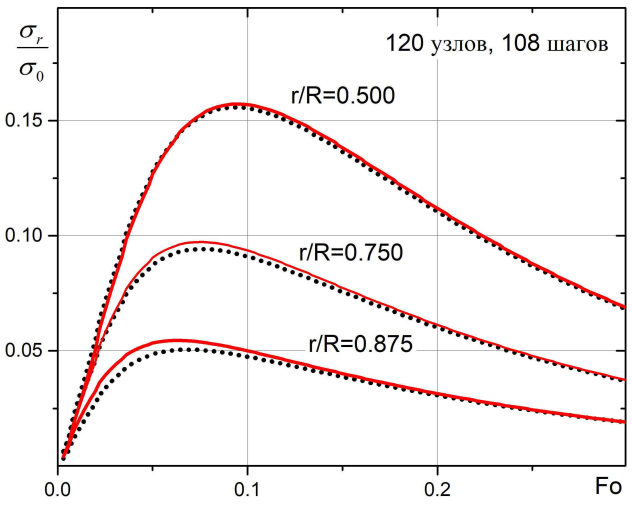


Рис. 4. Радиальные напряжения в различных положениях вдоль радиуса цилиндра, сплошная линия – аналитическое решение, пунктир – численные результаты, время расчёта $1080c$

Алгоритм решения уравнений (1), (2) реализован в пакете программ для решения нестационарных квазистатических задач термоупругости. Для оценки точности разработанного алгоритма численного решения ГИУ рассмотрена задача о тепловом состоянии и квазистатическом деформировании бесконечно длинного кругового цилиндра при конвективном теплообмене с окружающей средой, температура которой изменяется со временем в соответствии с выражением

$$T_c(t) = T_\infty \left[1 + h \exp\left(-\beta \cdot Fo\right)\right], \quad Fo = Kt/R^2, \tag{5}$$

где $T_\infty = 823\,^\circ\mathrm{K}$ – температура среды при $t \to \infty$, безразмерные параметры $h = -0.5473$, $\beta = 53.6$, коэффициент температуропроводности $K = 0.577 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{м}^2/c$, радиус цилиндра

$R = 0.141$ м, время теплового расчёта – 540 с или 1080 с. Аналитические решения рассматриваемых задач теплопроводности и термоупругости для цилиндра приведены в работе [6].

Расчёты выполнены с учётом симметрии задачи на модели 1/4 сечения цилиндра (см. рис. 1). В плоскостях симметрии тепловой поток, компоненты перемещений, нормальные к плоскости симметрии, и касательные усилия полагались равными нулю. Зависимости температуры от времени (параметра Фурье) в 3-х внутренних точках области, расположенных вдоль радиуса цилиндра на биссектрисе прямого угла, представлены на рис. 2. Погрешность расчёта не превышает $0.5-1\,\%$. Зависимости окружных напряжений σ_θ/σ_0 (где $\sigma_0 = \alpha E\,(T_\infty - T_0)\,/(1-\nu)\,,\ \nu = 0.3$) от времени в различных положениях вдоль радиуса цилиндра на плоскости симметрии приведены на рис. 3. Погрешность вычисления напряжений не превышает $1-2\,\%$. Радиальные напряжения при численном решении задачи определяются дифференцированием перемещений [2]. Ввиду этого удовлетворительная точность вычисления этой компоненты напряжений была получена при 120 узлах на границе области. Распределения радиальных напряжений σ_r/σ_0 в зависимости от времени нагрева представлены на рис. 4. Максимальная погрешность наблюдается при $r/R = 0.875$ вблизи экстремума и составляет $\delta \approx 7\,\%$.

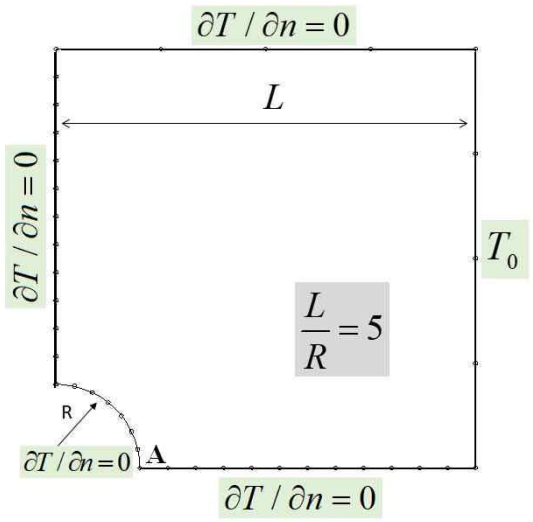


Рис. 5. Модель для решения задачи теплопроводности, 78 узлов на границе

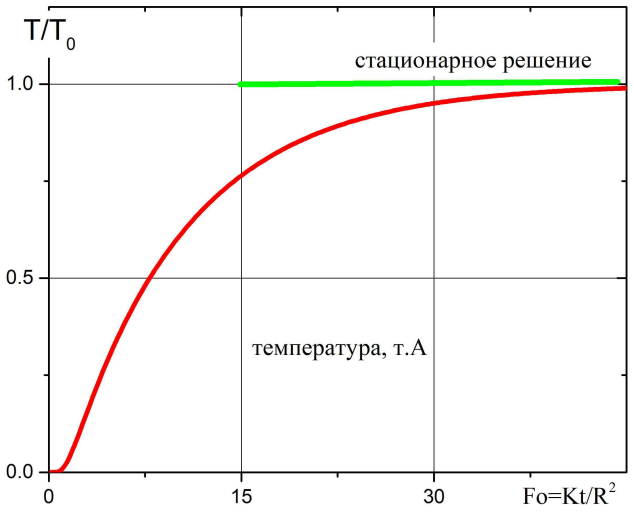


Рис. 6. Зависимость температуры на краю отверстия в т. A от времени

Исследована концентрация напряжений в квадратной пластине с центральным круговым отверстием. При решении нестационарной задачи теплопроводности полагалось, что начальная температура внутри области $T_i = 0$, на внешней границе пластины при $t \geq 0$ задана температура $T_0 > T_i$, поверхность отверстия теплоизолирована. С учётом симметрии задачи расчёт выполнен для модели 1/4 пластины (см. рис. 5). Коэффициент теплопроводности материала пластины $\lambda = 2\,\text{Вт}/(\text{см}\cdot\text{К})$, коэффициент температуропроводности $K = 0.05\,\text{см}^2/\text{с}$. Изменение температуры на краю отверстия в процессе нагрева представлено на рис. 6. За время расчёта $t = 1000\,\text{с}$ в пластине устанавливается стационарный тепловой режим.

Задача термоупругости решена для двух вариантов механических граничных условий. В обоих вариантах рассматривалась модель 1/4 пластины, вдоль линий симметрии полагались равными нулю нормальные перемещения и касательные усилия, модуль упругости материала $E = 100\,\text{ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. В первом варианте расчёта внеш-

няя грань модели пластины с заданной температурой полагалась свободной от нагрузок.

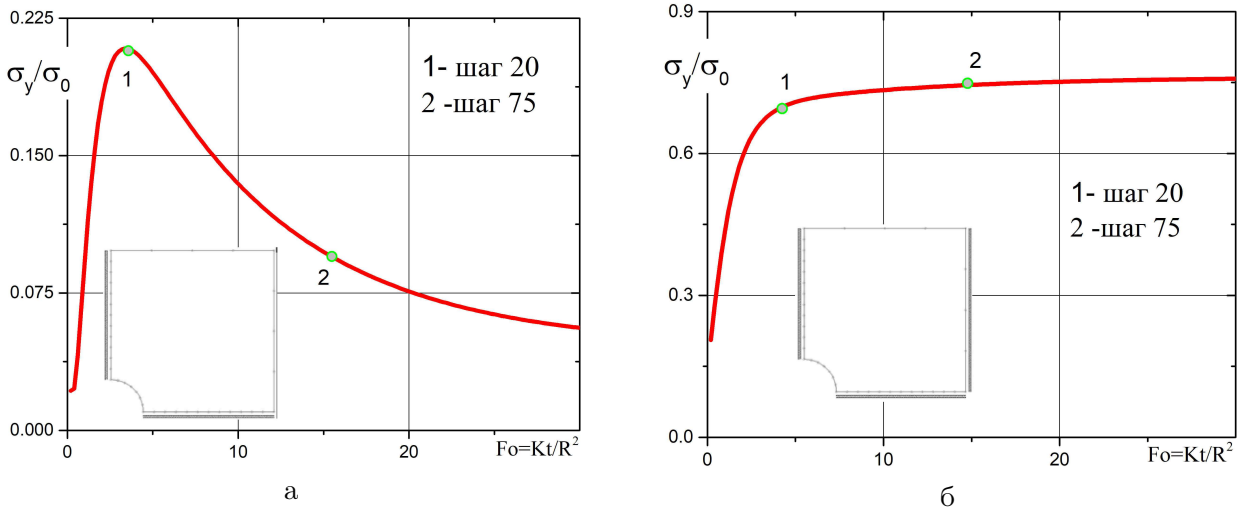


Рис. 7. Нормальные напряжения на краю отверстия, $\sigma_0 = \alpha E\,(T_0 - T_i)\,/(1-\nu)$, Fo – число Фурье: а – свободная внешняя грань пластины; б – нулевые нормальные перемещения на внешней грани пластины

Зависимость нормальных напряжений на краю отверстия от времени приведено на рис. 7, а. На начальном этапе теплообмена достигается максимум нормальных напряжений на краю отверстия, при переходе к стационарному тепловому режиму напряжения значительно снижаются. Во втором варианте расчёта на внешней грани пластины с заданной температурой полагались равными нулю нормальные перемещения и касательные усилия. В этом случае характер изменения нормальных напряжений на краю отверстия иной – на начальном этапе расчёта по времени напряжения невелики, при переходе к стационарному тепловому режиму значительно возрастают, (см. рис. 7, б).

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-49-02002, https://rscf.ru/project/24-49-02002/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rizzo F. J., Shippy D. J. *A method of solution for certain problems of transient heat conduction.* AIAA J. 1970. V. 8. No. 11. P. 2004–2009.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Метод граничных элементов.* М.: Мир, 1987. 524 с.
3. Sladek V., Sladek J. *Computation of thermal stresses in quasistatic non-stationary thermoelasticity using boundary elements.* Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 1989. V. 28. No. 5. P. 1131–1144.
4. Perelmuter M. *Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks.* Computational Mechanics. 2013. V. 51. No. 4. P. 523–534.
5. Perelmuter M. *Analysis of interaction of bridged cracks and weak interfaces.* Int. J. of Mechanical Sciences. 2018. V. 149. P. 349–360.
6. Коваленко А. Д. *Термоупругость.* Киев: Вища школа, 1975. 204 с.

РАСЧЁТ ИЗГИБА СБОРНО-МОНОЛИТНОЙ ПЛИТЫ

И. Е. Петраков[1], *А. А. Коянкин*[2]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*
[2]*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

Сборно-монолитные конструкции широко распространены в строительстве и реконструкции. В практике реконструкции и капитального ремонта железобетонных изгибаемых элементов распространён вариант усиления путём наращивания высоты поперечного сечения за счёт устройства слоя монолитного бетона, который армируется дополнительной продольной арматурой [1]. В сборно-монолитных конструкциях, а также железобетонных конструкциях, подлежащих реконструкции, происходит конструктивное изменение поперечного сечения путём наращивания высоты за счёт укладки монолитного бетона с соответствующим ему армированием. В практике российского и зарубежного строительства сборно-монолитное домостроение является достаточно популярным. В существующих работах рассматривается расчёт отдельных сечений и проблема учёта стадийности возведения: в работе [2] представлена конечно-элементная модель сборно-монолитной железобетонной балки в зоне поперечного изгиба, рекомендации по расчёту прочности нормальных и наклонных сечений представлены в [3]. Работы [4] и [5] посвящены учёту стадийности, так как эта тема является недостаточно регламентированной в нормативных документах, но критически важной для обеспечения надежности современных высотных зданий.

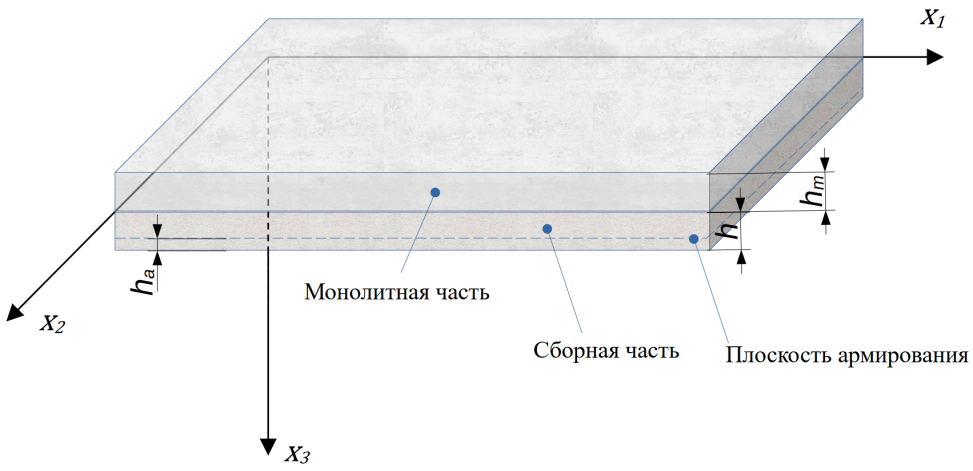


Рис. 1

Рассматривается деформирование плиты в два этапа (рис. 1). Предполагается, что на каждом этапе пластина удовлетворяет гипотезе о плоских сечениях, подвержена малым деформациям и в области плиты существует единственная нейтральная поверхность, в которой отсутствуют деформации. Такое предположение справедливо, например, для цилиндрического изгиба пластин. Пусть оси x_1 и x_2 системы координат $Ox_1x_2x_3$ расположены в плоскости плиты, а ось x_3 перпендикулярно ей. Тогда перемещения точек плиты

(u_1, u_2, u_3) и компоненты тензора малых деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ могут быть описаны следующим образом:

$$u_1 = -(x_3 - \eta)\,\frac{\partial w}{\partial x_1}\,, \quad u_2 = -(x_3 - \eta)\,\frac{\partial w}{\partial x_2}\,, \quad u_3 = w(x_1, x_2)\,,$$

$$\varepsilon_{11} = -(x_3 - \eta)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\,, \quad \varepsilon_{22} = -(x_3 - \eta)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\,, \quad \varepsilon_{12} = -(x_3 - \eta)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\,, \tag{1}$$

где η – положение нейтральной плоскости.

Для численного решения применён вариационный принцип Лагранжа, согласно которому действительное распределение прогибов плиты минимизирует на множестве вариаций, согласованных с главными краевыми условиями, функционал упругой энергии:

$$J(w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\int \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & F_{11} \\ D_{12} & D_{22} & F_{22} \\ F_{11} & F_{22} & F_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} -$$

$$- qw\,dx_1 dx_2 - \int\limits_{\Gamma} \left(Qw + M\frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \tag{2}$$

где D_{ij} и F_{ij} – изгибные жёсткости, зависящие от величины деформации плиты, распространения трещин в бетоне, положения нейтральной поверхности и вида армирования. Для учёта нелинейных свойств бетона используется итерационный алгоритм, в котором на каждом шаге вычисляются значения изгибных жёсткостей исходя из значений прогибов и положения нейтральной поверхности на предыдущей итерации. На каждой итерации пересчитываются высота неразрушенной части плиты h_{cr} и положения нейтральной поверхности η_i. Зная величины h_{cr}, η_i и прогиб w_{i-1}, получим значения изгибных жёсткостей:

$$D_{ij}^i = \int\limits_0^{h_{cr}} (x_3 - \eta_i)^2 E_{ij} \left((x_3 - \eta_i)\,\frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial x_1^2} \right) dx_3\,,$$

$$F_{ij}^i = \int\limits_0^{h_{cr}} (x_3 - \eta_i)^2 G_{ij} \left((x_3 - \eta_i)\,\frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial x_1^2} \right) dx_3\,.$$

Задача минимизации функционала решена с помощью метода конечных элементов и метода начальных напряжений. В качестве конечного элемента использовался элемент Богнера – Фокса – Шмидта, принадлежащий классу C_1 с 16 степенями свободы: прямоугольный элемент с четырьмя узлами в вершинах прямоугольника, в каждом из которых заданы перемещения точки срединной плоскости w в направлении, перпендикулярном плоскости плиты, её производные первого порядка $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ и смешанная производная второго порядка $\partial^{2w}/\partial x \partial y$, что обеспечивает непрерывность первых производных на границе элемента. Расчёт проводится с помощью итерационного алгоритма, на каждом шаге которого пересчитывается матрица изгибных жёсткостей и вычисляются значения прогибов w.

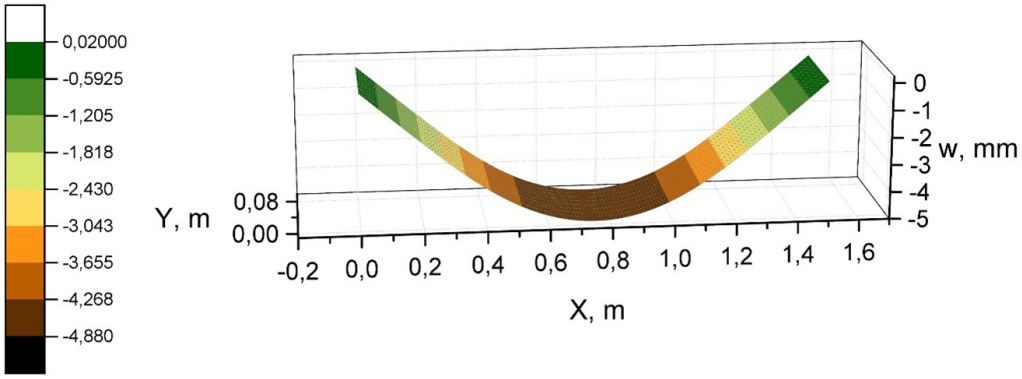


Рис. 2

На рис. 2 приведён пример прогибов, полученных численно для задачи изгиба железобетонной балки длины 1.5 м с квадратным сечением 8×8 см из тяжёлого бетона класса B25, армированной продольной арматурой 1Ø10A240 под нагрузкой, моделирующей монтажную нагрузку первого этапа величиной 1.1 кН, приложенной в точках 0.53 м и 0.97 м по оси x и равномерно распределённой по оси y.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 26-71-00080, https://rscf.ru/project/26-71-00080/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорова Н. В., Московцева В. С., Ветрова О. А., Григорьев М. И. *Сборно-монолитный каркас нового поколения для жилых и гражданских зданий повышенной живучести.* Бюллетень строительной техники. 2023. № 6 (1066). С. 24–26.
2. Филатов В. Б., Коваленко М. В. *Моделирование работы сборно-монолитной железобетонной балки в зоне поперечного изгиба.* Вестник Евразийской науки. 2020. Т. 12. № 3.
3. Семенюк С. Д., Москалькова Ю. Г. *Прочность и деформативность изгибаемых элементов, усиленных наращиванием сжатой зоны, при статическом и малоцикловом нагружениях.* Могилёв : Белорусско-Российский ун-т, 2017. 274 с.
4. Ефрюшин С. В., Макаров А. С. *Расчётный анализ эффективности усиления строительных конструкций, учитывающий стадийность включения дополнительных конструктивных элементов.* Строительная механика и конструкции. 2020. № 4(27). С. 26–37.
5. Мкртычев О. В., Андреев М. И., Сидоров Д. С. *Анализ усилий в конструкциях при учёте стадийности возведения.* Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 4. С. 293–298.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ВАСКУЛЯРНОЙ ОПУХОЛИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ХЕМОТАКСИСА

В. Б. Погосян, М. А. Токарева

Алтайский государственный университет, Барнаул

Образование опухолей вблизи сосудов и сосудистых сетей даёт им прямой доступ к питательным веществам. Такие опухоли находятся в самых оптимальных условиях для стабильного роста. Они интенсивно разрастаются вдоль сосудов и могут вызывать нарушение кровотока [1]. В данной работе исследуется модель эволюции концентрации клеток в области патологического роста ткани вблизи кровеносного сосуда. Сама ткань описывается как сплошная трёхфазная среда, состоящая из клеток, внеклеточного матрикса и внеклеточной жидкости [2]. Из-за наличия кровеносного сосуда в модели дополнительно учитывается диффузия химических веществ в ткань [3]. Такой подход позволяет учитывать влияние на распределение концентрации клеток в ткани такого процесса, как хемотаксис. Последний может стать причиной формирования областей с пониженной концентрацией клеточной фазы относительно исходного состояния и ограничить зону уплотнения ткани [3–5]. Эти процессы напрямую связаны с развитием солидных опухолей, возникающих вследствие неконтролируемого роста и деления клеток, формирующих области повышенной плотности в тканях. Итоговая модель исследуется численно при различных начальных конфигурациях распределения концентрации клеточной фазы, а также при различной интенсивности влияния хемотаксиса на рост ткани.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2024-2026) (госзадание FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Breward C. J. W., Byrne H. M., Lewis C. E. *A multiphase model describing vascular tumour growth.* Bulletin of Mathematical Biology. 2003. V. 65. P. 609–640.
2. Mollica F., Preziosi L., Rajagopal K. R. *Modeling of biological materials. Mechanics in tumor growth.* Boston : Birkhauser Boston, MA, 2007. P. 5.
3. Astanin S., Tosin A. *Mathematical model of tumour cord growth along the source of nutrient.* Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2007. V. 2. P. 153–177.
4. Fischer M. M., Bluthgen N. *On minimising tumoural growth under treatment resistance.* J. of Theoretical Biology. 2024. V. 279. Art. 111716.
5. Погосян В. Б., Токарева М. А. *Осесимметричная модель динамики распределения плотности клеточной ткани с учетом влияния хемотаксиса и деформации внеклеточного матрикса.* Российский журнал биомеханики. 2025. Т. 29. № 4. С. 70–83.

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВАХ МАТЕРИАЛОВ, ОСЛАБЛЕННЫХ УЗКИМИ ТРЕЩИНАМИ

Ю. Г. Пронина[1], *А. М. Марков*[2], *М. Л. Качанов*[3]

[1]*Санкт-Петербургский государственный университет*
[2]*Технологический институт Монтеррея, Мексика*
[3]*Тафтский университет, США*

При построении теорий эффективных упругих и проводящих свойств трещиноватых материалов изначально предполагалось, что трещины имеют круговую (дискообразную) форму. В действительности же такие дефекты встречаются довольно редко. Модель вклада плоских эллиптических трещин в податливость материала построили Б. Будянский и Р. Дж. О'Коннелл, предположив, что она применима и для трещин других выпуклых форм. Формула для оценки раскрытия плоских трещин выпуклых и звёздчатых форм предложена В. И. Фабрикантом. Приближённую формулу для раскрытия тонкой кольцевой трещины вывели М. Качанов и И. Севостьянов. Также Качановым с соавторами были построены численные оценки для трещин некоторых других очертаний. Подробный обзор упомянутых работ можно найти в [1, 2].

Рассматриваются плоские трещины узких очертаний, такие как прямоугольные, сигмовидные, С-образные и кольцевые (см. рис. 1). Получены формульные оценки их вклада в эффективные упругие и проводящие свойства изотропного материала.

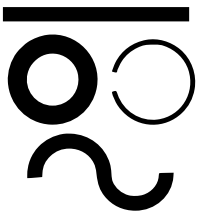


Рис. 1

Метод оценки вклада плоских узких трещин в упругие свойства материала основывается на представлении трещины в виде совокупности плоских двумерных сечений, для которых применяется известная формула для раскрытия прямолинейной трещины длиной $2l$ в рамках теории плоской деформации:

$$B_N = B_T = \frac{\pi l(1-\nu^2)}{E}\,. \tag{1}$$

Здесь E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона матрицы материала; B_N и B_T суть нормальная и касательная компоненты тензора второго ранга $\mathbf{B}$ упругой податливости трещины, который связывает вектор среднего скачка смещений берегов трещины $\mathbf{b} =< u^+ - u^- >$ с приложенным напряжением σ^∞ формулой

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \sigma^\infty \cdot \mathbf{n}, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к трещине. Формула (1) изначально предполагает, что трещины насквозь пронизывают материал в одном направлении и поперечное сечение материала с трещинами остаётся неизменным (см. пример в [3]). Проверяется применимость обобщения формулы (1) в виде

$$B_N S = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} \int_\Gamma l^2(t)dt \tag{3}$$

(Г – срединная линия трещины, S – её площадь) на трещины с переменным сечением, с наличием «концов» или криволинейные.

На примере эллиптических трещин, для которых известно точное решение, показано, что при достаточно плавном изменении ширины трещины приближение плоской деформации даёт высокую точность.

Путём сопоставления аналитических оценок с численными расчётами для кольцевой трещины (с внутренним и внешним радиусами r и R соответственно) установлено, что для искривлённых трещин приближение (3), записанное в виде

$$B_N S = \frac{\pi^2(1-\nu^2)}{2E}\, R^3 \left(1-\frac{r}{R}\right)^2 \left(1+\frac{r}{R}\right), \tag{4}$$

оказывается практически точным даже для достаточно широких трещин – с отношением ширины к радиусу кривизны срединной линии до 0.85. Для более широких трещин найдены поправочные сомножители к формуле (4). Результирующая формула применима вплоть до предельного случая дискообразной трещины (когда внутренний радиус $r = 0$).

Упрочняющий эффект концов трещин (прямоугольных, C- и S-образных) также был оценён с помощью численных расчётов; на их основе построены поправки к формуле (3).

Для прямоугольных трещин проверены подходы Будянского – О'Коннелла и Фабриканта, оценены их погрешности как функции отношения сторон прямоугольника–трещины. Для достаточно длинных трещин формула (3) даже без поправочных членов оказывается более точной.

Вклад рассматриваемых дефектов в проводящие свойства может быть выражен через соотношения между дополнительной упругой податливостью и дополнительной проводимостью, полученные для трещин произвольных форм Качановым и Аргатовым.

Обсуждаются вопросы существования связи между другими эффективными свойствами материалов, а также параметры концентрации дефектов, требуемые для оценки изменения рассматриваемых свойств благодаря наличию таких дефектов. Подчеркивается, что параметры концентрации зависят от того, какие именно свойства изучаются.

Также исследуется применимость параметров концентрации круговых трещин (скалярный и тезорный параметры плотности трещин) к трещинам других форм.

Полученные результаты частично изложены в статье [2].

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-29-00565, https://rscf.ru/project/25-29-00565/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kachanov M., Sevostianov I. *Micromechanics of Materials, with Applications.* Cham : Springer, 2018.
2. Pronina Y., Markov A., Kachanov M. *Cracks of narrow shapes: compliance and resistance contributions.* Int. J. Frac. 2026. Art. 42.
3. Абакаров А. М., Пронина Ю. Г. *Об эффективных упругих свойствах материала со взаимно перпендикулярными системами параллельных трещин.* Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. № 1. С. 111–119.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВЯЗИ В ДИНАМИКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Пухначёв

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Метод дифференциальных связей состоит в добавлении к определённой системе дифференциальных уравнений дополнительного дифференциального соотношения и исследовании совместности полученной переопределённой системы. Если новая система оказывается совместной, то указанный подход позволяет найти широкий класс точных решений исходной системы уравнений с частными производными.

Теории метода дифференциальных связей посвящена монография [1]. Что касается приложений теории, то основным объектом явилась гиперболическая система уравнений газовой динамики. Между тем, еще в 1881 г. И. С. Громека и независимо в 1889 г. Э. Бельтрами использовали метод дифференциальных связей (не употребляя этот термин) путём присоединения к системе уравнений Эйлера несжимаемой жидкости соотношения винтового течения

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}.$$

Здесь $\mathbf{v}$ – вектор скорости, $\alpha = \mathrm{const}$. Данная система не имеет определённого типа. Громека и Бельтрами установили, что все решения полученной переопределённой системы описывают стационарные течения жидкости. Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = \alpha(x, y, z)$ (обобщённые винтовые течения). Обширное семейство стационарных несжимаемых винтовых течений на основе группового анализа определяющих уравнений построили С. В. Мелешко, А. Г. Петрова и В. В. Пухначёв (2025).

Другой пример, когда метод дифференциальных связей даёт новые точные решения, относится к динамике несжимаемой релаксирующей жидкости (Петрова А. Г., Пухначёв В. В., Фроловская О. А., 2024, модель жидкости второго порядка; Пухначёв В. В., 2025, модели пограничного слоя Марангони и Прандтля в такой жидкости).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. *Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.* Новосибирск : Наука, 1984. 272 с.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ СЕЙСМИКИ

Е. И. Роменский

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Моделирование процессов в деформируемых пористых средах является актуальной задачей, имеющей приложения во многих областях фундаментальных исследований и прикладных разработок. Можно, в частности, отметить разработку новых материалов с заданными свойствами, технологии создания высокоэффективных систем генерации, распределения и хранения энергии (закачка и сохранение природного газа и водорода в пористых формациях), задачи мониторинга и прогнозирования состояния многолетнемерзлых пород путём численного моделирования сейсмических волновых полей в пористых флюидозаполненных средах.

Для моделирования пористых сред в настоящее время наибольшее распространение получила модель Био, предложенная в середине прошлого века и используемая, в частности, для расчёта волн малой амплитуды в насыщенных пористых средах (см., например, обзор [1]). Однако эта модель применима только для малых деформаций и неприменима во всем диапазоне изменения пористости от 0 до 1, поэтому потребности исследования актуальных прикладных задач требуют создания новых моделей, описывающих конечные деформации и сложную реологию насыщающих жидкостей.

В данной работе представлена модель течения флюидов в деформируемых пористых средах, разработанная на основе теории гиперболических термодинамически согласованных законов сохранения [2, 3], определяющие дифференциальные уравнения которой образуют гиперболическую систему, а решения удовлетворяют законам неравновесной термодинамики [4,5]. Модель может быть сформулирована для насыщающей жидкости, представляющей собой смесь произвольного числа сжимаемых жидкостей [5].

Основное внимание уделено упрощённой модели распространения волн малой амплитуды в насыщенных пористых средах. Поскольку для этих процессов определяющие дифференциальные уравнения образуют симметрическую гиперболическую систему, для её численного решения могут прямо применяться современные численные методы высокой точности. Эффективным оказывается применение конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках, которая использует структуру гиперболической системы, сходную со структурой системы уравнений линейной теории упругости. Модель оказывается применимой для расчёта волновых полей в пористых средах с включениями чистых (твёрдых и жидких) фаз, что с использованием метода диффузных границ позволяет рассчитывать волновые поля, решая одну общую систему уравнений без выделения межфазных границ [6].

Решено большое число задач, демонстрирующих применимость модели для сейсмических приложений. Её, в частности, можно применять для описания изменчивости волновых полей в зонах вечной мерзлоты при вариациях температуры с целью их мониторинга для предотвращения катастроф [7, 8].

Модель может быть использована для численного определения эффективных упругих модулей гетерогенных пористых сред, необходимых, например, при разработке новых материалов, моделировании сейсмических волн в гетерогенных средах на основе уравнений теории упругости. Метод численной гомогенизации основан на решении серии базовых

элементарных статических задач о напряжённо-деформированном состоянии и вычислении энергии рассматриваемого образца, что позволяет находить эффективные модули для эквивалентной упругой среды [9].

Работа выполнена в рамках госзадания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, номер темы FWNF-2026-0018.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carcione J. M., Morency C., Santos J. E. *Computational poroelasticity – a review.* Geophysics. 2010. V. 75. P. 75A229–75A243.
2. Godunov S. K., Romenskii E. I. *Elements of continuum mechanics and conservation laws.* New York : Springer, 2003. 258 p.
3. Peshkov I., Pavelka M., Romenski E., Grmela M. *Continuum mechanics and thermodynamics in the Hamiltonian and the Godunov-type formulations.* Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2018. V. 30. P. 1343–1378.
4. Romenski E., Reshetova G., Peshkov I., Dumbser M. *Modeling wavefields in saturated elastic porous media based on thermodynamically compatible system theory for two-phase solid-fluid mixtures.* Comuters & Fluids. 2020. Art. 104587.
5. Romenski E., Reshetova G., Peshkov I. *Thermodynamically compatible hyperbolic model of a compressible multiphase flow in a deformable porous medium and its application to wavefields modeling.* AIP Conference Proceedings 2448. 2021. Art. 020019.
6. Reshetova G., Romenski E. *Diffuse interface approach to modeling wavefields in a saturated porous medium.* Applied Mathematics and Computation. 2021. V. 398. Art. 125978.
7. Reshetova G., Romenski E. *Modeling the variability of seismic properties of frozen multiphase media depending on temperature.* Siberian Electronic Mathematical Reports. 2024. V. 21. P. B203-B231.
8. Reshetova G., Romenski E. *Modeling of temperature-dependent wave fields in deformable porous media saturated with fluid.* Numerical Analysis and Applications. 2024. V. 17. P. 358–371.
9. Reshetova G., Romenski E. *Numerical homogenization of 2D heterogeneous anisotropic porous medium based on a hyperbolic thermodynamically compatible model.* In: Gervasi O. [et al.] Computational Science and Its Applications – ICCSA 2026 Workshops. ICCSA 2026. Lecture Notes in Computer Science. V. 16761. Cham : Springer, 2027. P. 84–97.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПОЗИТОВ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ АРМИРОВАНИЕМ

И. Д. Руженцев, Н. А. Фёдорова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Современные элементы авиационных, энергетических, транспортных и строительных систем работают в условиях неоднородного напряжённо-деформированного состояния. Наиболее опасные зоны возникают около отверстий, вырезов, мест приложения сосредоточенных или контурных нагрузок, а также на участках резкого изменения геометрии. При традиционной прямолинейной укладке направления волокон не всегда совпадают с направлениями внутренних силовых потоков. В результате часть нагрузки передаётся на сравнительно менее прочное связующее, что повышает вероятность локального выхода материала из упругой области. Одним из способов управления полем напряжений является криволинейное армирование, при котором непрерывные волокна располагаются по заранее выбранным семействам траекторий [1–3].

Цель исследования состоит в оценке возможности управления прочностными свойствами плоского волокнистого композита за счёт выбора топологии траекторий армирования [4], материала связующего и армирующих волокон, а также начальных интенсивностей армирования. В качестве примера плоской армированной конструкции рассматриваются кольцевые пластины с двумя непрерывными семействами волокон: семейства логарифмических спиралей и лемниската Бернулли (рис. 1); семейства спиралей Архимеда и лемниската Бернулли (рис. 2); семейства кардиоид и изогональные им траектории (рис. 3).

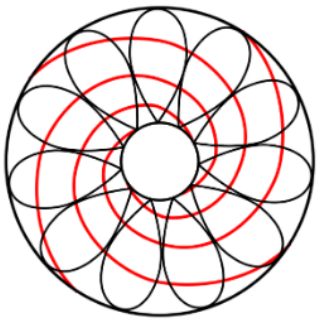


Рис. 1. Кольцевая пластина, армированная двумя семействами волокон (логарифмическая спираль и лемниската Бернулли)

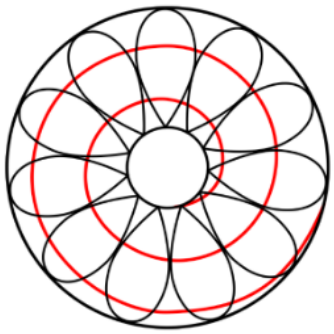


Рис. 2. Кольцевая пластина, армированная двумя семействами волокон (спираль Архимеда и лемниската Бернулли)

Для перехода от отдельных расчётных примеров [5] к воспроизводимому параметрическому исследованию разработан программный комплекс, объединяющий справочник материалов, ввод геометрических и силовых параметров, формирование коэффициентов краевой задачи для интенсивностей армирования, численное решение, построение графиков функции прочности Баландина [6] и сохранение итоговых таблиц. Цель программной

реализации состоит в том, чтобы исключить ручное изменение расчётного кода для каждого нового варианта и обеспечить сопоставление конструкций при строго одинаковых исходных условиях. В качестве изменяемых факторов используются материал связующего, материал волокон, структура армирования, форма и размеры области, температура, внешнее давление, а также начальные интенсивности двух семейств волокон.

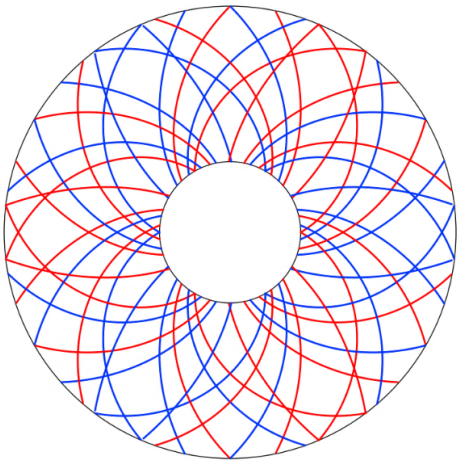


Рис. 3. Структура армирования кольцевой пластины семейством кардиоид и изогональными им траекториями

Программный комплекс реализован на языке Python. Графический интерфейс создан с помощью стандартной библиотеки Tkinter. Числовые массивы, расчётная сетка и обработка результатов формируются средствами NumPy. Символьное задание коэффициентов, дифференцирование и преобразование выражений выполняются библиотекой SymPy. Краевые задачи решаются функцией `solve_bvp` библиотеки SciPy. Для построения и встраивания графиков в интерфейс используется Matplotlib. Характеристики материалов считываются из электронной таблицы средствами openpyxl, а формирование редактируемых документов Word выполняется с помощью python-docx. Таким образом, программная реализация сочетает символьные, численные и интерфейсные средства Python в одном расчётном цикле.

В справочнике предусмотрены полимерные, термопластичные и металлические матрицы, армированные углеродными, стеклянными, базальтовыми, арамидными и керамическими волокнами. Для связующего хранятся модуль Юнга, коэффициент Пуассона, пределы прочности при растяжении и сжатии; для волокон – модуль Юнга и предел прочности при растяжении [7]. Эти параметры непосредственно участвуют в формировании коэффициентов модели и проверке прочности конструкции. В рассматриваемой версии используется шестнадцать практически применимых сочетаний материалов: RTM6 с T300, T700S, M55J, E-glass и Kevlar 49; HexPly 8552 с T700S, T800H и Kevlar 49; PEEK с T300 и T700S; BMI с M55J и T800H; винилэфирная смола с S-2 Glass и базальтовым волокном; Al 7075-T6 и Ti–6Al–4V с непрерывными SiC-волокнами.

Панель исходных данных показана на рис. 4. После выбора связующего и волокон рядом с выпадающими списками автоматически выводятся механические характеристики компонентов. Пользователь задаёт температуру, давление на внешний контур, структуру армирования, форму и размеры конструкции. Для кольцевой пластины вводятся внутренний и внешний радиусы, для эллиптической – полуоси внутреннего и внешнего кон-

туров. В приложении полностью реализованы две структуры армирования: кардиоиды с изогональными траекториями и логарифмические спирали с радиальными траекториями (рис. 5).

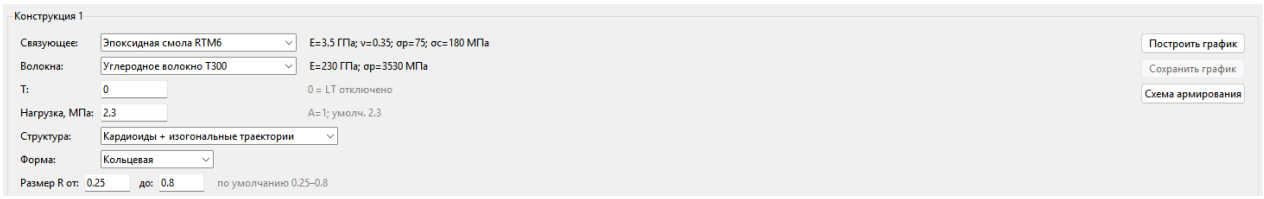


Рис. 4. Панель задания материалов, нагрузки, структуры и геометрии конструкции

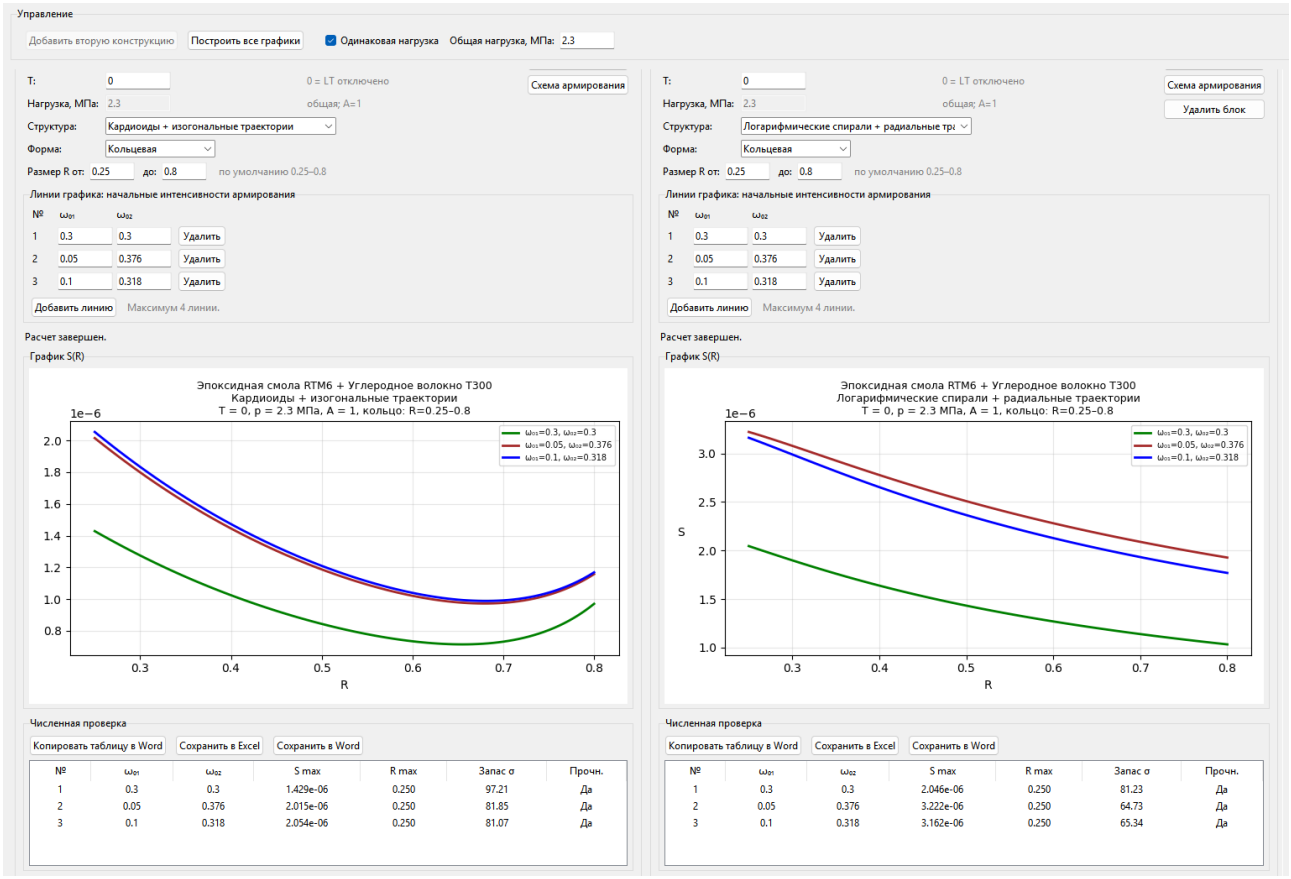


Рис. 5. Режим одновременного сравнения двух структур армирования

Следовательно, рациональный вариант армирования должен определяться совместно по материалам, геометрии, интенсивностям, нагрузке и температуре, а не по одному параметру. Программный комплекс создаёт основу для такого многофакторного выбора и может быть расширен новыми семействами траекторий и более точной двумерной моделью армированной конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галанин М. П., Федорова Н. А. *Армирование плоских конструкций по изогональным траекториям.* Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2017. № 33. 16 с.

2. Немировский Ю. В., Федорова Н. А. *Исследование рациональных структур криволинейного армирования в полярной системе координат.* Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. № 1 (30). С. 233–244.
3. Feodorova N. A., Nemirovsky Yu. V. *Modeling limit states for curvilinearly reinforced rotated disks.* Mathematica Montisnigri. 2019. № 1 XLIV. P. 84–99.
4. Федорова Н. А., Руженцев И. Д. *Топология траекторий армирования волокнистого композита и управление прочностными свойствами.* Решетневские чтения. Материалы XXIX Международной научно-практической конференции, посвященной памяти академика М. Ф. Решетнева: в 2-х частях. Красноярск. 2025. С. 1041–1043.
5. Федорова Н. А. *Программа расчёта предельных деформаций плоских конструкций с криволинейными траекториями армирования.* Свидетельство госрегистрации программы для ЭВМ № 2015663035. 2015.
6. Немировский Ю. В., Федорова Н. А. *Прочность криволинейно армированных пластин в полярной системе координат.* Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2021. Т. 14. № 8. С. 952–964.
7. Васильев В. В., Протасов В. Д., Болотин В. В. [и др.] *Композиционные материалы: справочник.* М. : Машиностроение, 1990. 510 с.

РАЗДЕЛЕНИЕ ЭМУЛЬСИЙ ДИЗЕЛЬНОЕ ТОПЛИВО – ВОДА С ПОМОЩЬЮ КЕРАМИЧЕСКИХ УЛЬТРАФИЛЬТРАЦИОННЫХ МЕМБРАН: ЭКСПЕРИМЕНТ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

И. И. Рыжков[1,2], *А. В. Минаков*[2], *И. А. Харченко*[1,2], *И. Р. Волкова*[3],
Е. В. Елсуфьев[1], *В. Х. Ситдиков*[1,2], *А. А. Карачаров*[4],
Р. А. Ваганов[2], *А. А. Кукушкин*[2]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*
[2]*Сибирский федеральный университет, Красноярск*
[3]*Федеральный исследовательский центр КНЦ СО РАН, Красноярск*
[4]*Институт химии и химической технологии СО РАН, Красноярск*

Нефтепродукты являются одним из основных загрязнителей окружающей среды. Нефтеперерабатывающая и металлообрабатывающая промышленности производят большое количество нефтесодержащих сточных вод. Мембранное разделение является одним из наиболее перспективных методов очистки таких вод в силу высокой производительности, экологичности и низкого энергопотребления [1]. Целью работы является экспериментальное исследование разделения эмульсий дизельное топливо (ДТ) – вода с помощью керамических ультрафильтрационных мембран, а также математическое моделирование соответствующего процесса в части гидродинамики и массопереноса в фильтрационной ячейке.

Синтез ультрафильтрационных мембран осуществляется нанесением селективного слоя из нановолокон оксида алюминия диаметром порядка 10 нм на пористую подложку из оксида алюминия. Средний размер пор мембраны составляет 30 нм, жидкостная проницаемость – 200 л/м^2 ч бар. Проведены эксперименты по фильтрации эмульсий через полученные мембраны с помощью установки тангенциальной фильтрации, использующей ячейку с радиальным потоком. Установлено, что полученные мембраны позволяют задержать более 99 % дизельного топлива в водной эмульсии с концентрацией ДТ 500 мг/л. Поток пермеата составляет 1000 л/м^2 ч при разности давлений 5 бар. Установлено, что со временем поток уменьшается незначительно, что объясняется развитым радиальным потоком со средней скоростью течения вдоль мембраны около 5 м/с.

Для математического моделирования процесса фильтрации используется два подхода. В рамках первого подхода рассматривается одномерная модель, описывающая блокировку пор мембраны каплями эмульсии и формирование слоя капель дизельного топлива на поверхности мембраны (загрязнение) [2]. Подгонка параметров модели на основе экспериментальных данных по зависимости потока пермеата от времени позволяет определить процент блокировки пор и толщину загрязняющего слоя. В рамках второго подхода моделируется течение и перенос массы в фильтрационной ячейке на основе двухфазной модели в среде Ansys Fluent R21. Результаты расчётов показывают хорошее согласие с данными эксперимента по зависимости задержания и потока пермеата от времени.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 26–19–00526, https://rscf.ru/project/26-19-00526/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kharchenko I. A., Volkova I. R., Elsuf'ev E. V. [et al.] *Separation of diesel fuel–Water emulsions using microfiltration ceramic membranes from fly ash microspheres.* Membranes and Membrane Technologies. 2025. V. 7. No. 6. P. 327–337.
2. Virga E., Field R. W., Biesheuvel P. M., De Vos W. M. *Theory of oil fouling for microfiltration and ultrafiltration membranes in produced water treatment.* J. of Colloid and Interface Science. 2022. V. 621. P. 431–439.

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ НА НЕОДНОРОДНОСТЬ МАССОВОЙ СКОРОСТИ ИСПАРЕНИЯ В МОДЕЛИ ДВУХСЛОЙНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ

Н. А. Савельев

Федеральный исследовательский центр КНЦ СО РАН, Красноярск

Рассматривается течение в системе сред «двухкомпонентная жидкость – газопаровая смесь» (см. рис. 1), которое индуцируется несколькими основными механизмами: термогравитационной конвекцией, капиллярными эффектами, связанными с зависимостью поверхностного натяжения от температуры и концентрации, а также фазовым переходом при испарении жидкости. Градиенты концентрации и температуры порождают в обоих слоях диффузионные потоки вещества (закон Фика) и тепла (закон Фурье). Имеет место явление термодиффузии – изменение концентрации из-за разности температур (эффект Соре) и обратный к нему эффект Дюфора. В соответствии с принципом Онзагера [1] количественная мера влияния градиента концентрации на поток тепла равна мере влияния градиента температуры на диффузионный поток, поэтому учитываются оба эффекта.

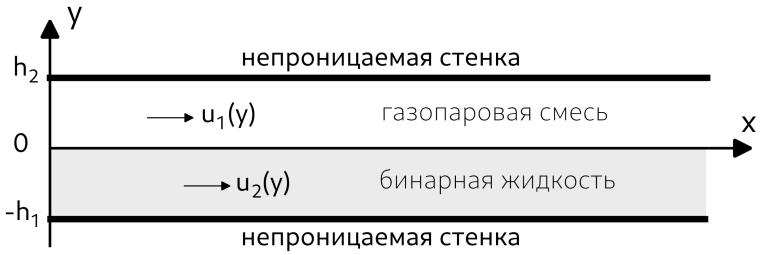


Рис. 1. Схема течения

Математическая модель состоит из уравнений Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска для несжимаемой среды, а также уравнений тепло- и массопереноса:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} - \mathbf{g}(\beta_T\theta + \beta_C c); \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0; \\ &\theta_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = \chi\Big(\Delta\theta + \alpha_C\Delta c\Big); \quad c_t + \mathbf{u}\cdot\nabla c = D\Big(\Delta c + \alpha_T\Delta\theta\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t – время, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ – вектор пространственных координат, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости, $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$, где g – ускорение силы тяжести, p – давление с точностью до гидростатического, ρ – характерная плотность, $\theta(x, y)$ – отклонение от средней температуры системы T_0, $c(x, y)$ – отклонение от средней концентрации C_0 для жидкого слоя и от концентрации насыщенного пара C_* для газопарового слоя. Параметры переноса следующие: χ – коэффициент температуропроводности, D – коэффициент диффузии, ν – коэффициент кинематической вязкости, β_T и β_C – коэффициенты температурного и концентрационного расширения, α_T и α_C отвечают за интенсивность эффектов Соре и Дюфора. Оператор Лапласа Δ и градиент ∇ вычисляются по пространственным координатам. Индексом $j = 1$ обозначены характеристики нижнего слоя, $j = 2$ – верхнего.

Уравнения (1) допускают точное стационарное решение типа решения Бириха [2], в котором только горизонтальная компонента скорости $u(y) \neq 0$. При этом θ^j и c^j ищутся в виде $\theta^j(x,y) = (a_2^j y + a_1^j)x + \Theta^j(y)$ и $c^j(x,y) = (b_2^j y + b_1^j)x + C^j(y)$. Интегрирование уравнений (1) с учётом описанного вида искомых функций приводит к полиномиальному представлению функций $u(y), \Theta^j(y)$ и $C^j(y)$ (см., например, [3], где рассматриваются уравнения (1) при $\alpha_C \equiv 0$).

Постоянные a_i^j, b_i^j и коэффициенты полиномов $u(y), \Theta^j(y)$, $C^j(y)$ определяются из граничных условий. На границе раздела сред постулируются равенства скоростей и температур, задаются условия равенства потоков вещества, баланса потоков тепла, значение концентрации пара, динамическое условие раскладывается на нормальную и касательную составляющие. Поверхностное натяжение σ линейно меняется при вариациях температуры и концентрации $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(\theta^1 - T_0) - \sigma_C(c^1 - C_0)$. На твёрдых стенках считаются выполненными условия прилипания и отсутствия потока вещества через стенки, а для температуры выбрано линейное распределение $\theta^j = A_j x + \vartheta_j$, следующее из формы функции температуры в слоях. Также задаётся расход газа в верхнем слое и средняя концентрация лёгкого компонента C_0 в нижнем слое, замыкающие систему уравнений и граничных условий, которая в этой работе называется *Постановкой 1.*

Алгоритм нахождения постоянных интегрирования следующий: сначала решается система на $a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, b_2^1, b_1^2, b_2^2$, затем коэффициенты полинома $u(y)$ выражаются через b_1^1 и подставляются в оставшиеся уравнения. В итоге получается квадратное уравнение на постоянную b_1^1, вычислив которую можно восстановить все остальные константы интегрирования.

Отметим, что основной целью данной работы является поиск таких граничных режимов, при которых массовая скорость испарения M будет линейной функцией продольной координаты x. Данная характеристика входит в условие баланса тепловых потоков на границе фазового перехода и находится по формуле

$$M = -D^2\rho^2 \left(\frac{\partial c^2}{\partial y} + \alpha_T^2 \frac{\partial \theta^2}{\partial y}\right)\Big|_{(x,0)} = -D^2\rho^2 \left[(b_2^2 + \alpha_T^2 a_2^2)x + \left(\frac{\partial C^2}{\partial y} + \alpha_T^2 \frac{\partial \Theta^2}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}\right]. \qquad (2)$$

В *Постановке 1* условие отсутствия потока вещества через верхнюю стенку приводит к равенству $b_2^2 + \alpha_T^2 a_2^2 = 0$, и массовая скорость испарения M согласно формуле (2) оказывается постоянной. Чтобы описать случай неоднородного испарения ($M \neq \text{const}$), в работе рассматриваются различные варианты граничных условий на температуру и/или концентрацию на стенках канала.

Сначала исследуются модификации *Постановки 1*: рассматриваются четыре условия для функции температуры на стенках: линейное распределение температуры на обеих стенках (непосредственно *Постановка 1*); линейное распределение температуры на нижней стенке и теплоизолированная верхняя стенка; теплоизолированная нижняя стенка и линейное распределение температуры на верхней стенке; обе стенки теплоизолированы. Для каждого из этих случаев задаются четыре варианта выбора коэффициентов термодиффузии: $\alpha_T^1 = 0$ на нижней стенке и $\alpha_T^2 = 0$ на верхней стенке; $\alpha_T^1 = 0$ на нижней стенке и $\alpha_T^2 \neq 0$ на верхней; $\alpha_T^1 \neq 0$ на нижней стенке и $\alpha_T^2 = 0$ на верхней; $\alpha_T^1 \neq 0$ на нижней стенке и $\alpha_T^2 \neq 0$ на верхней. Анализ показал, что во всех шестнадцати вариантах возможен только случай однородного испарения $M = \text{const}$.

В *Постановке 2* отсутствие потока вещества через верхнюю стенку заменяется условием полной абсорбции пара на верхней стенке $c^2(x, h_2) = 0$ (в некоторых реальных случаях

это условие является физически возможным [4]), что позволяет получить линейную зависимость M от x.

В качестве примера описания течения с испарением на границе раздела с помощью постановок *1 и 2* рассматривается система сред, в которой нижний слой заполнен водным раствором этанола с концентрацией $C_0 = 0.6$, а верхний – смесью паров этанола с азотом, концентрация насыщенного пара $C_* = 0.068$. Глубины слоёв $h_1 = h_2 = 0.003$ м, расход газа в верхнем слое $Q = 9.6 \cdot 10^{-6}$ кг/(м · с). Средняя температура системы $T_0 = 25\,^{\circ}$C, продольные градиенты температуры $A_1 = 1\,^{\circ}$C/м, $A_2 = 5\,^{\circ}$C/м; $\vartheta_j = T_0$. Физические параметры жидкой смеси берутся из [5], газопаровой смеси – из [6], неизвестные из литературы значения (например α_C^j) задаются с точностью до порядка.

На рис. 2 приведены графики скорости, полей температуры и концентрации, рассчитанные с помощью *Постановки 1*. Преобладает смешанный режим течения: несмотря на перепад температуры вдоль поверхности раздела профили скорости близки к параболическим в обоих слоях, тем самым термокапиллярный эффект конкурирует со сдвиговым напряжением, вызванным потоком газа, прокачиваемом в верхнем слое с расходом Q. Поля концентрации в обоих слоях близки к рассчитанным в работе [3], где при постановке задачи пренебрегается эффектом Дюфора.

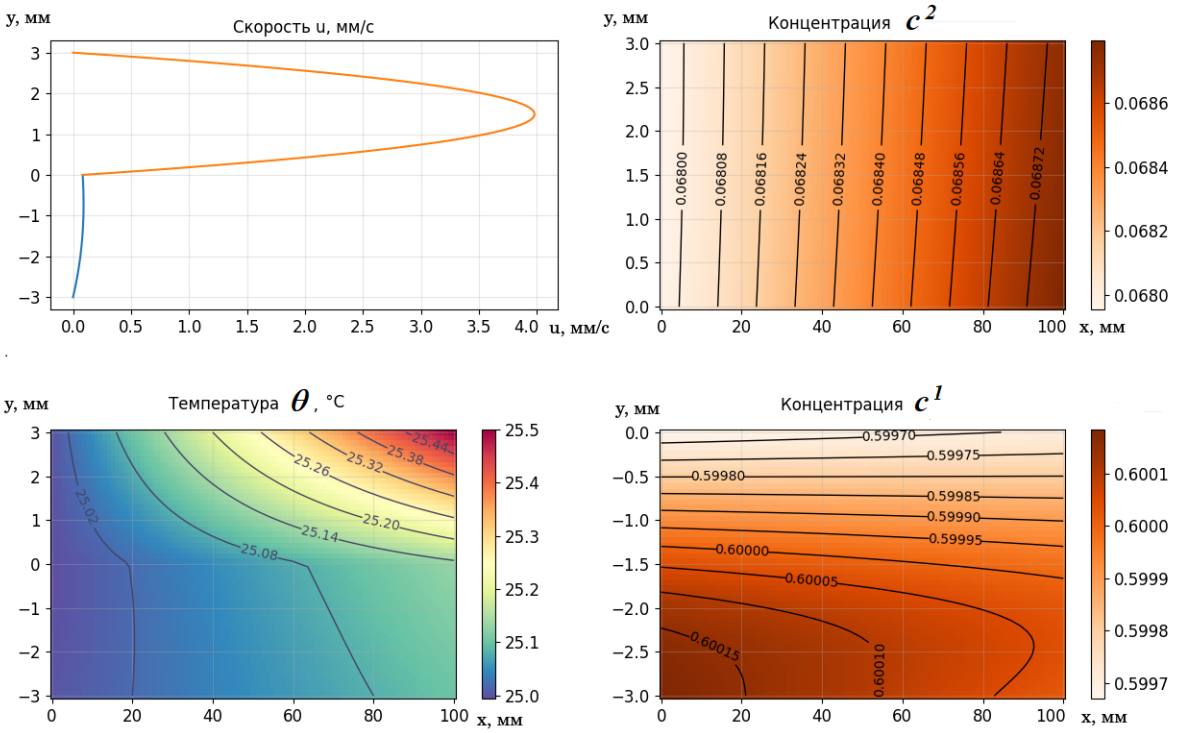


Рис. 2. Скорость, температура, концентрация в жидком и газовом слое, соответствующие *Постановке 1*

В *Постановке 2* нулевая концентрация паров этанола на верхней стенке порождает в обоих слоях значительные перепады концентраций и более интенсивное по сравнению с рассчитанным в рамках *Постановки 1* испарение, которое приводит к остыванию поверхности раздела и образованию холодного пограничного слоя. График скорости указывает на преобладание термокапиллярного механизма: в слое жидкости формируется возвратное течение (рис. 3).

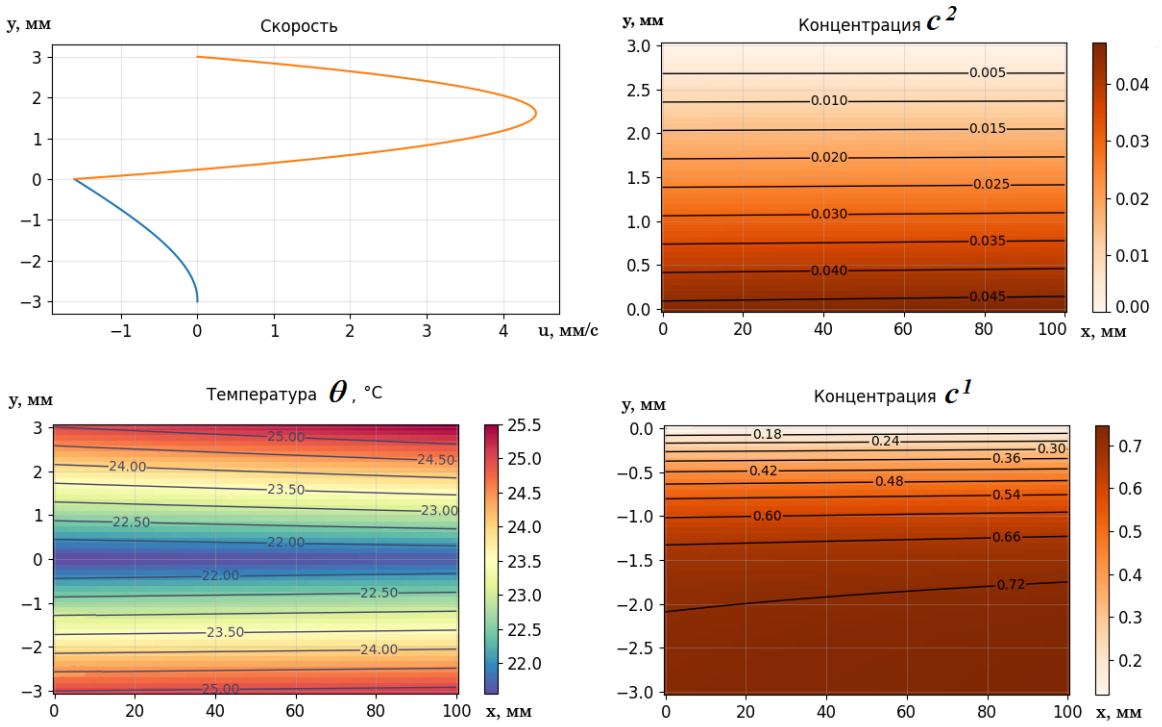
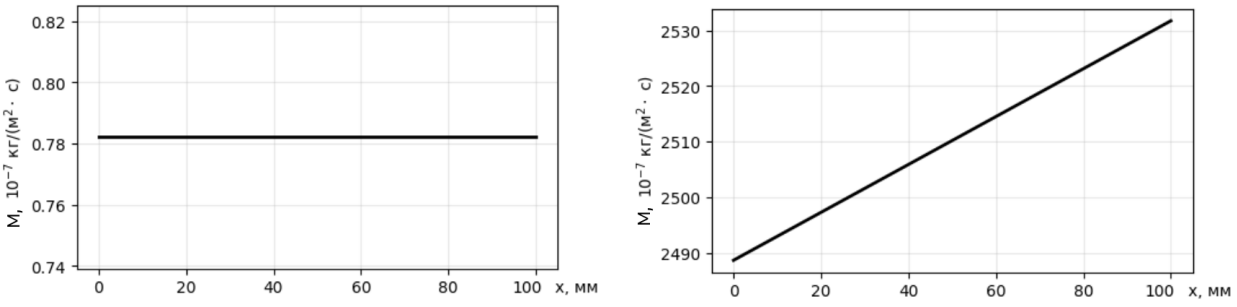


Рис. 3. Скорость, температура, концентрация в жидком и газовом слое, соответствующие *Постановке 2*



(а) (б)

Рис. 4. Массовая скорость испарения, соответствующая *Постановке 1* (а), *Постановке 2* (б)

На рис. 4 приведены графики массовой скорости испарения M, соответствующие *Постановкам 1 и 2*. Можно видеть, что при линейном распределении температуры на обеих стенках канала M постоянна вдоль всей границы фазового перехода (рис. 4, (а)). В случае условия полной абсорбции пара на верхней стенке испарение неоднородное: M является линейной функцией от x (рис. 4, (б)). Следует отметить, что расчёт интенсивности испарения с помощью *Постановки 2* даёт более близкие к экспериментальным значения постоянной M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: Учебное пособие: Для вузов в 10 т. Т. VI. Гидродинамика.* М.: Физматлит, 2001. 728 с.

2. Бирих Р. В. *О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости* ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
3. Степанова И. В. *Влияние тепловой нагрузки на конвекцию в системе двух бинарных смесей с фазовым переходом.* Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 2. С. 246–258.
4. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Shefer I. A. *Solution of a two-layer flow problem with inhomogeneous evaporation at the thermocapillary interface.* J. of Siberian Federal Universit. Mathematics & Physics 2021. 14(4). P. 404–413.
5. Стабников В. Н., Ройтер И. М., Процюк Т. В. *Этиловый спирт.* М. : Пищевая промышленность, 1976. 273 с.
6. Варгафтик Н. Б. *Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей.* М. : Наука, 1972. 721 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ БЛОЧНОЙ СРЕДЫ

О. В. Садовская, В. М. Садовский

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Термин «волна разрушения» появился в 1960-х годах, когда была выдвинута гипотеза о принципиальной возможности протекания процесса фрагментирования материала в относительно тонком слое, распространяющемся с определённой скоростью. К числу первых публикаций по математическому описанию волн разрушения относятся работы Дж. Эшелби, Г. И. Баренблатта, С. С. Григоряна, Б. В. Кострова, Р. Л. Салганика, Л. И. Слепяна, Г. П. Черепанова. Считалось, что такие волны реализуются только при наличии растягивающих напряжений на некоторых площадках в неразрушенном материале.

В конце 1980-х годов в работах В. Е. Фортова, Г. И. Канеля, С. В. Разорёнова и их коллег были экспериментально обнаружены волны разрушения в стекле в условиях сжатия [1]. Были выявлены основные условия реализуемости волн разрушения:

– структурная неоднородность материала;
– наличие системы микротрещин на поверхности и внутри образца;
– наличие запасённой энергии самоуравновешенных предварительных напряжений, поддерживающей устойчивое распространение волны.

Был также сформулирован ряд невыясненных фундаментальных вопросов:

– каков детальный механизм распространения волн разрушения в материале под действием сжимающих напряжений?
– чем определяется скорость распространения стационарной волны разрушения?
– каковы свойства материала и соответствующие условия нагружения, при которых возможно инициирование волн разрушения?

Для анализа пластической деформации и разрушения структурно неоднородных материалов под действием динамических возмущений авторами разработана вычислительная технология на основе математической модели блочной среды с упругопластическими блоками и тонкими податливыми, реологически сложными прослойками [2]. Система уравнений для описания деформации блоков включает в себя определяющие соотношения упругопластического течения Прандтля – Рейсса в виде вариационного неравенства, соответствующего принципу Мизеса максимальной пластической диссипации энергии. При моделировании прослоек применяются определяющие соотношения вязкоупругой, упругопластической и пористой среды, учитывающие пороговое повышение прочности материала при схлопывании пор, а также наличие начальной системы трещин в прослойках, растущих по мере приложения внешних напряжений. При выполнении критерия разрушения расслоившаяся часть прослойки моделируется как поверхность идеального контакта. Внутренние граничные условия контактного взаимодействия блоков в зонах разрушения прослоек формулируются в виде вариационных неравенств, которые исключают нефизичное проникание блоков друг в друга и гарантируют выполнение условия положительности контактного давления. Самоуравновешенные предварительные напряжения в образцах, обусловленные технологическими процессами, моделируются на основе построения функции напряжений Эри (системы функций Эри в пространственном случае) с помощью вариационного принципа Кастильяно через задание распределения объёмной деформации.

Для численного решения краевых задач в рамках предлагаемой модели разработан эффективный вычислительный алгоритм, основанный на модификации схемы распада

разрыва Годунова. Алгоритм реализован в виде комплекса параллельных программ для многопроцессорных вычислительных систем. Распараллеливание вычислений производится по методу декомпозиции расчётной области.

В докладе в качестве примера предварительно напряжённого структурно неоднородного материала рассматривается закалённое стекло. При динамических воздействиях закалённое стекло рассыпается на множество мелких фрагментов примерно одинакового размера и формы, что свидетельствует о наличии в нём блочной структуры на мезомасштабном уровне, сформировавшейся на стадии закалки. Получены результаты численного моделирования волновых процессов в закалённом стекле под действием распределённых и локализованных импульсных возмущений на границе образца, которые демонстрируют механизм возникновения волн разрушения. Волны разрушения в расчётах реализуются с использованием специального критерия разрушения, применяемого при моделировании разрушения хрупких горных пород. Показано, что скорость волны разрушения зависит от уровня напряжений за фронтом пластической волны и от скорости нагружения на границе образца [2, 3].

Работа выполнена в рамках госзадания Института вычислительного моделирования СО РАН – обособленного подразделения ФИЦ КНЦ СО РАН (проект FWES-2024-0025).

ЛИТЕРАТУРА

1. Канель Г. И., Разорёнов С. В., Фортов В. Е. *Волны разрушения в ударно-сжатом стекле.* Успехи механики. 2005. № 3. С. 3–51.
2. Sadovskaya O. V., Sadovskii V. M. *Mathematical modelling of fracture waves in a blocky medium with thin compliant interlayers.* Phil. Trans. Royal Soc. Ser. A: Math., Phys. Engin. Sci. 2024. V. 382. Iss. 2277. Art. 20230305.
3. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. *Application of dynamic model of a blocky medium to describe the plastic deformation of a structurally inhomogeneous material at the mesoscale level.* In: Mechanics and Acoustics of Metamaterials (eds.: H. Altenbach, V. I. Erofeev, I. S. Pavlov). Ser.: Advanced Structured Materials. V. 24. Chapt. 13. Cham: Springer, 2026. P. 197–226.
4. Садовский В. М., Садовская О. В. *Численное моделирование волн разрушения в блочной среде.* ЖВМиМФ. 2026. Т. 66. № 6. С. 923–936.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КОНТИНУУМА КОССЕРА

В. М. Садовский

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

На основе принципа Мизеса максимальной мощности пластической диссипации энергии определяющие соотношения упругопластического континуума Коссера приводятся к вариационному неравенству для гиперболического дифференциального оператора с односторонними ограничениями на напряжённое состояние частиц микроструктуры материала. С помощью интегрального обобщения неравенства анализируются допустимые поверхности разрыва скоростей и напряжений.

В геометрически линейном приближении систему определяющих уравнений упругопластического континуума с вращательными степенями свободы составляют уравнения поступательного и вращательного движений

$$\rho\,\frac{\partial v_i}{\partial t}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\,,\qquad J_{ij}\,\frac{\partial \omega_j}{\partial t}=\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j}-\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{jk}\,,$$

уравнения закона Гука для упругих составляющих тензоров деформации и кривизны

$$\Lambda_{ij}-\Lambda^p_{ij}=a_{ijkl}\,\sigma_{kl}+c_{ijkl}\,m_{kl}\,,\qquad M_{ij}-M^p_{ij}=c_{ijkl}\,\sigma_{kl}+b_{ijkl}\,m_{kl}\,,$$

уравнения ассоциированного закона течения для пластических составляющих

$$\frac{\partial \Lambda^p_{ij}}{\partial t}=\sum_{s=1}^{q}\lambda_s\,\frac{\partial f_s}{\partial \sigma_{ij}}\,,\quad \frac{\partial M^p_{ij}}{\partial t}=\sum_{s=1}^{q}\lambda_s\,\frac{\partial f_s}{\partial m_{ij}}\,,\qquad \lambda_s\geqslant 0\,,\quad \lambda_s\,f_s=0\ \ \forall\, s\,,$$

и кинематические уравнения для тензоров деформации Λ_{ij} и кривизны M_{ij}

$$\frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\varepsilon_{ijk}\,\omega_k\,,\qquad \frac{\partial M_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\,.$$

Система записана в общепринятых обозначениях относительно проекций векторов скорости поступательного v_i и вращательного ω_i движений. Состояние среды подчиняется ограничению, в соответствии с которым тензоры напряжений σ_{ij} и моментных напряжений m_{ij} не могут выходить за пределы некоторого заданного множества в пространстве напряжений. Если они принадлежат внутренности этого множества, то реализуется термодинамически обратимый процесс. Выход на границу (поверхность текучести) приводит к пластическому течению. Ограничение формулируется через систему выпуклых непрерывно-дифференцируемых функций $f_1, f_2, ..., f_q$ в виде

$$f(\sigma_{ij},m_{ij})\equiv\max_{1\leqslant s\leqslant q} f_s(\sigma_{ij},m_{ij})\leqslant 0\,.$$

Имеют место следующие утверждения [1, 2].

У т в е р ж д е н и е 1. В терминах вектора U с координатами $v_i, \omega_i, \sigma_{ij}, m_{ij}$ ограничение на состояние записывается в форме включения $U\in F$, где F – выпуклое и замкнутое

множество в 24-мерном векторном пространстве. Определяющие соотношения упругопластического деформирования формулируются в виде вариационного неравенства для гиперболического по Фридрихсу дифференциального оператора:

$$\big(\tilde U - U\big)\cdot\left(A\,\frac{\partial U}{\partial t} - B^j\,\frac{\partial U}{\partial x_j} - Q\,U\right) \geqslant 0, \qquad \forall\ \tilde U \in F,$$

с симметричными матрицами A и B^j, матрица A положительно определена, а Q антисимметрична. В развёрнутой форме:

$$\begin{aligned}\big(\tilde v_i - v_i\big)\left(\rho\,\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right) + \big(\tilde\omega_i - \omega_i\big)\left(J_{ij}\,\frac{\partial \omega_j}{\partial t} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j} - \varepsilon_{ijk}\,\sigma_{jk}\right) + \\ +\big(\tilde\sigma_{ij} - \sigma_{ij}\big)\left(a_{ijkl}\,\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + c_{ijkl}\,\frac{\partial m_{kl}}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \varepsilon_{ijk}\,\omega_k\right) + \\ +\ \big(\tilde m_{ij} - m_{ij}\big)\left(c_{ijkl}\,\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + b_{ijkl}\,\frac{\partial m_{kl}}{\partial t} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right) \geqslant 0\,.\end{aligned}$$

У т в е р ж д е н и е 2. Для разности двух решений вариационного неравенства справедлива оценка

$$\big\|U' - U\big\|(t_1) \leqslant \big\|U' - U\big\|(t_0)$$

в усечённом характеристическом конусе дифференциального оператора с основаниями $\Omega(t_0)$ и $\Omega(t_1)$ по норме пространства $L_2\big(\Omega(t)\big)$, квадрат которой равен

$$\big\|U\big\|^2(t) = \int\limits_{\Omega(t)} U\cdot A\,U\ d\Omega\,.$$

Аналогичная оценка справедлива, если усечённый конус в пространственно-временно́й области опирается на неподвижную границу с заданными на ней диссипативными граничными условиями, выполнение которых для вектор–функций U и U' гарантирует выполнение неравенства $\ \nu_j\big(U' - U\big)\cdot B^j\big(U' - U\big) \leqslant 0,\ $ где ν – вектор внешней нормали к границе.

Из оценок следует непрерывная зависимость решения задачи Коши с начальными данными $U(x,0) = U_0(x)$ «в малом» по времени во внутренних точках области и вблизи границы.

У т в е р ж д е н и е 3. Вариационное неравенство модели допускает интегральное обобщение

$$\int\limits_G\int\left(\tilde U - \frac{U}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\partial \chi}{\partial t}\,A + \frac{\partial \chi}{\partial x_j}\,B^j\right)U\,d\Omega\,dt \geqslant \int\limits_G\int U\cdot\left(A\,\frac{\partial \tilde U}{\partial t} - B^j\,\frac{\partial \tilde U}{\partial x_j} + Q\,\tilde U\right)\chi\,d\Omega\,dt\,,$$

определяющее множество слабых (обобщённых) решений в пространстве $L_2\big(G(x,t)\big)$.

Интегральное неравенство позволяет, в частности, изучить решения с сильным разрывом, когда на некоторой поверхности $S \subset G$ реализуется разрыв первого рода, в то время как по обе стороны от S вектор–функция $U(x,t)$ непрерывно дифференцируема. Сечение S плоскостью $t = \mathrm{const}$ представляет собой фронт ударной волны, движущийся в направлении нормали ν со скоростью $c > 0$. На поверхности разрыва выполняется поточечное вариационное неравенство

$$\big(\tilde U - U^0\big)\cdot\big(c\,A + \nu_j\,B^j\big)\big[U\big] \geqslant 0, \quad \forall\ \tilde U \in F, \quad U^\pm \in F, \quad U^0 = \frac{U^+ + U^-}{2}\,,$$

которое адекватно описывает ударноволновые переходы в рамках рассматриваемой математической модели в том смысле, что его выполнение на поверхности разрыва гарантирует единственность и непрерывную зависимость разрывного решения задачи Коши «в малом» от начальных данных.

У т в е р ж д е н и е 4. Существует два типа разрывов. Если вектор U^0 лежит во внутренности множества F, то это нейтральный разрыв. В данном случае для скачка U выполняется система уравнений $\big(c\,A+\nu_j\,B^j\big)\big[U\big]=0$. Так выглядит система, соответствующая разрывам решения в рамках упругой модели. Если U^0 принадлежит границе F, то реализуется неупругий диссипативный разрыв. Вариационное неравенство на поверхности разрыва в этом случае представляет собой формулировку принципа максимума диссипации, в соответствии с которым величина удельной диссипации энергии в расчёте на единицу поверхности разрыва максимальна, строго положительна и равна

$$D=-\,U^0\cdot\big(c\,A+\nu_j\,B^j\big)\big[U\big]=-\,\frac{1}{2}\Big[U\cdot\big(c\,A+\nu_j\,B^j\big)\,U\Big].$$

На нейтральных разрывах диссипация равна нулю.

У т в е р ж д е н и е 5. Односторонние пределы разрывного решения $U^{\pm}$ на поверхности диссипативного разрыва являются граничными точками множества F. Более того, отрезок с концами U^- и U^+ целиком принадлежит границе F. Таким образом, число диссипативных разрывов зависит от наличия линейчатых и плоских участков на поверхности текучести. Если множество допустимых напряжений F строго выпукло и таких участков на поверхности текучести нет, то диссипативные разрывы отсутствуют. Они сглаживаются при выпуклой регуляризации F, т. е. при переходе от нестрого выпуклого к строго выпуклому множеству.

У т в е р ж д е н и е 6. Диссипативные разрывы движутся медленнее самого быстрого из нейтральных (бездиссипативных, упругих) разрывов.

Для изотропного материала скорости пластических ударных волн и соотношения сильного разрыва получены в аналитической форме. Решения с разрывами типа плоских продольных ударных волн малой амплитуды, с плоскими поперечными ударными волнами, волнами вращательного и крутильного движения проиллюстрированы численными расчётами одномерных задач о мгновенном приложении постоянных напряжений и моментных напряжений к границе полупространства.

Работа выполнена в рамках госзадания Института вычислительного моделирования СО РАН – обособленного подразделения ФИЦ КНЦ СО РАН (проект FWES-2024-0025).

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский В. М. *Анализ математической модели моментного континуума, учитывающей необратимую деформацию структурно неоднородного материала.* Труды Института математики и механики УрО РАН. 2026. Т. 32. № 1. С. 224–235.
2. Садовский В. М. *О термодинамической согласованности и математической корректности в теории упругопластических, сыпучих и пористых сред.* ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 4. С. 738–751.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ СТЕНКИ ИЗ АМГ5, ВОЗВЕДЁННОЙ ПО ТЕХНОЛОГИИ CMT

Н. К. Салихова, Д. С. Дудин, И. Э. Келлер

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

В работе представлена модель, описывающая изменение остаточных напряжений и деформаций в стеновой конструкции из алюминиево-магниевого сплава АМг5, возникающих в процессе аддитивного производства по технологии холодного переноса металла (CMT). Холодный перенос металла представляет собой процесс дуговой сварки плавлением, в котором используются импульсные ток и подача проволоки. В процессе аддитивного наплавления необходимо контролировать формирующиеся температурные поля, деформации и остаточные напряжения в наплавляемых слоях с целью обеспечения формирования необходимой формы изделия, его структурного состояния и механических свойств.

Исследование остаточных напряжений проводится на образце, который представляет собой вертикальную стенку высотой 24.3 мм и длиной 250 мм, состоящую из девяти слоёв, последовательно наплавляемых на подложку из сплава 6082 T6, закреплённую в центре опорной стальной плиты (стола). Подложка имеет размеры 310×65×6.35 мм. В качестве присадочного материала используется проволока из АМг5 диаметром 1.2 мм. Тепловое воздействие учитывается через источник теплоты, который локализован в объёме прямоугольного параллелепипеда с размерами 6.5×3.25×2.7 мм. Скорость наплавки является постоянной и составляет 10 мм/с. После наплавки одного слоя происходит остывание конструкции на воздухе в течение 45 с, в результате чего температура в наращиваемой конструкции выравнивается почти до комнатной температуры.

Расчёт остаточных напряжений производится в несколько этапов: 1) решение задачи нестационарной теплопроводности, из которой определяется распределение температуры, создаваемое движущимся объёмным источником теплоты; 2) решение термомеханической задачи об определении деформаций и остаточных напряжений вследствие остывания на воздухе возведённой вертикальной стенки с учётом изменения истории поля температуры, полученной на первом этапе; 3) решение деформационной задачи – изменения поля остаточных напряжений и прогиб стеновой конструкции после открепления от основания.

Для численного решения уравнений тепловой задачи применялся интерфейс Heat Transfer in Solids программного комплекса Comsol Multiphysiscs, служащий для расчёта распределения температуры в процессе наплавки, а для решения термомеханической задачи – интерфейс Solid Mechanics, позволяющий определить напряжённо-деформированное состояние в формируемой стеновой конструкции. Пространственная дискретизация нелинейных уравнений выполнялась методом конечных элементов. Постепенное добавление материала происходит за счёт задания ненулевого коэффициента теплопроводности. Этот параметр изменяется по мере того, как источник тепла перемещается с заданной скоростью вдоль длины слоя. Структурные превращения, происходящие в процессе наплавления слоёв, не учитывались. Продольная и поперечная усадки при расчёте напряжённо-деформированного состояния не рассматриваются. Также не рассматривались распространение фронта плавления и кристаллизации. В численном эксперименте коэффициент температурного линейного расширения для АМг5 полагается не зависящим от температуры.

При решении деформационной задачи учитывается температурная зависимость механических свойств моделируемого сплава АМг5 и подложки, таких как модуль упругости, предел текучести, предел прочности. Полагается аддитивность упругих, температурных и пластических тензоров деформаций скорости. Для описания термоупругопластического поведения рассматриваемых материалов (наплавляемых слоёв и подложки) использована модель упрочнения Джонсона – Кука.

Получены оптимальные термические циклы, позволяющие обеспечить качественное сплавление металлических слоёв без переплавления предыдущих слоёв. Определены распределения остаточных напряжений и пластических деформаций в ребре на основании, вызванные собственными тепловыми деформациями под воздействием поля температуры. Показано влияние режима последовательного нанесения девяти слоёв металла на распределение остаточных напряжений и искажений стенки, освобождённой от закрепления после полного остывания на воздухе. Установлена немонотонность зависимости прогиба образца от количества наплавленных слоёв. Результаты расчёта сравнивались с экспериментально полученным значением прогиба для стенки, представленным в работе [1]. Разработанная модель позволяет прогнозировать и оптимизировать технологический процесс выращивания изделия проволочно-дуговой наплавкой, в частности, минимизировать остаточные напряжения и искажение конструкции. Некоторые теоретические аспекты и результаты, связанные с изучением закономерностей формирования остаточных напряжений и оценкой прогиба ребра на основании, предложены в работах [2, 3].

Работа выполнена в рамках госзадания Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН, номер темы 126020916885-8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoennige J. [et al.] *Control of residual stress and distortion in aluminium wire + arc additive manufacture with rolling.* Additive Manufacturing. 2018. No. 22. P. 775–783.
2. Salikhova N. K. [et al.] *Modelling the evolution of eigenstrains and residual stresses during wall deposition on a substrate by wire-arc surfacing.* Mechanics of Solids. 2025. V. 60. No. 4. P. 2516–2530.
3. Dudin D. S. [et al.] *Modelling of residual stresses and distortions of the wall on a substrate built by wire-arc surfacing.* J. of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. 2024. V. 17. No. 1. P. 75–90.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТВЁРДЫХ И ГАЗООБРАЗНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ КАВИТАЦИОННЫХ СОБЫТИЙ В ПРОТОЧНОМ СОНОХИМИЧЕСКОМ РЕАКТОРЕ

И. О. Сбоев[1], *Т. П. Любимова*[2], *К. А. Рыбкин*[2], *М. О. Кучинский*[2], *А. Д.Садовникова*[2]

[1]*АО «ОДК-Авиадвигатель», Пермь*
[2]*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

Введение. Акустическая кавитация широко применяется в ряде технологических приложений: водоочистке, материаловедении, обогащении полезных ископаемых, где она используется для интенсификации массообменных и химических процессов [1, 2]. Под действием ультразвука в жидкости возникают, растут и схлопываются кавитационные пузырьки. В момент коллапса выделяется энергия, достаточная для диссоциации молекул, генерации ударных волн и микроструй, что значительно ускоряет химические реакции и перемешивание [3].

Пространственное распределение кавитационной активности, например внутри рабочей камеры сонохимического реактора, непосредственно связано со структурой звукового поля в стоячей волне. Наличие газовых пузырьков и твёрдых частиц изменяет акустический импеданс среды, что приводит к рассеянию, отражению и перераспределению акустической энергии [4, 5]. Скопления пузырьков способны приводить к акустическому экранированию, изменению количества узлов и пучностей в стоячей волне и вероятности возникновения кавитационных событий [6].

В существующих численных моделях при расчёте полей акустического давления внутри сонохимических реакторов зачастую рассматривается однородная жидкость без учёта газообразных включений, либо применяются упрощённые подходы для описания пузырьковых сред [7, 8]. При этом влияние твёрдых частиц, особенно в присутствии циркуляционных течений, не являлось предметом систематического анализа.

Цель настоящей работы состоит в численном и экспериментальном исследовании структуры ультразвуковой стоячей волны в проточном сонохимическом реакторе при наличии газовых пузырьков и твёрдых частиц. На основе экспериментальных данных о распределении и размерах включений проводится анализ пространственного распределения акустического давления и его связи с локализацией кавитационных событий.

Новизна подхода состоит в учёте локализованных неоднородностей (пузырьков и твёрдых частиц) как отдельных включений с различным акустическим импедансом, модифицирующих структуру звукового поля. Результаты численного моделирования сопоставляются с экспериментальными картами кавитационной активности.

Численная модель. Расчёт распределения акустического давления в стоячей ультразвуковой волне выполнен методом конечных элементов в двумерной стационарной постановке путём решения уравнения Гельмгольца:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) + \frac{\omega^2}{\rho_0 c_0^2} p = 0,$$

где p — акустическое давление в жидкости над источником ультразвуковых колебаний (излучателем), ρ_0 и c_0 — плотность и скорость звука в жидкости, $\omega = 2\pi f$ — угловая частота.

В качестве исследуемой жидкости выбирается вода, для которой величина акустического импеданса $Z_0 = \rho_0 c_0 = 1.49 \cdot 10^6$ Па·с/м.

Геометрия расчётной области соответствует экспериментальной кювете размерами $H = 140$ мм и $L = 109$ мм. Граничные условия выбираются так же, как в работе [9]. На нижней границе моделируется ультразвуковой излучатель диаметром $D = 88$ мм с амплитудой давления $P = 1.01 \cdot 10^5$ Па и частотой $f = 28$ кГц. На верхней стенке (граница раздела «жидкость – воздух») задаётся условие акустического импеданса для воздуха ($Z_1 = 0.41 \cdot 10^3$ Па·с/м). На боковых стенках – условие импеданса для кварцевого стекла $Z_2 = 1.53 \cdot 10^7$ Па·с/м. В процессе распространения ультразвуковой волны движение жидкости отсутствует ($u = 0$).

В отличие от стандартных подходов, в предлагаемой модели газовые пузырьки и твёрдые частицы вводятся в расчётную область как локальные неоднородности с заданным акустическим импедансом на границе раздела фаз. Для пузырьков величина импеданса выбирается равной Z_1, для твёрдых частиц (полиамидных трассеров) — импеданс полиамида $Z_3 = 2.95 \cdot 10^6$ Па·с/м. Координаты и размеры пузырьков определялись на основе экспериментальных данных, поэтому пузырьки диаметром d_b от 0.6 до 4.0 мм (180 шт.) распределены в основном вдоль боковых границ. В то же время твёрдые частицы диаметром d_p от 0.05 до 2.0 мм (65 шт.) распределены случайным образом в центральной части расчётной области. При расчёте акустического давления в жидкости включения предполагаются неподвижными.

Экспериментальная установка. Эксперименты проводились в прямоугольной кювете с боковыми стенками из кварцевого стекла с внутренними размерами $109 \times 109 \times 160$ мм (рис. 1, *а*). В качестве рабочей жидкости применялась дистиллированная вода. Высота слоя жидкости составляла 140 мм. На дне кюветы в центральной части размещался ультразвуковой излучатель на основе преобразователя Ланжевена с частотой 28 кГц и мощностью 32 Вт. Для регистрации кавитационной активности использовалась алюминиевая фольга толщиной 10 мкм, закреплённая на рамке в центральной части кюветы.

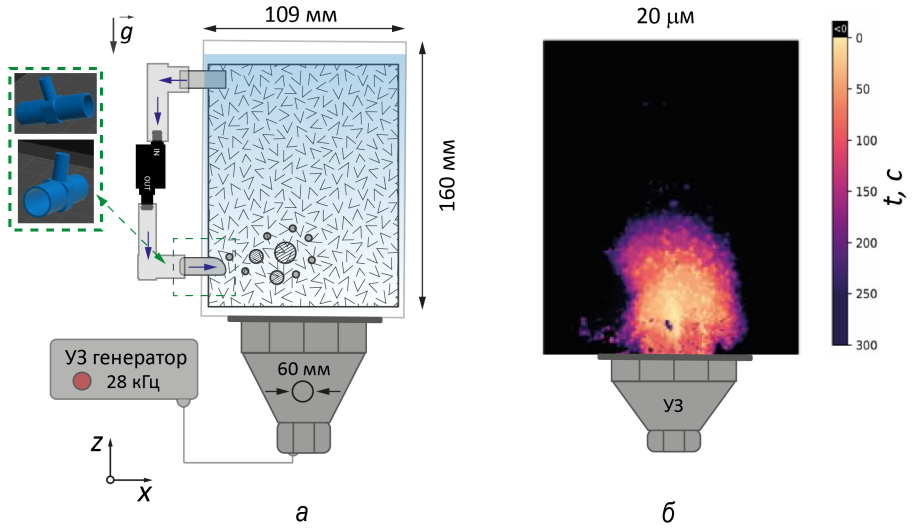


Рис. 1. Схема экспериментальной установки (*а*); карта активности кавитационных событий в вертикальной плоскости в проточном сонохимическом реакторе после 300 с ультразвукового воздействия в дистиллированной воде при наличии твёрдых полиамидных частиц диаметром 20 мм, потока жидкости и пузырьков (*б*)

Аэрация жидкости осуществлялась через трубки Вентури, встроенные в нижнюю часть двух противоположных стенок кюветы, что обеспечивало подачу пузырьков в область над излучателем. Циркуляция жидкости в контуре обеспечивалась насосом с объёмным расходом от 0 до 1.6 л/мин. Распределение пузырьков по диаметру имело среднее значение 1.27 мм, медиану 1.16 мм и стандартное отклонение 0.55 мм. Для исследования поля скорости применялись полиамидные частицы.

Экспериментальные данные, полученные с помощью установки, обрабатывались программой на языке Python, подробно описанной в [10]. Программа позволила получить карты кавитационной активности и провести исследование её распределения в жидкости, содержащей воздушные пузырьки и твёрдые включения, под действием ультразвука. Результаты работы представлены на рис. 1, *б*.

Результаты и обсуждение. Ранее в ходе численного моделирования изучалось распределение акустического давления в жидкости без газообразных включений. Сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными демонстрирует хорошее качественное соответствие [8].

При отсутствии пузырьков наблюдается классическая структура звукового поля в стоячей ультразвуковой волне с пятью узловыми линиями (рис. 2, *а*). Наибольшее акустическое давление в этом случае достигается вблизи излучателя и в пучностях вблизи боковых границ и составляет $p \approx 1.5 \cdot 10^5$ Па. Вблизи верхней границы формируется область отрицательного давления.

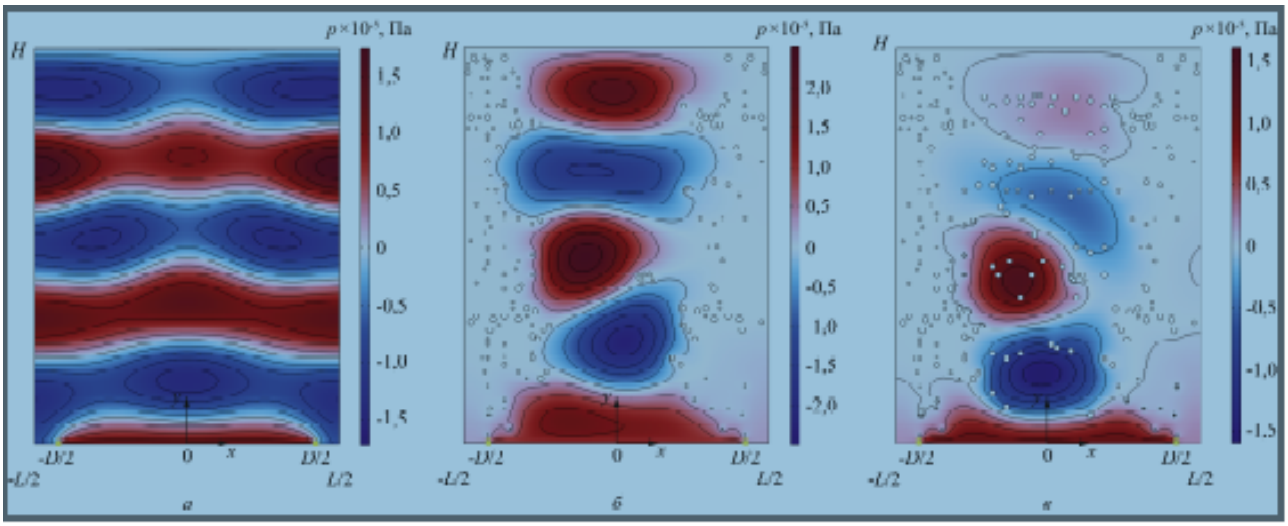


Рис. 2. Распределение акустического давления в жидкости: *а* – без включений, *б* – с газовыми пузырьками у боковых стенок без твёрдых частиц, *в* – с частицами диаметром $d = 2.0$ мм в центральной части полости в присутствии газовых пузырьков вблизи боковых стенок

В присутствии пузырьков у боковой границы (рис. 2, *б*), что соответствует экспериментальным наблюдениям, звуковое поле оказывается в основном сосредоточено в центральной части полости, при этом амплитуда колебаний акустического давления в звуковой волне повышается до $p \approx 2.4 \cdot 10^5$ Па. В области скопления пузырьков вблизи боковых границ наблюдается резкое уменьшение амплитуды давления – эффект акустического экранирования. При этом расчёты демонстрируют высокую чувствительность структуры звукового поля по отношению к изменению положения пузырьков. Так при смещении

отдельных пузырьков меняется характер распределения акустического давления вблизи нижней границы полости, а максимум давления в этом случае – $p \approx 1.5 \cdot 10^5$ Па.

Добавление твёрдых полиамидных частиц почти не сказывается на характере распределения акустического давления (рис. 2, *в*). Такой эффект может быть обусловлен изменением механизма взаимодействия звуковой волны с твёрдыми частицами за счёт малой разницы в величине акустического импеданса полиамида и воды. Моделирование стоячей ультразвуковой волны в жидкости с частицами различного размера при наличии скопления пузырьков у боковых границ полости показало, что присутствие частиц практически не вносит искажения в расположение пучностей и узлов в полости, однако оказывает существенное влияние на амплитуду давления в этих областях (рис. 3).

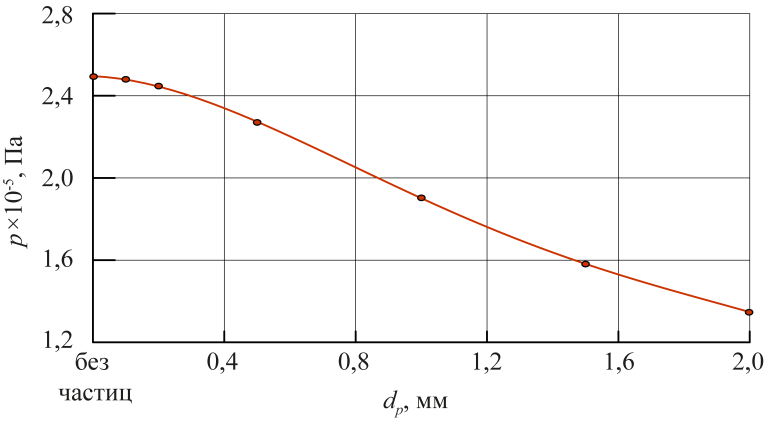


Рис. 3. Зависимость максимума акустического давления p от размеров твёрдых частиц в стоячей ультразвуковой волне при наличии газовых пузырьков у боковых границ полости

В экспериментах без течения фольга разрушается в четырёх вертикально разделённых зонах, что соответствует пучностям стоячей волны, продемонстрированным на рис. 2, *а*. При введении циркуляционного течения формируется единая куполообразная зона над излучателем, а площадь разрушения фольги увеличивается.

Аэрация в присутствии потока и твёрдых частиц приводит к формированию более острой и вытянутой зоны с более ранним началом эрозии (при $t < 20$ с), что объясняется локализацией акустической энергии в узкой области между излучателем и скоплением пузырьков (рис. 1, *б*).

Заключение. Разработана численная модель, учитывающая влияние газовых пузырьков и твёрдых частиц на акустическое поле в проточном сонохимическом реакторе. Показано, что включения с различным акустическим импедансом существенно модифицируют структуру стоячей волны: сокращают число узловых линий, изменяют амплитуду локального акустического давления и приводят к акустическому экранированию отдельных областей. Установлено качественное соответствие между расчётным распределением акустического давления и экспериментальными картами кавитационной активности. Циркуляционное течение является одним из факторов, определяющих пространственное распределение включений и, следовательно, локализацию кавитационных событий. Предложенная модель может быть использована для прогнозирования и оптимизации работы сонохимических реакторов.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-11-00269, https://rscf.ru/project/24-11-00269/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mason T. J., Vinatoru M. *Sonochemistry: fundamentals and evolution*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG. 2023. 269 p.
2. *Handbook of ultrasonics and sonochemistry*. Eds.: Ashokkumar M., Cavaliere F., Chemat F. [et al.] Singapore : Springer, 2016. 1487 p.
3. Suslick K. S., Flannigan D. J. *Inside a collapsing bubble: sonoluminescence and the conditions during cavitation*. Annual Review of Physical Chemistry. 2008. V. 59. P. 659–683.
4. Jamshidi R., Pohl B., Peuker U. A., Brenner G. *Numerical investigation of sonochemical reactors considering the effect of inhomogeneous bubble clouds on ultrasonic wave propagation*. Chemical Engineering J. 2012. V. 189–190. P. 364–375.
5. Su K., Li B., Wu J. [et al.] *Joint effects of gas bubbles and solid particles on sonochemical inhibition in sonicated aqueous solutions*. Ultrasonics Sonochemistry. 2023. V. 101. Art. 106717.
6. Servant G., Laborde J. L., Hita A. [et al.] *Spatiotemporal dynamics of cavitation bubble clouds in a low frequency reactor: comparison between theoretical and experimental results*. Ultrasonics Sonochemistry. 2001. V. 8. P. 163–174.
7. Tudela I., Saez V., Esclapez M. D. [et al.] *Simulation of the spatial distribution of the acoustic pressure in sonochemical reactors with numerical methods: a review*. Ultrasonics Sonochemistry. 2014. V. 21. P. 909–919.
8. Sboev I., Lyubimova T., Rybkin K. [et al.] *A numerical investigation of the effect of boundary conditions on acoustic pressure distribution in a sonochemical reactor chamber*. Fluid Dynamics & Materials Processing. 2024. V. 20. No. 6. P. 1425–1439.
9. Сбоев И. О., Любимова Т. П., Рыбкин К. А. *Численное исследование движения твердой частицы в поле ультразвуковой стоячей волны*. ВМСС. 2025. Т. 18. № 4. С. 433–450.
10. Kuchinskiy M., Lyubimova T., Rybkin K. [et al.] *Investigation of cavitation in NaCl solutions in a sonochemical reactor using the foil test method*. Fluid Dynamics & Materials Processing. 2024. V. 20. No. 5. P. 1093–1102.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ПОДВОДНОГО ТЕЛА С ЛЕДОВЫМИ ПЛАСТИНАМИ В ОБЛАСТИ ПОЛЫНЬИ

Т. А. Сибирякова

Алтайский государственный университет, Барнаул

Исследование волновых процессов в системе «жидкость – ледовый покров» представляет интерес для широкого круга задач гидроупругости, связанных с воздействием естественных и технологических нагрузок на ледовый покров. К числу таких воздействий относятся перемещения подводных аппаратов, колебания погруженных тел, движение судов подо льдом, а также локальные колебания и пульсации в жидкости. Возмущения, создаваемые подводным телом, могут распространяться в виде поверхностных и изгибно-гравитационных волн, вызывая прогибы и деформации ледовых пластин.

Особый интерес представляют конфигурации, описывающие разрывы ледового покрова. В природных условиях такие разрывы могут соответствовать полыньям, трещинам и каналам открытой воды между ледовыми областями. Наличие полыньи приводит к взаимодействию нескольких типов волн: волн свободной поверхности, распространяющихся в области открытой воды, и изгибно-гравитационных волн под ледовым покровом.

Для решения задач взаимодействия волн со свободной поверхностью и ледовыми пластинами широко применяется метод вертикальных мод [1]. Данный метод позволяет представить потенциал скорости жидкости в каждой горизонтальной области в виде разложения по собственным функциям, соответствующим свободной поверхности либо ледовому покрову. Неизвестные коэффициенты разложений определяются из условий сопряжения на границах между областями. Такой подход особенно удобен для задач, содержащих несколько участков свободной поверхности и ледовых пластин, поскольку позволяет учитывать отражение и передачу волн на свободных кромках.

Наряду с методом вертикальных мод для исследования гидроупругих колебаний ледовых пластин применяются и другие аналитические методы. В работе [2] в рамках линейной теории гидроупругости рассмотрена двумерная задача о волнах в ледовой пластине под действием нестационарной внешней нагрузки. Решение задачи построено с использованием преобразования Фурье, что позволило исследовать дисперсионные соотношения, фазовые и групповые скорости, а также прогибы ледового покрова. Показано влияние физических параметров ледовой пластины на характер распространения и затухания гидроупругих волн. Полученные результаты представляют интерес для анализа волнового отклика ледовых покровов при воздействии динамических нагрузок.

Рассматривается система, в которой область свободной поверхности, конечная ледовая пластина, полынья и полубесконечный ледовый покров расположены последовательно вдоль горизонтальной координаты. Воздействие подводного тела моделируется двумерным диполем с периодически изменяющейся интенсивностью. В неограниченной жидкости такая модель описывает малые поступательные колебания кругового цилиндра. Использование дипольной сингулярности позволяет рассматривать колебания тела в горизонтальном, вертикальном или произвольном направлении. Аналогичный подход к описанию волн, возбуждаемых движением диполя под ледовым покровом, использовался, например, в [3, 4]. Обзор исследований изгибно-гравитационных волн, возникающих под действием внешних нагрузок и погружённых источников, приведён в [5].

Постановка задачи. Рассматривается двумерное течение идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H. Вводится декартова система координат $O\widetilde{x}\widetilde{z}$, в которой ось $O\widetilde{x}$ направлена горизонтально, а ось $O\widetilde{z}$ – вертикально вверх. Невозмущённая поверхность жидкости совпадает с прямой $\widetilde{z} = 0$, а твёрдое непроницаемое дно расположено на глубине $\widetilde{z} = -H$.

По горизонтальной координате верхняя граница области жидкости разбивается на следующие участки:

- $-\infty < \widetilde{x} < -5\widetilde{L}/2$ – свободная поверхность,
- $-5\widetilde{L}/2 < \widetilde{x} < -\widetilde{L}/2$ – конечная ледовая пластина,
- $-\widetilde{L}/2 < \widetilde{x} < \widetilde{L}/2$ – полынья со свободной поверхностью,
- $\widetilde{L}/2 < \widetilde{x} < +\infty$ – полубесконечная ледовая пластина.

Таким образом, ширина полыньи равна $\widetilde{L}$, а длина конечной ледовой пластины – $2\widetilde{L}$. Края полубесконечного ледового покрова и конечной пластины при $\widetilde{x} = -5\widetilde{L}/2$, $\widetilde{x} = -\widetilde{L}/2$, $\widetilde{x} = \widetilde{L}/2$ предполагаются свободными.

Полубесконечный ледовый покров и конечная пластина моделируются тонкими упругими пластинами в рамках теории Кирхгофа – Лява. Предполагается, что обе пластины имеют одинаковые физические параметры: толщину h_i, плотность ρ_i, модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν.

Течение жидкости, вызванное осцилляциями подводного тела и колебаниями ледовых пластин, считается потенциальным. Подводное тело заменяется двумерным точечным диполем, расположенным в точке $(\widetilde{x}_0, \widetilde{z}_0)$, где $-H < \widetilde{z}_0 < 0$. Положение диполя не фиксируется и может соответствовать любой из четырёх областей: области свободной поверхности, области под конечной ледовой пластиной, полынье или области под полубесконечным ледовым покровом.

Решение ищется в виде установившихся гармонических колебаний с частотой ω:

$$\widetilde{\eta}(\widetilde{x}, t) = \mathrm{Re}[\eta_{sc}\eta(x)e^{-i\omega t}], \quad \widetilde{w}(\widetilde{x}, t) = \mathrm{Re}[w_{sc}w(x)e^{-i\omega t}],$$
$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}, \widetilde{z}, t) = Re[-i\omega\varphi_{sc}\varphi(x, z)e^{-i\omega t}].$$

Здесь $\widetilde{\eta}$ – отклонение свободной поверхности, $\widetilde{w}$ – вертикальный прогиб ледовых пластин, $\widetilde{\varphi}$ – потенциал скорости жидкости. Безразмерные координаты определяются соотношениями

$$\widetilde{x} = Hx, \quad \widetilde{z} = Hz, \quad \widetilde{L} = HL.$$

В качестве масштаба отклонения свободной поверхности берётся величина η_{sc}. В качестве масштаба прогиба пластин принимается $w_{sc} = \eta_{sc}$, а масштаб потенциала выбирается в виде $\varphi_{sc} = H\eta_{sc}$. В случае моделирования малых колебаний кругового цилиндра радиуса a с амплитудой A можно принять $\eta_{sc} = 2\pi Aa^2/H^2$.

Потенциал скорости жидкости $\varphi(x, z)$ определяется из уравнения Пуассона с учётом воздействия диполя

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = -\partial_{\vec{r}}[\delta(x - x_0)\delta(z - z_0)], \quad -\infty < x < +\infty, \quad -1 < z < 0,$$

где $\vec{r} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ – единичный вектор, задающий направление колебаний диполя, $\partial_{\vec{r}}$ обозначает производную по направлению вектора $\vec{r}$, α – угол между направлением осцилляций и положительным направлением оси Ox, $\delta(x - x_0), \delta(z - z_0)$ – дельта-функции.

На участках свободной поверхности выполняются условия

$$\eta + \gamma\varphi = 0, \quad \varphi_z = \eta, \quad x \in (-\infty, -5L/2) \cup (-L/2, L/2), \quad z = 0.$$

На участках, покрытых льдом, выполняются условия гидроупругого взаимодействия

$$-m\gamma w + \beta w_{xxxx} + w = \gamma\varphi, \quad \varphi_z = w, \quad x \in (-5L/2, -L/2) \cup (L/2, +\infty), \quad z = 0.$$

Безразмерные параметры задачи имеют вид

$$m = \frac{M}{\rho H}, \quad \gamma = \frac{\omega^2 H}{g}, \quad \beta = \frac{D}{\rho g H^4},$$

где

$$M = \rho_i h_i, \quad D = \frac{E h_i^3}{12(1-\nu^2)}.$$

На всех свободных краях ледовых пластин изгибающий момент и поперечная сила равны нулю

$$w_{xx} = 0, \quad w_{xxx} = 0, \quad x = -5L/2,\ x = -L/2,\ x = L/2.$$

На вертикальных границах между областями выполняются условия непрерывности потенциала и его производной по горизонтальной координате

$$[\varphi] = 0, \quad [\varphi_x] = 0, \quad x = -5L/2,\ x = -L/2,\ x = L/2, \quad -1 < z < 0.$$

На дне выполняется условие непроницаемости

$$\varphi_z = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad z = -1.$$

Таким образом, задача состоит в определении потенциала скорости φ, отклонений свободной поверхности η, прогибов w полубесконечного и конечного ледовых покровов, а также изгибающих деформаций, пропорциональных вторым производным прогибов по горизонтальной координате.

Метод решения. Для решения поставленной задачи используется метод вертикальных мод. Исследуемая область разделяется по горизонтальной координате на четыре участка: область свободной поверхности, область под конечной ледовой пластиной, полынью со свободной поверхностью и область под полубесконечным ледовым покровом. В каждой из этих областей потенциал скорости жидкости представляется в виде разложения по собственным вертикальным модам.

На участках свободной поверхности используются моды, соответствующие гравитационным волнам в жидкости конечной глубины. На участках под ледовыми пластинами используются моды изгибно-гравитационных волн, учитывающие инерционные и упругие свойства льда. В полынье и под конечной ледовой пластиной учитываются волны, распространяющиеся в обоих горизонтальных направлениях. Необходимость учёта волн, распространяющихся в обоих направлениях, обусловлена отражением волн от свободных краев полубесконечного покрова и конечной пластины, а также взаимодействием волн внутри системы.

Коэффициенты модовых разложений определяются из условий сопряжения на вертикальных границах между областями. В точках $x = -5L/2$, $x = -L/2$ и $x = L/2$

обеспечивается непрерывность потенциала скорости жидкости и его производной по горизонтальной координате. Кроме того, на свободных краях ледовых пластин задаются условия отсутствия изгибающего момента и поперечной силы. Эти условия позволяют учесть свободное движение кромок льда.

Если осциллирующий диполь находится внутри одной из рассматриваемых областей, соответствующая область дополнительно разделяется вертикальной линией, проходящей через точку расположения диполя. В этой точке вводятся условия скачка для потенциала или его производных, получаемые из уравнения Пуассона. Вид условий зависит от направления колебаний диполя, для горизонтальных и вертикальных колебаний правые части системы различаются.

Для диполя, колеблющегося в произвольном направлении, решение строится как линейная комбинация решений для горизонтально и вертикально ориентированных диполей. Это позволяет исследовать влияние угла колебаний подводного тела на амплитуды прогибов и изгибные деформации ледовых пластин. В частности, построенное решение позволяет определить положение и направление осцилляций диполя, при которых достигаются максимальные изгибные деформации ледового покрова. Кроме того, численный анализ позволяет исследовать влияние частоты колебаний, положения диполя, ширины полыньи, длины конечной пластины и направления осцилляций на гидроупругий отклик системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2024–2026) (госзадание FZMW-2024-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Evans D. V., Porter R. *Wave scattering by narrow cracks in ice sheets floating on water of finite depth.* J. of Fluid Mechanics. 2003. V. 484. P. 143–165.
2. Сибирякова Т. А., Найденова К. Е., Шишмарев К. А. *Гидроупругие волны в пористой ледовой пластине.* Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2025. № 4. С. 3–16.
3. Stepanyants Y. A., Sturova I. V. *Waves on a compressed floating ice caused by motion of a dipole in water.* J. of Fluid Mechanics. 2021. V. 907. Art. A7.
4. Shishmarev K., Sibiryakova T., Naydenova K., Khabakhpasheva T. *Dipole oscillations along principal coordinates in a frozen channel in the context of symmetric linear thickness of porous ice.* J. of Marine Science and Engineering. 2024. V. 12. No. 2. Art. A198.
5. Стурова И. В., Ткачева Л. А. *Поведение плавающего ледяного покрова под действием внешних нагрузок (обзор).* Прикладная механика и техническая физика. 2025. Т. 66. № 3. С. 3–55.

МНОГОФАЗНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АМПЛИФИКАЦИИ ДНК ПРИ КОНВЕКЦИОННОЙ ПЦР

Р. Р. Сираев, В. Ю. Уточкин, Д. А. Брацун

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Открытие полимеразной цепной реакции (ПЦР) произвело революцию в деле изучения генетических образцов и развитии генной инженерии. Метод представляет собой многократное избирательное копирование определённых участков нуклеиновой кислоты в лабораторных условиях. Для приложений важно, что копируются только короткие участки ДНК, которые удовлетворяют заданным условиям. Один цикл ПЦР включает проведение трёх последовательных этапов: денатурацию имеющихся в образце молекул при $95 \div 97\,^{\circ}\mathrm{C}$, отжиг концов участков при $50 \div 60\,^{\circ}\mathrm{C}$ и, наконец, синтез (элонгацию) участков ДНК при $72 \div 77\,^{\circ}\mathrm{C}$. Процесс идёт в неподвижном растворе, помещённом в массивный термоблок. Получение необходимой концентрации генетического материала требует проведения тысяч однотипных термоциклов и занимает несколько часов.

С начала 2000-х годов в клиническую практику активно внедряется технология конвекционной ПЦР, которая использует естественную тепловую конвекцию в качестве ускорителя ПЦР [1]. В этом случае раствор с молекулами ДНК помещается в миниатюрный чип, который подогревается снизу. За счёт механизма термогравитационной конвекции горячая жидкость поднимается вверх, охлаждается и затем опускается обратно. Этот непрерывный циркуляционный поток заставляет молекулы ДНК проходить последовательно через три зоны с разной температурой, в которых протекают реакции денатурации, отжига и синтеза. Таким образом, конвекционная ПЦР не требует громоздкого оборудования для программирования термоциклирования, позволяет проводить диагностику за считанные минуты и протекает в капиллярном микрочипе, что особенно важно для экспресс-анализа в полевых условиях. Достоинства метода привели к его широкому распространению в инфекционной диагностике, криминалистике и судебной медицине, а также генетических исследованиях.

Основная идея метода заключается в том, чтобы возбудить в кювете нужный по скоростным и температурным характеристикам конвективный вихрь, который берёт на себя работу программируемого термоциклера в обычной ПЦР. Это означает, что принципиальной частью метода конвекционной ПЦР является предварительное математическое моделирование процессов конвективного массопереноса в заданной кювете для точного установления структуры течения и распределения температур в потоке. Абсолютное большинство работ, посвящённых моделированию конвекционной ПЦР, исходит из предположения, что раствор ДНК является истинным раствором. Поэтому за основу берётся однофазная модель (ОФ), в которой движение растворителя описывается уравнением Навье – Стокса, дополненным уравнениями реакции–диффузии–конвекции для концентраций фракций ДНК. Такой подход обосновывается тем, что стандартная задача реакции–диффузии–конвекции (или диффузии–конвекции) для примеси обычно рассматривается в рамках ОФ-описания. Почему такого описания КПЦР может быть недостаточно? Типичная молекула ДНК, даже в виде обрывков, включает десятки тысяч пар нуклеотидов. Такие макромолекулы, как правило, обладают особыми свойствами диффузии и собственной инертностью. Кроме того, конечной целью конвекционной ПЦР является эффективная амплификация нуклеиновых кислот, то есть концентрация молекул ДНК в кювете

со временем растёт. Всё это приводит к тому, что раствор может начать вести себя как дисперсная среда. Рассматривая молекулы ДНК в качестве дисперсионной фазы, можно учесть ряд эффектов, которые при стандартном описании опускаются. Например, термодиффузия молекул ДНК может быть достаточно велика, а инертность молекул на фоне растворителя может проявить себя при внешнем силовом воздействии на раствор. Учитывая эти соображения, авторами ранее был предложен подход к описанию конвекционной ПЦР на основе многофазной модели жидкой среды [2, 3].

В данной работе проводится численное исследование и сравнение результатов моделирования конвекционной ПЦР для двумерных конвективных течений в простейшей прямоугольной ячейке, предложенной ранее для методики, как базовой [1]. Используется модель многофазных потоков на основе описания Эйлера, в рамках которой молекулярные фракции и растворитель представлены в качестве взаимопроникающих континуумов [3]. Модель учитывает эффект термодиффузии. Численные результаты сравниваются со стандартным описанием в рамках однофазной модели, представленным в [1].

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-11-00338, https://rscf.ru/project/25-11-00338/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Allen J. W., Kenward M., Dorfman K. D. *Coupled flow and reaction during natural convection PCR*. Microfluid. Nanofluidics. 2009. V. 6. P. 121–130.
2. Сираев Р. Р. *Моделирование конвективной полимеразной цепной реакции на основе Лагранжева метода транспорта частиц для многофазных сред*. Вычислительная механика сплошных сред. 2025. Т. 18. № 3. С. 307–318.
3. Сираев Р. Р., Брацун Д. А. *Эйлеров метод моделирования дисперсных систем на примере полимеразной цепной реакции*. Российский журнал биомеханики. 2025. Т. 29. № 4. С. 196–206.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА С УЧЁТОМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

И. В. Смолехо

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В работе приведена статическая модель слоя жидкого кристалла, построенная на основе упрощённой динамической постановки в акустическом приближении [1] и учитывающая влияние механических, температурных и ориентационных полей, включающая систему уравнений для давления, касательных напряжений, угла поворота молекул, температуры и перемещений.

Для решения задачи разработан вычислительный алгоритм, реализованный программно. Поля давлений и касательных напряжений определяются из интегральных уравнений, полученных с использованием теории функций комплексного переменного [2]. На границах бесконечного слоя жидкого кристалла задаются распределения давления и касательного напряжения, которые должны удовлетворять условиям равновесия внешних сил, вытекающим из формулы Грина. Численное решение строится на основе квадратурной формулы прямоугольников, что позволяет свести исходные интегральные уравнения к системе линейных алгебраических уравнений. Распределение угла поворота молекул находится из уравнения Пуассона, правая часть которого определяется найденным касательным напряжением. Уравнение аппроксимируется конечно-разностной схемой на пятиточечном шаблоне. На всех границах прямоугольной расчётной области задаются однородные условия Дирихле, что соответствует закреплению ориентации молекул на границах слоя. Анизотропное уравнение теплопроводности, коэффициенты которого зависят от ранее вычисленного угла ориентации, решается с применением девятиточечной разностной схемы. На границе области задаются смешанные граничные условия: на участках с источниками тепла — условия Дирихле с фиксированными значениями температуры, на остальных — условия Неймана (теплоизоляция). Компоненты вектора перемещений определяются из системы уравнений, сводимых к уравнениям Пуассона. Эти уравнения аппроксимируются пятиточечной разностной схемой, граничные условия задаются в виде жёсткого закрепления — нулевые перемещения на всей границе расчётной области. На всех этапах сформированные системы линейных алгебраических уравнений решаются прямым методом на основе LU-разложения разреженных матриц.

На рис. 1, а представлены линии уровня давления $p(x, y)$. В центральной области слоя реализуется растяжение ($p < 0$), тогда как вблизи боковых границ наблюдается сжатие ($p > 0$). На рис. 1, б изображены линии уровня касательного напряжения $q(x, y)$ — величина знакопеременна, что указывает на наличие сдвиговых деформаций противоположных знаков. Конфигурация линий уровня угла поворота молекул $\theta(x, y)$ (рис. 2, а) обусловлена именно этим знакопеременным характером распределения $q(x, y)$. На рис. 2, б изображено температурное поле, сформированное под действием локальных источников на границах. На всей нижней границе поддерживается температура 35 °C, на всей верхней — 18 °C. Левая граница нагрета до 30 °C, правая — до 23 °C. На рис. 3, а и 3, б приведены линии уровня компонент перемещений u_1 и u_2 соответственно.

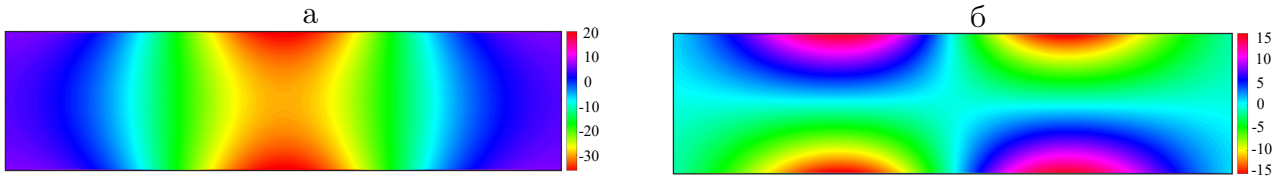


Рис. 1. Линии уровня давления p (а) и касательного напряжения q (б), [Па]

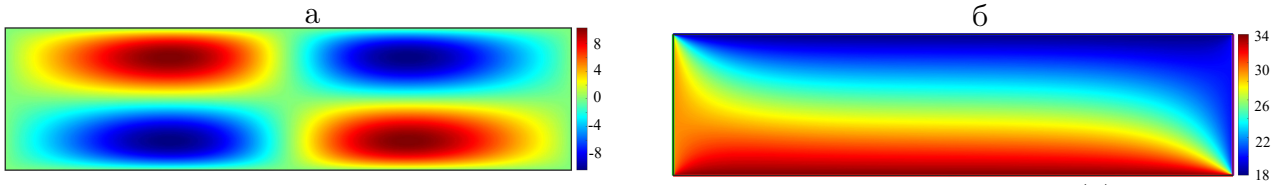


Рис. 2. Линии уровня угла поворота θ [°] (а) и температуры T [°C] (б)

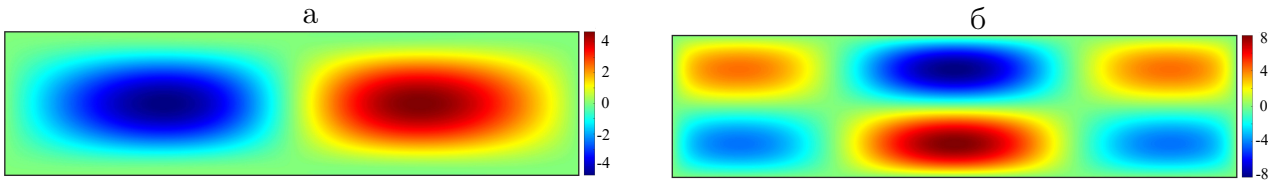


Рис. 3. Линии уровня компонент перемещений u_1 (а) и u_2 (б), [мкм]

Предложенный вычислительный алгоритм корректно описывает взаимосвязанные термомеханические поля в слое жидкого кристалла и подтверждает свою работоспособность на серии тестовых расчётов.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2026-735).

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский В. М., Садовская О. В., Смолехо И. В. *Моделирование динамики жидкого кристалла под действием слабых возмущений.* Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. № 1 (365). С. 193–206.
2. Смолехо И. В. *Алгоритм решения уравнений статики жидких кристаллов.* Успехи кибернетики. 2025. Т. 6. № 4. С. 114-120.

ГИДРОДИНАМИКА В ПЕРЕМЕННЫХ ВНЕШНИХ ПОЛЯХ: НЕУСТОЙЧИВОСТИ, РЕЗОНАНСЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Б. Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Обсуждается проявление параметрического резонанса в однородных и комплексных гидродинамических системах под действием переменных внешних полей: вибрационных, тепловых, электромагнитных. Уделено внимание особенностям проявления общих законов параметрического резонанса в конкретных случаях: рябь Фарадея, конвекция в молекулярных жидкостях и бинарных смесях, коллоидных суспензиях, электроконвекция в слабопроводящих жидкостях и жидких кристаллах, модели солнечного динамо.

Конкуренция механизмов переноса нейтральной или заряженной примеси в постоянном внешнем поле может приводить к возникновению колебательной неустойчивости с частотой нейтральных колебаний ω_0. При модуляции внешнего поля (гравитационного, теплового, электромагнитного) с частотой Ω в распределённой гидродинамической системе существование колебательных состояний порождает большее разнообразие вариантов проявления резонансного отклика этих систем по сравнению с классическим уравнением Матьё [1]. Среди них: конкуренция квазипериодических и периодических мод (тепловая конвекция смеси спирт – вода, термоэлектроконвекция); ситуация, когда возмущения синхронного отклика ($\Omega = \omega_0$) более опасны и вызывают неустойчивость механического равновесия (конвекция Марангони в переменном тепловом поле). Последняя прямо противоположна классическому примеру параметрического резонанса [1], известному каждому с детства на примере раскачивания качелей: наименьшая амплитуда воздействия, вызывающая неустойчивость, соответствует частоте $\Omega = 2\omega_0$ (субгармонический резонанс).

Особо следует отметить системы и условия, при которых субгармонический резонанс *не существует*: вибрационная конвекция в горизонтальном слое при продольных вибрациях [2, 3], электроконвекция в слабопроводящих жидкостях [4] и жидких кристаллах, электроосмотические течения в переменных полях, конвекция магнитной жидкости в переменном магнитном поле. Эти результаты связаны со свойствами симметрии конкретных гидродинамических систем относительно трансляции во времени на период внешнего воздействия $T = 2\pi/\Omega$ и могут быть обоснованы математически строго (например, [3]). Оказывается, что при этом в соседних синхронных областях параметрического резонанса типы отклика отличаются относительно поведения при трансляционной симметрии на половину периода внешнего воздействия $T/2 = \pi/\Omega$ [4].

В случае высоких частот воздействия резонансные явления отсутствуют, а на первый план выступают осреднённые эффекты. В обратном предельном случае низких частот неустойчивость определяется с помощью метода Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна.

Обсуждается также нелинейная эволюция и бифуркационные диаграммы конвективных колебательных течений. Благодаря квадратичной нелинейности гидродинамических систем, в спектрах их отклика на внешнее воздействие присутствуют собственная частота ω_0 и её комбинации с частотой изменения внешнего поля Ω: $\Omega \pm \omega_0$. В системе могут сформироваться: 1) бегущие волны, модулированные по амплитуде и фазе (частоты Ω и ω_0 несоизмеримы, квазипериодический отклик); 2) модулированная конвекция синхронного отклика ($\Omega = \omega_0$); 3) стоячие волны ($\Omega/2 = \omega_0$, синхронный отклик) либо 4) хаотические колебательные режимы. При этом незначительное изменение внешних условий может приводить к неожиданному и интересному изменению поведения гидродинамической системы

и процессов переноса в ней. Как и в случае маятника с колеблющейся точкой подвеса [5] модуляция параметра может стабилизировать неустойчивые состояния, причём не только механическое равновесие, но и нелинейные режимы стоячих волн (случай конвекции смеси спирт – вода или термоэлектроконвекции).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: Т. I. Механика.* М. : Физматлит, 2004. 216 с.
2. Гершуни Г. З., Келлер И. О., Смородин Б. Л. *О вибрационно-конвективной неустойчивости в невесомости; конечные частоты.* Доклады РАН. 1996. Т. 348. № 2. С. 194–196.
3. Or A. C., Kelly R. E. *The effects of thermal modulation upon the onset of Marangoni – Benard convection.* J. of Fluid Mechanics. 2002. V. 456. P. 161–182.
4. Smorodin B. L., Gershuni G. Z., Velarde M. G. *On the parametric excitation of thermoelectric instability in a liquid layer open to air.* Int. J. of Heat and Mass Transfer. 1999. V. 42. No. 16. P. 3159–3168.
5. Капица П. Л. *Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.* ЖЭТФ. 1951. Т. 21. № 5. С. 588–597.

ВЛИЯНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ НА РЕЖИМЫ КОНВЕКЦИИ ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ И НЕЛИНЕЙНОМ ПОВЕРХНОСТНОМ НАТЯЖЕНИИ

И. В. Степанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В работе представлены результаты теоретического исследования испарительной конвекции в двухслойной системе «бинарная жидкость – парогазовая смесь» на основе точного решения сопряжённой краевой задачи. Математическая модель построена в рамках двустороннего подхода с использованием уравнений Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска, дополненных уравнениями тепломассопереноса с учётом термодиффузии в обеих фазах. Геометрия задачи представляет собой узкий протяжённый горизонтальный канал с твёрдыми непроницаемыми стенками $y = -h_1$ и $y = h_2$, заполненный двухкомпонентной жидкостью и смесью фонового газа с парами испаряющегося компонента нижнего слоя. Межфазная граница $y = 0$ считается недеформируемой.

Ключевой особенностью модели является учёт квадратичной зависимости поверхностного натяжения от концентрации испаряющегося компонента

$$\sigma(T^1, C^1) = \sigma_0 - \sigma_T(T^1 - T_0) - \sigma_{C1}(C^1 - C_0) - \sigma_{C2}(C^1 - C_0)^2, \qquad (1)$$

которая аппроксимирует экспериментальные данные [1] для водно-спиртовых растворов в диапазоне температур $T^1 \in [15°\mathrm{C}, 30°\mathrm{C}]$ и концентраций $C^1 \in [0.5, 1.0]$. В правой части формулы (1) выражения в скобках означают отклонения температуры и концентрации нижнего слоя от соответствующих равновесных величин T_0, C_0. Выбор квадратичной зависимости $\sigma(T^1, C^1)$ принципиально отличает данную постановку от классических моделей с линейным $\sigma(T^1)$ и позволяет корректно описывать концентрационно-капиллярные эффекты, возникающие вследствие изменения состава бинарной смеси при испарении.

Подробные постановки краевой задачи приведены в работах [2–4], где рассмотрены различные варианты замыкающих соотношений и построены решения в конечных формулах на основе анзаца Остроумова – Бириха для каждой постановки. Для апробации решения использовалась система «водно-спиртовый раствор – смесь паров этанола и азота», толщины слоёв варьировались от 1 до 8 мм, тепловая нагрузка на стенках канала и расход газа изменялись согласно условиям эксперимента [5].

Проведённый на основе построенных решений анализ позволил установить следующие закономерности влияния управляющих параметров на режимы конвекции и интенсивность испарения в указанной системе сред.

Состав жидкости (концентрация этанола C_0) является фундаментальным параметром, определяющим баланс термо- и концентрационно-капиллярных сил. Установлено, что зависимость массовой скорости испарения $M(C_0)$ немонотонна: максимум достигается при $C_0 = 0.6$, а при дальнейшем увеличении концентрации M уменьшается вследствие возникновения диффузионного сопротивления – повышения парциального давления паров этанола в приповерхностном слое, что подавляет градиент концентрации и снижает движущую силу массопереноса. Показано, что термодиффузия формирует приповерхностный слой с пониженной концентрацией

этанола в жидкости и его накоплением в более нагретой области. Однако количественное влияние эффекта Соре на M не превышает 1 %. Рост концентрации насыщенного пара C_* усиливает диффузионное сопротивление, снижая интенсивность течения в газовой фазе и ограничивая рост массовой скорости испарения.

Толщина слоя жидкости h_1 – геометрический параметр, влияющий на соотношение вязких и капиллярных сил. Зависимость $M(h_1)$ немонотонна, положение экстремума зависит от C_0: для $C_0 \geq 0.5$ максимум достигается при $h_1 = 3$ мм, для $C_0 \leq 0.4$ сдвигается к $h_1 = 4$ мм, что объясняется увеличением поверхностного натяжения в растворах меньшей концентрации, требующем большей толщины жидкого слоя для преодоления капиллярных сил. С ростом h_1 происходит перестройка течения от чисто термокапиллярного к смешанному режиму течения.

Расход газовой фазы q – гидродинамический управляющий параметр. Увеличение q усиливает испарение за счёт снижения парциального давления пара в приграничном слое, но одновременно ослабляет термокапиллярный эффект вследствие охлаждения межфазной поверхности, что приводит к формированию теплового пограничного слоя в окрестности поверхности раздела с пониженной температурой. Конкуренция сдвиговых напряжений и термокапиллярных сил определяет структуру профиля скорости: при малых q доминирует термокапиллярное течение, направленное против градиента температуры, при больших q – сдвиговое течение, сонаправленное потоку газа. Использование интегрального условия для расхода газа позволяет адаптировать модель к условиям эксперимента и решать обратную задачу определения градиента температуры на стенке A_1 по измеренному q.

Тепловая нагрузка на стенках (горизонтальные и вертикальные градиенты температуры) управляет интенсивностью механизмов течения и испарения. Рост горизонтального градиента увеличивает температуру границы раздела, что стимулирует рост скорости и интенсивность испарения. Вертикальный перепад температуры не изменяет топологию течения, но влияет на перестройку температурного поля и изменение поля концентрации. В частности, возможно формирование хемоклина, поперечный размер и положение которого зависят от степени неоднородности температурного поля в поперечном направлении и расположения точки максимума температуры.

Сравнение с экспериментальными данными [5] демонстрирует качественное согласие по основным характеристикам: росту M с увеличением q, формированию теплового приграничного слоя, зависимости структуры течения от управляющих параметров. Количественные расхождения обусловлены двумерностью модели, пренебрежением деформацией межфазной границы и неоднородностью рабочей жидкости.

Предложенный подход, основанный на применении точных аналитических решений, представляет собой эффективный инструмент для предварительной параметрической оценки режимов испарительной конвекции, верификации численных алгоритмов и оптимизации рабочих параметров теплообменников, использующих испаряющиеся бинарные жидкости для отвода тепла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стабников В. Н., Ройтер И. М., Процюк Т. Б. *Этиловый спирт.* М. : Изд-во «Пищевая промышленность», 1976. 272 с.

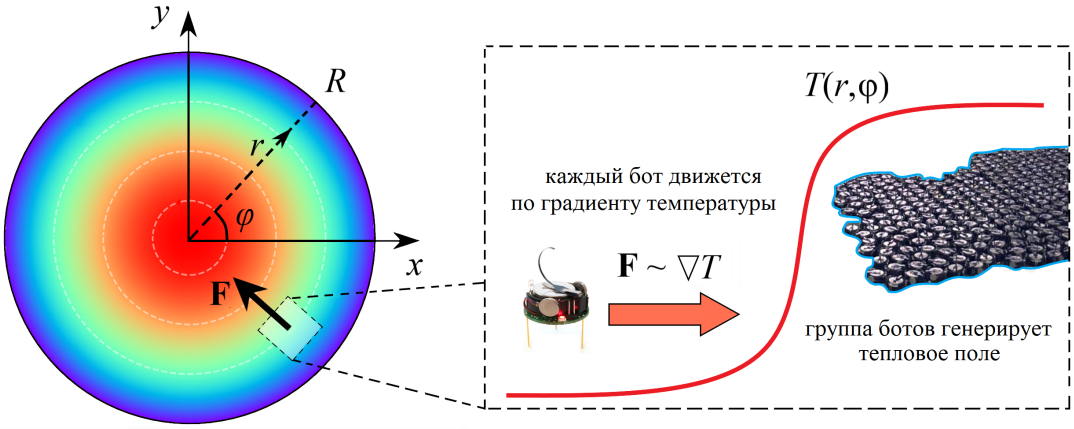
2. Bekezhanova V. B., Stepanova I. V. *Mathematical modeling of concentration influence on evaporative convection in a bilayer system of binary mixtures.* Int. J. of Heat and Fluid Flow. 2024. V. 107. Art. 109385.
3. Stepanova I. V. *On influence of channel geometry on evaporative convection at nonlinear distribution of surface tension of evaporating liquid.* Int. J. of Non-Linear Mechanics. 2025. V. 175. Art. 105121.
4. Bekezhanova V. B., Stepanova I. V. *The effect of gas flow rate on evaporative convection in a multicomponent bilayer system subjected to linear boundary heating.* Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2026. V. 261. Art. 128594.
5. Lyulin Yu. V., Kabov O. A. *Thermal effect in the evaporation process from the interface of the horizontal liquid layer under a shear gas flow.* Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2023. V. 11. No. 1. P. 55–64.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИХ МИКРОРОБОТОВ

В. Ю. Уточкин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Активные среды представляют собой системы, состоящие из самодвижущихся и взаимодействующих между собой элементов. Их изучение позволяет глубже понять процессы самосборки, в которых относительно простые элементы спонтанно объединаются в паттерны со сложной архитектурой. Примеры таких процессов включают биоконвекцию бактерий, движущихся вдоль градиента кислорода [1], фототаксис некотрых растений [2] и даже коллективное поведение высших животных [3]. Искусственный объект, работающий по определённому алгоритму, также может быть элементом активной среды. Процессы самоорганизации в среде взаимодействующих микроботов изучались во множестве работ. В частности, была предложена недорогая биотехнология для создания самодвижущихся киборгов на основе бактерий, управляемых извне [4]. Было показано, что создание большого роя миниатюрных управляемых роботов возможно на практике. В работе [5] среда из сотен ботов, запрограммированных с помощью определённого простого алгоритма связи, демонстрировала структуры, аналогичные наблюдающимся в процессах реакции – диффузии.



В настоящей работе теоретически исследуется эффект спонтанного перехода плотной группы ботов от неподвижного состояния к макроскопической коллективной циркуляции. Каждый робот является источником тепла и движется в направлении глобального градиента температуры, что моделируется как эффективная сила плавучести. Построена сплошносредная математическая модель, описывающая рой как самогравитирующий пористый диск с внутренним тепловыделением (см. рисунок). Уравнения движения в приближении Дарси – Буссинеска имеют вид

$$\nabla^2\Psi - G\frac{\partial\Theta}{\partial\phi} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\,J(\Theta,\Psi) = \nabla^2\Theta + G\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\,, \tag{2}$$

где Ψ и Θ – возмущения функции тока и температуры вблизи состояния механического равновесия, $J(f, g)$ – якобиан в цилиндрических координатах (r, ϕ), а безразмерный параметр G отвечает за мощность источников тепла.

Ранее в работе [6] в рамках линейного анализа было показано, что при достижении управляющим параметром критического значения $G = 13.21$ равновесие теряет устойчивость. Ветвление решений вблизи данной бифуркации было исследовано методом многих масштабов. Ввиду наличия у системы группы симметрии SO (2), от неподвижной точки ответвляется сразу однопараметрическое семейство стационарных режимов с амплитудой $\sim \sqrt{G}$. Поскольку авторы [6] не фокусировались на поведении решений вдали от первичной неустойчивости, данная работа призвана заполнить этот пробел. Прямое численное моделирование показывает, что с ростом управляющего параметра система демонстрирует существенное усложнение режимов циркуляции. Равновесие сменяется стационарной конвекцией, затем периодической, а при дальнейшем увеличении параметра наблюдаются субгармонические и касательные бифуркации предельных циклов, ведущие к хаосу.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (грант № FSNM-2025-0001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hillesdon A. J., Pedley T. J. *Bioconvection in suspensions of oxytactic bacteria: linear theory.* J. Fluid Mech. 1996. V. 324. P. 223–259.
2. Giometto A., Altermatt F., Maritan A. [et al.] *Generalized receptor law governs phototaxis in the phytoplankton Euglena gracilis.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2015. V. 112. No. 22. P. 7045–7050.
3. Sumpter D. J. *Collective animal behavior.* Princeton, USA : Princeton University Press. 2010. 312 p.
4. Leaman E. J., Geuther B. Q., Behkam B. *Hybrid centralized/decentralized control of a network of bacteria-based bio-hybrid microrobots.* J. Micro-Bio Robot. 2019. V. 15. No. 1. P. 1–12.
5. Slavkov I., Carrillo-Zapata D., Carranza N. [et al.] *Morphogenesis in robot swarms.* Sci. Robot. 2018. V. 3. No. 25. Eaau9178.
6. Bratsun D., Kostarev K. *Phase transition in a dDense swarm of self-propelled bots.* Fluid Dynamics & Materials Processing. 2024. V. 20. No. 8. P. 1785–1798.

ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ЖЁСТКОГО ШТАМПА МАЛЫХ РАЗМЕРОВ. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ.

А. Г. Фатьянов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Введение. Постановка динамической задачи для жёсткого штампа хорошо известна [1]. В работе [2] разработан алгоритм решения этой задачи для однородной упругой среды путём сведения к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) эрмитового типа. Для штампа больших и средних размеров r_0 число обусловленности матрицы системы было порядка 10^9. Однако добиться устойчивости при вычислении решения можно было, использовав метод Холецкого (открытый софт в МГУ). В случае штампов малых размеров (вибрационные задачи) получить таким способом решение невозможно. Возникает сильная низкочастотная помеха. Для исследования этого явления сначала рассмотрена динамическая плоская задача о вдавливании жёсткого штампа малых размеров для статики ($\omega = 0$). Аналитически показано, что число обусловленности задачи стремится к бесконечности при размере штампа r_0, стремящемся к нулю. Таким образом, искомая задача является сильно некорректной для штампа малых размеров r_0 – известный факт в литературе [1].

В работе [3] отмечается важность исследования механизма возникновения неустойчивости. В данной работе получено явное решение динамической плоской задачи о вдавливании жёсткого штампа малых размеров для статики ($\omega = 0$). Поскольку оно является разрывным, то возникает эффект Гиббса, что выявляет физическую природу некорректности задачи. Методы подавления эффекта Гиббса хорошо известны [4]. С их помощью разработан метод регуляризации данной задачи. Достоверность нового метода подтверждена на основе известного и наиболее широко применяемого метода регуляризации Тихонова. Для этого использовался открытый софт в МГУ по решению СЛАУ методом Тихонова.

Применительно к вибрационным исследованиям в случае штампа малых размеров получено приближённое аналитическое решение возникающей СЛАУ. Решение строится на основе работы [5]. Созданы программы расчёта волновых полей, которые могут быть реализованы на персональных компьютерах с распараллеливанием OpenMP. Сравнение полученного аналитического решения с прямым решением СЛАУ показало совпадение с точностью до третьего знака после запятой. В результате моделирования получен новый физический эффект. У поверхностной волны Релея для источника типа штампа уменьшается видимая частота. Этот эффект наблюдается при реальных вибрационных исследованиях. Наблюдаемая на практике низкочастотность волны Релея в настоящее время объясняется зоной выветривания, неоднородностями в верхней части геологического разреза и т. п. [6].

Постановка задачи. В работе рассматривается задача определения вектора упругого смещения $V = (u_r(r,z,t), u_z(r,z,t))$ для осесимметрической задачи в цилиндрической системе координат [1]:

$$LV = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\,. \tag{1}$$

Начальные данные:

$$V = \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Краевые условия:

$$u_z|_{z=0} = f(t) \ \text{ при } \ r \le r_0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0 \ \text{ при } \ r > r_0, \tag{3}$$

$$\tau_{rz}|_{z=0} = 0. \tag{4}$$

В (1)–(4) L – матричный дифференциальный оператор Ламе для однородной среды, $r_0 \sim 0$ – радиус жёсткого штампа, $f(t)$ – входной импульс и $F(\omega)$ – его спектр, σ_{zz}, τ_{rz} – нормальные и касательные напряжения. Единственное физически верное решение (1)–(4) выделяется на основе [2,7].

Решение (1)–(4) строится с помощью преобразований Фурье – Бесселя:

$$\begin{aligned} u_z(z,r,t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_z(z,k_m,\omega_n)J_0(k_m r)\beta_m e^{i\omega_n t}, \\ u_r(z,r,t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_r(z,k_m,\omega_n)J_1(k_m r)\beta_m e^{i\omega_n t}. \end{aligned} \tag{5}$$

В (5) k_m, ω_n – пространственные и временны́е частоты, $J_0(x), J_1(x)$ – функции Бесселя, k_m – корни уравнения $J_0(ax) = 0$, $\beta_m = 2/a^2 J_1^2(k_m a)$, a и T – границы расчётной области по r и t.

С помощью результатов [2] формируется СЛАУ для определения функции ϕ_m:

$$\sum_m (q_n^* q_m a_{nm} + p_n^* p_m b_{nm})\beta_m \phi_m = q_n^* \cdot F(\omega) \cdot J_0(k_n r_0) = q_n^* \cdot F(\omega) \cdot f_n. \tag{6}$$

Применительно к вибрационным задачам размер сейсмоисточника (штампа) всегда значительно меньше длины волны. Рассмотрим случай штампа малого радиуса r_0. В СЛАУ (6) сделаем замену переменных

$$w_m = q_m \beta_m \phi_m.$$

В этом случае (6) примет компактный вид:

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m + \gamma_n^{-1} w_n = F(\omega) f_n. \tag{7}$$

Решение СЛАУ (7), следуя [5], получено на поверхности $z = 0$ в явном аналитическом виде:

$$w_n = F(\omega)\frac{\gamma_n}{1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_n f_m} f_n = c \cdot F(\omega)\gamma_n f_n, \tag{8}$$

где

$$c = \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m f_m\right)^{-1}, \quad \gamma_n = \chi_n \chi_n^* \beta_n > 0,$$

$$\chi_n = \frac{\omega^2 \nu_p}{2V_s^2 R}, \quad \beta_n = k_n^2 - \frac{\omega^2}{2V_s^2}, \quad R = b_n^2 - k_n^2\sqrt{k_n^2 - \frac{\omega^2}{V_p^2}}\,\sqrt{k_n^2 - \frac{\omega^2}{V_s^2}}.$$

В итоге решение в физической области (r,t) получается с использованием (5).

Выводы. Сравнение решений СЛАУ (6) и аналитического решения (8) для штампа малого размера r_0 показало совпадение с точностью до третьего знака после запятой. Решение СЛАУ осуществлялось по методу Холецкого. Это подтверждает корректность сведения системы (6) к виду (7) и правильность полученного аналитического решения (8). Однако в решении присутствует сильная низкочастотная помеха.

Для выяснения причины появления помехи сначала рассмотрен статический случай ($\omega = 0$), для которого аналитически показано, что число обусловленности СЛАУ (7) при малых r_0 стремится к бесконечности. Таким образом, данная задача является сильно некорректной.

Аналитически показано, что матрица системы (7) является положительно определенной матрицей полного ранга. В этом случае для получения решения не нужна дополнительная информация [3]. Тем самым получено аналитическое решение (8) данной сильно некорректной задачи и разработан метод её регуляризации без привлечения какой-либо дополнительной информации.

Работа выполнена по госзаданию ИВМиМГ СО РАН № FWNM-2025-0004.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешка В. А., Глушков В. Е., Зинченко Ж. Ф. *Динамика неоднородных линейно-упругих сред.* М. : Наука. 1989. 343 с.
2. Fatyanov A. G. *Seismic wave fields for the rigid stamp in elastic medium.* Comput. Math. Model. 2025. V. 37. Iss. 1. P. 70–78.
3. Воеводин В. В. *Вычислительные основы линейной алгебры.* М. : Наука. 1977. 303 с.
4. Хемминг Р. В. *Цифровые фильтры.* М. : Недра. 1987. 221 с.
5. Fatyanov A. G. *Sommerfeld's method for solving the dynamic rigid stamp indentation problem.* J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2025. V. 18. No. 3. P. 300–308.
6. Чичинин И. С. *Вибрационное излучение сейсмических волн.* М. : Недра. 1984. 224 с.
7. Зоммерфельд А. *Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики.* М. : ИЛ, 1950. 456 с.

О ФИЛЬТРАЦИОННОМ ГОРЕНИИ ПОРИСТЫХ СРЕД ПРИ НАЛИЧИИ ПРИМЕСЕЙ ПЛАВЯЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

С. С. Фецов, Н. А. Луценко

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

Всё большую значимость для мирового технологического развития приобретают редкоземельные металлы. Значительные количества таких металлов находятся в отходах нефтепереработки и углеотходах [1], однако они, как правило, не используются, так как содержатся в чрезмерно малых концентрациях, при которых используемые сегодня методы извлечения неэффективны. В [2] была экспериментально показана принципиальная возможность использования волны фильтрационного горения для извлечения соединений металлов малых концентраций из металлсодержащей шихты в летучие продукты сгорания и их перенос из высокотемпературной зоны в низкотемпературную с последующей конденсацией в более высокой концентрации.

Настоящая работа посвящена разработке теоретических основ технологии извлечения металлов методом фильтрационного горения, созданию средств моделирования и исследованию закономерностей этого процесса. В качестве первого этапа рассмотрено фильтрационное горение пористой металлсодержащей шихты при температурах ниже точки испарения металлов, чтобы отдельно исследовать влияние плавления и кристаллизации на параметры волны горения. Предложена новая модель, основанная на концепции взаимодействующих взаимопроникающих континуумов. Модель реализована в пакете OpenFOAM. Основные уравнения решаются с помощью итерационного вычислительного алгоритма на основе конечно-объёмной дискретизации и метода SIMPLE [3]; его главная идея – построение разностной схемы из условия точного сохранения массы в каждой ячейке расчётной сетки. Модель прошла успешную валидацию [4], для которой использовались результаты экспериментов по горению гранулированной смеси берёзового активированного угля и технического сапфира [5].

Расчёты показали, что присутствие металлических примесей приводит к увеличению скорости волны горения. При этом температура в зоне реакции либо повышается, либо понижается в зависимости от теплофизических параметров примеси: теплопроводности, объёмной теплоёмкости, теплоты фазового перехода. Плавление и кристаллизация вызывают понижение температуры в зоне горения, а в некоторых случаях могут снизить скорость распространения волны горения.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 26-71-00074, https://rscf.ru/project/26-71-00074/. Результаты получены с использованием оборудования ЦКП «Дальневосточный вычислительный ресурс» ИАПУ ДВО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салганский Е. А., Цветков М. В., Кадиев Х. М. [и др.] *Редкие и ценные металлы в нефтях и углях РФ: содержание и методы извлечения (обзор).* ЖПХ. 2019. Т. 92. № 12. С. 1514–1533.
2. Розенберг А. С., Лемперт Д. Б., Григорян Л. А. [и др.] *Массоперенос металлсодержащих продуктов при фильтрационном горении в режимах со сверхадиабатическим разогревом* Доклады АН. 2005. Т. 405. № 4. С. 493–496.

3. Патанкар С. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.* М. : Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
4. Fetsov S. S., Lutsenko N. A., Borovik K. G. *Effect of phase transitions on combustion of porous carbon-containing media with melting metal impurities.* Int. J. Multiph. Flow. 2026. V. 202. Art. 105824.
5. Амелин И. И., Салганский Е. А., Волкова Н. Н. [и др.] *Область существования стационарной волны фильтрационного горения в шихте с малым содержанием углерода.* Изв. РАН. 2011. № 6. С. 1125–1132.

О ТЕНЗОРНОСТИ ХИМИЧЕСКОГО СРОДСТВА В ХЕМОМЕХАНИКЕ

А. Б. Фрейдин, Е. В. Михеев

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Настоящая работа посвящена развитию концепции тензора химического сродства при описании локализованных и объёмных химических реакций в деформируемом твёрдом теле. Рассматривается реакция между диффундирующим и твёрдым компонентами, которая сопровождается собственной деформацией превращения, порождающей напряжения, зависящие также от положения неизвестного фронта реакции в случае локализованной реакции или от распределённой по телу степени превращения при объёмной реакции. Реакция также сопровождается изменением модулей упругости и реологических свойств твёрдых компонентов (упругий материал может превратиться в вязкоупругий или упругопластический). Напряжения, в свою очередь, влияют на скорость реакции и могут ускорять или замедлять реакцию вплоть до её блокирования. Важными для инженерных приложений примерами реакций такого типа являются реакция окисления кремния, формирование интерметаллидов в припоях на основе олова, литизация кремния в литий-ионных батареях. Исследования эволюции напряжённо-деформированного состояния во взаимосвязи с протеканием химической реакции важно также с точки зрения описания сопутствующих процессов разрушения. Некоторые ссылки на соответствующие экспериментальные и теоретические работы приведены, например, в обзорных разделах статей [1, 2].

Постановка связанной квазистатической задачи «диффузия – химия – механика» включает уравнение диффузии, уравнения механического равновесия, граничные и начальные условия, определяющие соотношения для диффузионного потока и компонентов реакции и замыкающее уравнение, определяющее зависимость скорости реакции от концентрации диффундирующего компонента и механических напряжений. В классической физической химии термодинамической силой, определяющей скорость реакции, является химическое сродство A, которое получается как множитель при скорости реакции ω в выражении для плотности производства энтропии $P[S]$ [3, 4]:

$$TP[S] = A\omega, \tag{1}$$

где T – температура.

Полученное Де Донде выражение для химического сродства равно линейной комбинации химических потенциалов μ_k компонентов реакции. Например, для реакции вида

$$n_1\mathrm{B}_1 + \mathrm{n}_2\mathrm{B}_2 \;\rightarrow\; \mathrm{n}_3\mathrm{B}_3, \tag{2}$$

где B_1, B_2, B_3 – химические формулы компонентов реакции, n_1, n_2, n_3 – стехиометрические коэффициенты, химическое сродство

$$A = n_1M_1\mu_1 + n_2M_2\mu_2 - n_3M_3\mu_3, \tag{3}$$

где M_1, M_2, M_3 – молярные массы компонентов реакции.

Выражение для производства энтропии даёт основание для формулировки определяющего соотношения в виде зависимости скорости реакции от сродства, например [5],

$$\omega = kc\left[1 - \exp\left(-\frac{A}{RT}\right)\right], \tag{4}$$

где R – универсальная газовая постоянная.

Подчеркнём, что как выражения для химических потенциалов, полученные Гиббсом при рассмотрении равновесия фаз, так и химическое сродство, являлись скалярными величинами, введёнными при рассмотрении процессов в газообразных или жидких фазах.

В 80-х годах XX века при рассмотрении фазовых переходов в деформируемых телах было осознано, что химический потенциал является тензорной величиной (см., например, обсуждение в [6] или [7]). Тензорность химпотенциала связана с тензорностью тензора напряжений и, как следствие, с тем, что в случае твёрдого тела необходимо говорить не просто о равновесии фаз в точке межфазной границы, а о равновесии фаз на ориентированной площадке, проходящей через точку тела. Было показано, что тензор химпотенциала определяется тензором энергии-импульса Эшелби. Это, в свою очередь, позволило описывать распространение межфазных ганиц в рамках механики конфигурационных сил. Вывод о тензорности химического потенциала был также сделан в [8]. В случае гидростатического напряжённого состояния тензор химпотенциала становится шаровым, то есть определяется скалярной величиной.

В работе [9] в результате рассмотрения эволюции фронта химической реакции между твёрдым деформируемым и диффундирующим компонентами было показано, что плотность диссипации энергии вследствие распространения фронта реакции равна произведению скорости реакции на ориентированной площадке фронта на нормальную компоненту тензора $\mathbf{A}$, который имеет такой же вид как классическое скалярное сродство, если заменить в нём скалярные химпотенциалы тензорными. Этот тензор выполняет роль сродства, но тензорного. Важно отметить, что при выводе фомулы тензора химического сродства использовались только фундаментальные балансы массы, импульса, момента импульса, энергии и второй закон термодинамики в виде неравенства Клаузиуса – Дюгема без привлечения каких-либо определяющих соотношений компонентов реакции и законов диффузии. Было только объявлено, что реакция идёт на ориентированной площадке, подобно тому как в теории напряжений Коши постулируется, что части тела взаимодействуют через ориентированные площадки. Было сформулировано кинетическое уравнение в виде зависимости скорости реакции $\omega[\mathbf{N}]$ на площадке с нормалью $\mathbf{N}$ от нормальной компоненты A_{NN} тензора сродства, аналогичное классическому уравнению (4):

$$\omega[\mathbf{N}] = kc\left(1 - \exp\frac{A_{NN}}{RT}\right). \tag{5}$$

При этом напряжения влияют на скорость реакции и, следовательно, на скорость распространения фронта реакции, через тензор сродства. На примере решения задач была продемонстрирована конкуренция химических и механических факторов, определяющих протекание реакции.

При выводе формулы тензора сродства, как и при решении задач о распространении фронта реакции, предполагалось, что диффундирующий компонент может находиться только в превращенном материале. В настоящем докладе, следуя недавней работе [10], для обобщения понятия тензора химического сродства на случай диффузии в обоих материалах – превращённом и непревращённом – используется параметр извлекаемости диффундирующего компонента из исходного материала $\beta \in [0; 1]$, определяющий относительный вклад в реакцию диффундирующих частиц по разные стороны фронта реакции. Показы-

вается, что в этом случае для реакции

$$n_-\mathrm{B}_- + \mathrm{n}_*\mathrm{B}_* \;\rightarrow\; \mathrm{n}_+\mathrm{B}_+,$$

где B_-, B_+ и B_* – химические формулы твёрдых и диффундирующего компонентов соответственно, тензор химического сродства в квазистатическом приближении принимает вид

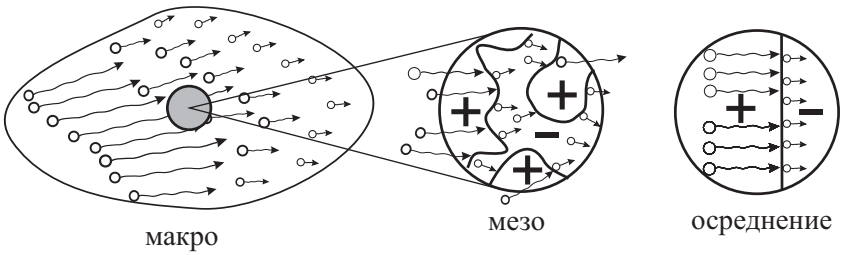
$$\mathbf{A} = n_-M_-\mathbf{M}_- - n_+M_+\mathbf{M}_+ + n_*M_*\big[(1-\beta)\mu_+^* + \beta\mu_-^*\big]\mathbf{I}, \tag{6}$$

где тензоры химического потенциала твёрдых компонентов $\mathbf{M}_-$ и $\mathbf{M}_+$ равны тензорам Эшелби, делённым на плотности материала:

$$\mathbf{M}_- = f_-\mathbf{I} - \frac{1}{\overset{\mathrm{o}}{\rho}_-}\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{F}}{}_-^T\cdot\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{S}}_-, \quad \mathbf{M}_+ = f_+\mathbf{I} - \frac{1}{\overset{\mathrm{g}}{\rho}_+}\overset{\mathrm{g}}{\mathbf{F}}{}_+^T\cdot\overset{\mathrm{g}}{\mathbf{S}}_+, \tag{7}$$

$\overset{\mathrm{o}}{\rho}_-$ и $\overset{\mathrm{g}}{\rho}_+$ – плотности исходного и превращенного твёрдых материалов в их отсчётных конфигурациях, то есть ненапряженных состояниях, f_- и f_+ – массовые плотности свободных энергий Гельмгольца исходного и превращённого материалов, $\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{F}}_-$ и $\overset{\mathrm{g}}{\mathbf{F}}_+$ – градиенты деформаций исходного и превращённого материалов относительно их отсчётных конфигураций, $\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{S}}_-$ и $\overset{\mathrm{g}}{\mathbf{S}}_+$ – соответствующие тензоры напряжений Пиолы – Кирхгофа, μ_+^* и μ_-^* – химические потенциалы диффундирующего компонента, находящегося в превращённом и исходном материалах.

Рассмотрена модельная задача о химическом превращении деформируемого твёрдого тела в постановке плоской деформации с плоским фронтом химической реакции. Исследовано влияние внешних деформаций и параметра β на распространение фронта. Показана немонотонность зависимости процесса эволюции фронта от параметра β.



Этот случай позволяет перейти к рассмотрению объёмных реакций, которые на мезоуровне представляются набором локализованных реакций. После осреднения это приводит к «скрытой» тензорности скалярного сродства и в случае объёмных реакций. При этом степень превращения играет роль параметра фазового поля, а «эффективная нормаль» в данной макроточке определяется градиентом степени превращения. Таким образом, приходим к выводу, что в деформируемом теле реакция, даже кажущаяся объёмной, всегда идёт на ориентированных площадках. В случае объёмной реакции эти площадки проявляют себя на мезоуровне. Протекание реакции именно на ориентированных площадках предопределяет тензорность химического потенциала и химического сродства.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-11-00274, https://rscf.ru/project/25-11-00274/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Freidin A. B., Vilchevskaya E. N. *Chemical affinity tensor in coupled problems of mechanochemistry.* In: Altenbach H., Öchsner A. (eds.) Encyclopedia of Continuum Mechanics. Berlin, Heidelberg : Springer, 2019.
2. Morozov A., Freidin A. B., Müller W. H. *On stress-affected propagation and stability of chemical reaction fronts in solids.* Int. J. of Engineering Science. 2023. V. 189. Art. 103876.
3. De Donder T. *Thermodynamic theory of affinity: a book of principles.* Oxford : Oxford University Press, 1936. 144 p.
4. Пригожин И., Дефей Р. *Химическая термодинамика.* Пер. с англ. Новосибирск : Наука, 1976. 503 с.
5. Гленсдорф П., Пригожин И. *Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.* М. : Мир, 1973. 503 с.
6. Гринфельд М. А. *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений.* М. : Наука, 1990. 312 с.
7. Фрейдин А. Б. *О конфигурационных силах в механике фазовых и химических превращений.* Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86. № 4. С. 571–583.
8. Русанов А. И. *Термодинамические основы механохимии.* СПб. : Наука, 2006.
9. Freidin A. B. *Chemical affinity tensor and stress-assist chemical reactions front propagation in solids.* In: ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. V. 9: Mechanics of Soids, Structures and Fluids. Art. V009T10A102. San Diego, California, USA, 2013.
10. Фрейдин А. Б. *О тензоре химического сродства в хемомеханике деформируемых тел.* Вестник ПНИПУ. Механика. 2025. № 5. С. 155–167.

ЗАДАЧИ О ГИПЕРУПРУГОМ ТЕЛЕ С ОТСЛАИВАЮЩИМИСЯ ЖЁСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ НЕВЫПУКЛЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ДЕФОРМАЦИИ

А. И. Фурцев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются нелинейные задачи для гиперупругого тела, содержащего жёсткие включения при наличии отслоений на части межфазной границы между включениями и окружающей их средой. Под жёстким понимается включение, не подверженное деформированию [1, 2]. Нелинейность задач обусловлена физической и геометрической неоднородностью определяющего соотношения гиперупругого материала, а также наличием невыпуклых ограничений на множество допустимых деформаций: условия сохранения ориентации (локального), см. [1–3], условия глобальной инъективности (нелокального), см. [2], и контактных условий. В качестве основных принимаются вариационные постановки в виде задач минимизации функционала энергии. К основным результатам относятся доказательство теорем существования решений и анализ предельного перехода по параметру жёсткости включения, позволяющий строго обосновать модель абсолютно жёсткого включения как предел модели деформируемого включения.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-71-00061, https://rscf.ru/project/25-71-00061/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фурцев А. И. *Задача о равновесии гиперупругого тела с жестким включением и трещиной с условиями непроникания.* Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21. № 1. С. 17–40.
2. Furtsev A., Rudoy E., Sazhenkov S. *On hyperelastic solid with thin rigid inclusion and crack subjected to global injectivity condition.* Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2024. V. 382. No. 1. Art. 20240115.
3. Фурцев А. И. *Задача о равновесии гиперупругого тела с трещиной, примыкающей к границе под нулевым углом.* Математические заметки СВФУ. 2026. Т. 33. № 1. С. 56–70.

ПРИМЕНЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МГНОВЕННОГО ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН В УСЛОВИЯХ РАСТЯЖЕНИЯ

К. Д. Хряпенко, А. Л. Григорьева

Комсомольский-на-Амуре государственный университет

Прогнозирование процессов трещинообразования в металлических конструкциях является одной из фундаментальных задач механики деформируемого твёрдого тела. Традиционные численные методы, в частности метод конечных элементов, сталкиваются с принципиальными трудностями при моделировании мгновенного разрушения, которое характеризуется отсутствием упругой стадии и локализацией пластического течения в узких зонах скольжения. Проблемы сходимости, необходимость постоянного перестроения сетки и высокие вычислительные затраты при отслеживании эволюционирующих границ дефектов стимулируют поиск альтернативных подходов [1, 2].

В последние годы значительный интерес вызывают методы машинного обучения, интегрирующие физические законы в процесс обучения нейронных сетей. Физически информированные нейронные сети (ФИНС) позволяют преодолеть ограничения классических сеточных методов [3], заменяя конечно-разностные схемы аппаратом автоматического дифференцирования. Однако стандартные архитектуры ФИНС ориентированы на гладкие поля решений и плохо адаптированы для задач с разрывными кинематическими полями и жёсткими энергетическими критериями разрушения [4, 5].

Целью работы является разработка и численная верификация специализированной архитектуры ФИНС для решения задач мгновенного трещинообразования в жёсткопластических пластинах, основанной на кинематике Оната – Прагера и вариационном принципе минимакса.

Математическая постановка задачи. Мгновенный характер разрушения в рассматриваемой модели интерпретируется посредством исключения упругой стадии деформирования. Пластическое течение локализуется в зонах скольжения непосредственно после достижения предела текучести, а зарождение трещины определяется локальным энергетическим балансом на линиях разрыва скоростей. Кинематика процесса описывается схемой Оната – Прагера, согласно которой пластическая область разбивается на треугольные зоны с однородным напряжённым состоянием, разделённые линиями разрыва, ориентированными под специфическими углами к оси растяжения. Переход к локализованному разрыву носит скачкообразный характер и активируется при совместном выполнении условия пластичности в сечении. Разрушение обусловлено накоплением пластической работы в узких полосах сдвига. Критерий инициирования трещины формулируется как достижение порогового уровня удельной диссипации энергии на линии разрыва:

$$W = W^* \quad \text{или эквивалентно} \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i^*, \tag{1}$$

где W – объёмная мощность диссипации; W^* – материальная константа разрушения; ε_i и ε_i^* – текущая и предельная главные деформации. Константы W^* и ε_i^* калибруются через стандартные пластические характеристики (относительное удлинение и относительное сужение сечения).

При достижении порога вершина дефекта движется со скоростью c под углом γ к оси распространения, кинематически связанной со скоростью растяжения V, пределом текучести при сдвиге k и геометрией скольжения. Минимальная скорость устойчивого роста реализуется при угле, обеспечивающем максимум работы до разрыва:

$$c = \frac{V}{\sqrt{2}\sin\gamma\,(W^*/k - 1)}\,. \tag{2}$$

Физическая определённость задачи, допускающей бесчисленное множество решений, вводится вариационным принципом минимакса:

$$\delta W_{\text{дис}} = 0, \quad W_{\text{дис}} \;\to \max_{\text{по полю}}, \quad W_{\text{дис}} \;\to \min_{\text{по смещениям линий}}. \tag{3}$$

Архитектура физически информированной сети. Для аппроксимации разрывных полей и эволюционирующих границ проектируется ансамбль из трёх специализированных подсетей, синхронное обучение которых гарантирует физическую согласованность кинематики и топологии дефекта (рис. 1).

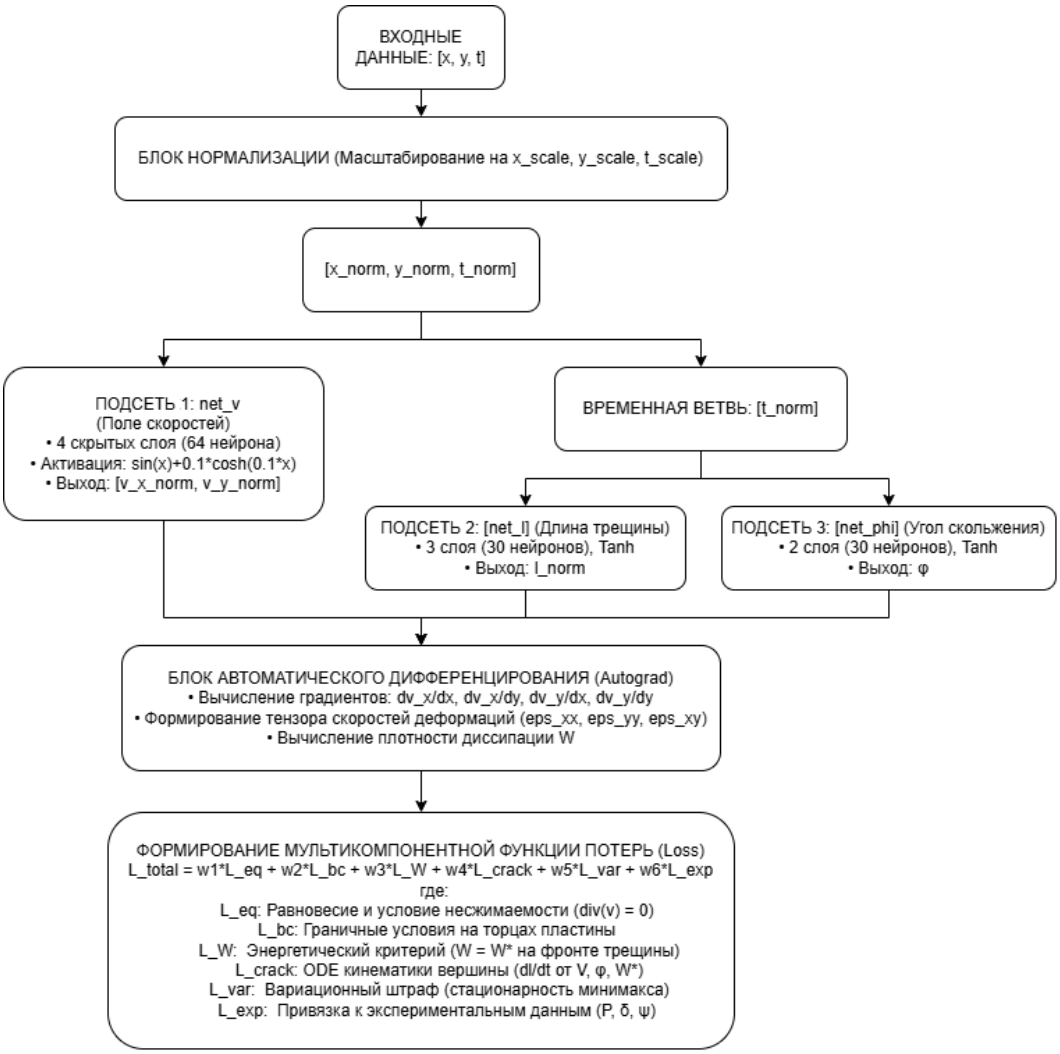


Рис. 1. Блок-схема архитектуры ФИНС

Первая подсеть восстанавливает поле скоростей. Входными данными выступают нормализованные пространственные координаты и время. Архитектура включает четыре скрытых слоя по 64 нейрона в каждом. Ключевой особенностью является применение комбинированной периодически-гиперболической функции активации:

$$f(z) = \sin(z) + 0.1\cosh(0.1z). \tag{4}$$

Использование стандартных кусочно-линейных или сигмоидальных функций активации приводит к «размытию» скачков на линиях скольжения. Синусоидальная компонента позволяет сети эффективно аппроксимировать высокочастотные градиенты, характерные для разрывных полей, а гиперболический косинус предотвращает затухание градиентов на этапах глубокого обучения. Выходной слой формирует две компоненты вектора скорости.

Вторая и третья подсети отслеживают эволюцию геометрических параметров дефекта во времени. Вторая подсеть аппроксимирует длину трещины и содержит три скрытых слоя по 30 нейронов с функцией активации в виде гиперболического тангенса. Третья подсеть вычисляет угол ориентации линий скольжения и состоит из двух скрытых слоёв по 30 нейронов с аналогичной активацией. Входным параметром для обеих сетей выступает нормализованное время.

Формирование функции потерь. Целевая функция представляет собой взвешенную суперпозицию шести компонент, каждая из которых кодирует определённый физический закон или условие задачи:

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 + \lambda_4 L_4 + \lambda_5 L_5 + \lambda_6 L_6, \tag{5}$$

где λ_i – весовые коэффициенты, подбираемые методами балансировки весов, $i = 1, ..., 6$; L_1 – обеспечивает выполнение уравнений равновесия и условия пластичности; L_2 – учитывает граничные условия на торцах пластины; L_3 – отклонение от энергетического критерия зарождения трещины (1) на фронте разрушения; L_4 – контролирует выполнение кинематического соотношения (2) для скорости вершины трещины; L_5 – реализует вариационный принцип (3) в виде штрафа за отклонение от седловой точки функционала диссипации; L_6 – обеспечивает согласование с экспериментальными данными испытаний на растяжение и используется для идентификации констант разрушения [4, 5].

Численная верификация и результаты. Вычислительные эксперименты проводились для прямоугольной пластины из стали марки 15-5PH размером 10 см на 5 см. Материальные константы, полученные из экспериментальных данных: предел текучести при сдвиге, критическая диссипация. Обучение сети осуществлялось в течение 5000 эпох с использованием алгоритма адаптивного изменения шага обучения (начальный шаг, коэффициент затухания каждые 2000 эпох). Размер пакета данных составлял 256 точек. Для стабилизации градиентов применялось ограничение их нормы.

В процессе эволюции дефекта были выявлены три ключевых этапа, качественно и количественно описанные моделью (см. табл. 1, 2).

Анализ динамики поля диссипации демонстрирует плавный переход от равномерного течения к локализованному разрыву и последующее торможение трещины на финальной стадии. Результаты согласуются с аналитическим решением Оната – Прагера для угла линий скольжения (отклонение менее 5 %), что подтверждает физическую непротиворечивость гибридного подхода.

Таблица 1. Детальное описание состояний пластины

Состояние пластины	Описание
1. Момент достижения предела текучести, рис. 2	Напряжённо-деформированное состояние и диссипация равны нулю, линии скольжения неактивны. Сеть демонстрирует нулевые значения невязок по всем физическим компонентам.
2. Локализация (начало растяжения), рис. 3	Формируется шейка, вдоль линий Оната – Прагера фиксируется скачок деформаций. Угол раскрытия трещины максимален из-за высокого отношения скоростей. Нейронная сеть корректно воспроизводит линии скольжения Оната – Прагера без явного указания их положения в обучающей выборке.
3. Предразрушение, рис. 4	На фоне экстремального утонения сечения глобальная нагрузка падает, что приводит к снижению скорости растяжения. В результате, согласно кинематическому соотношению, скорость вершины трещины замедляется, а угол раскрытия стремится к минимуму. Финальный разрыв происходит по траектории, обеспечивающей максимальную диссипацию.

Таблица 2. Сравнение показателей состояния пластины

Состояние	Накопленная пласт. деформация	Диссипация	Относ. нагрузка	Скорость трещины, м/с	Угол раскрытия, град
1. Момент достижения предела текучести	0,00	0,00	1,00	0,00	-
2. Начальное растяжение	0,18	0,35	0,92	1,31	52,7
3. Предразрушение	0,55	0,92	0,58	0,06	3,5

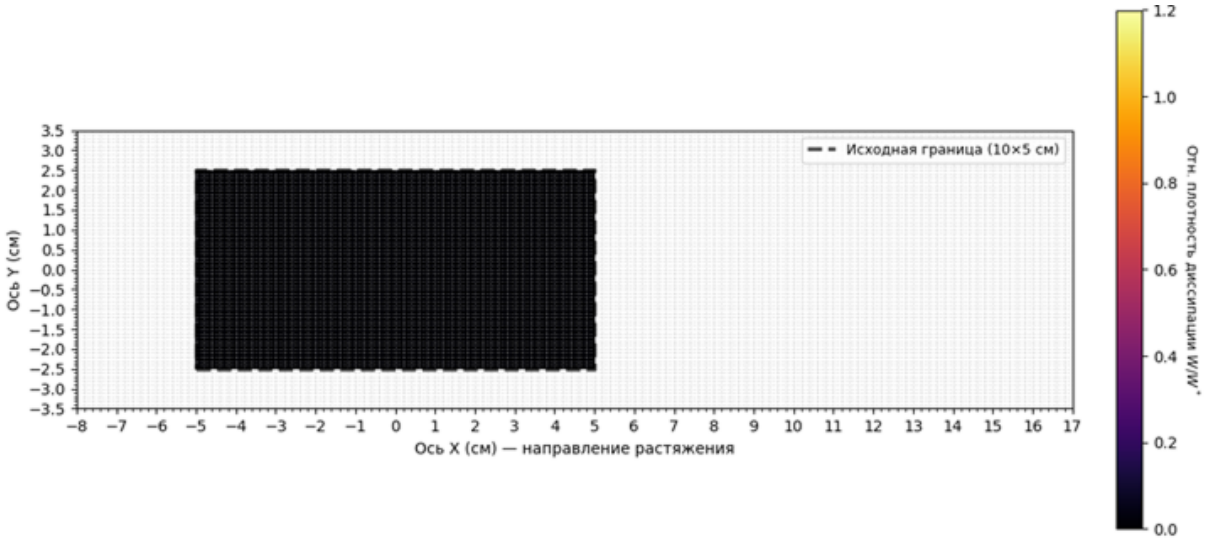


Рис. 2. Состояние пластины в момент достижения предела текучести (напряжение и удлинение отсутствуют)

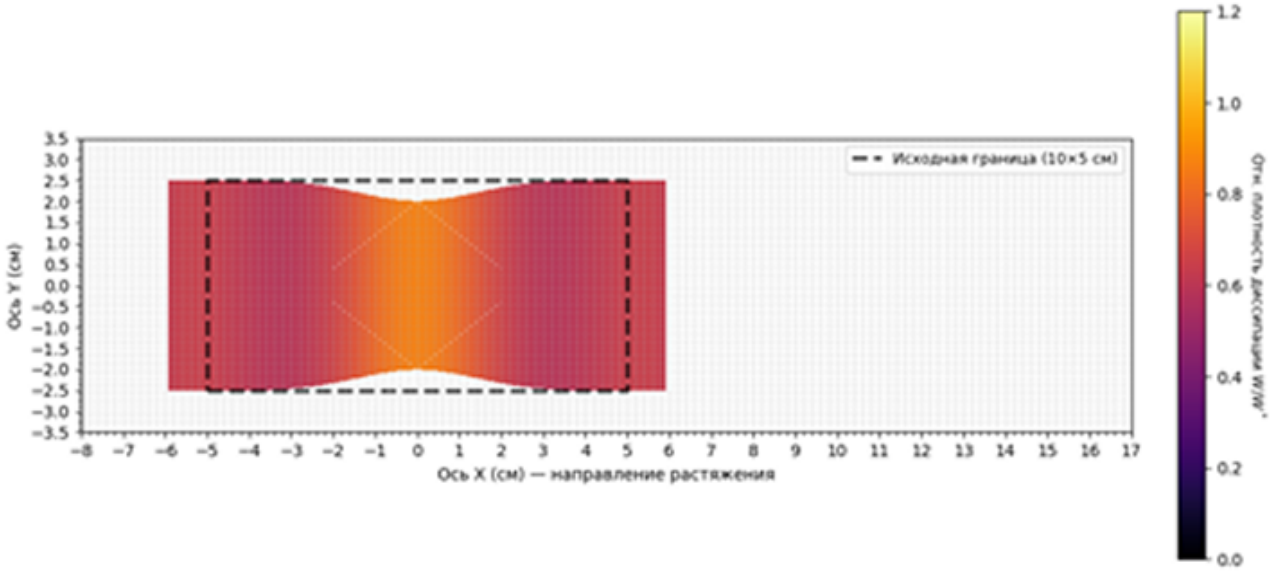


Рис. 3. Состояние пластины с начальным растяжением (локализация удлинения)

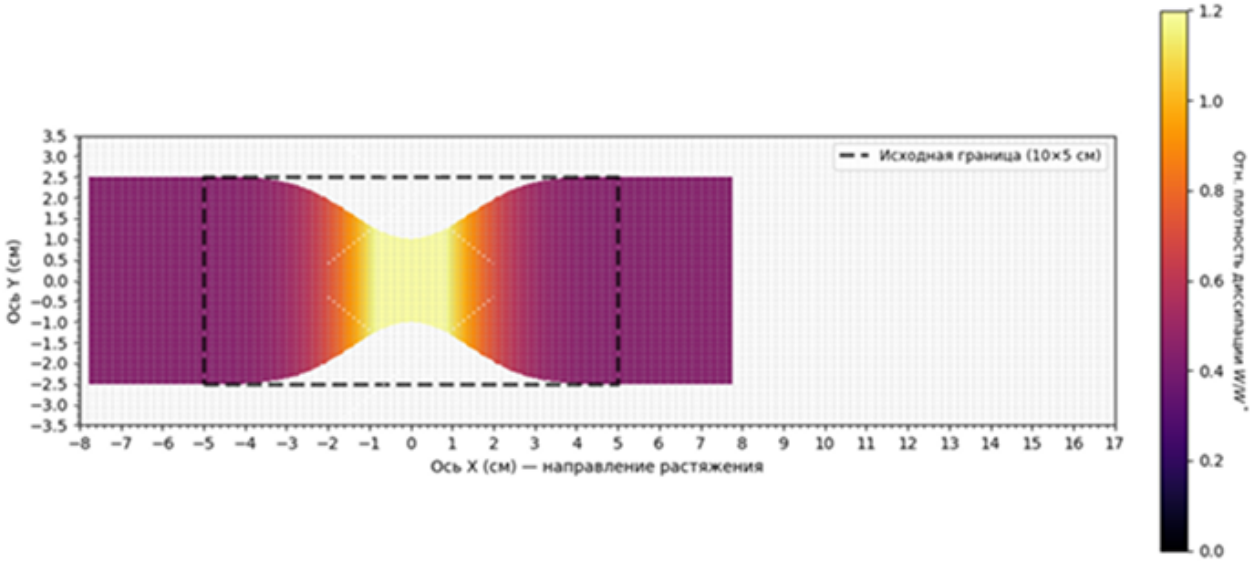


Рис. 4. Состояние пластины: предразрушение (сильное истончение, высокая диссипация в шейке)

Заключение. В рамках проделанной работы спроектирована и проходит апробацию архитектура физически информированных нейронных сетей для решения задач механики деформируемого твёрдого тела с разрывными кинематическими полями. Предложенный ансамбль из трёх подсетей с комбинированной периодически-гиперболической функцией активации и блоком предварительной нормализации данных позволяет корректно описывать скачки деформаций на линиях скольжения и эволюцию вершины трещины. Предварительные численные эксперименты демонстрируют принципиальную возможность поиска сетью физически обоснованной траектории разрушения, удовлетворяющей вариационному принципу минимакса, без применения эмпирических регуляризаторов и проце-

дур перестроения сетки, что открывает новые перспективы для моделирования сложных процессов разрушения в инженерных конструкциях. По завершении текущего этапа тестирования базовой архитектуры ФИНС на следующем этапе исследования планируется переход к применению перидинамических нейронных сетей для моделирования процессов мгновенного разрушения. Это позволит естественным образом описывать разрывы и трещины без введения специальных условий на поверхностях разрыва и процедур отслеживания фронта трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хряпенко К. Д. *Прогнозирование вероятности трещинообразования в пластинах из различных металлов при продольном растяжении с применением нейронных сетей.* Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2026. № 1(89). С. 72–76.
2. Хряпенко К. Д. *Двойная сверточная архитектура для мультимодального прогнозирования трещинообразования в металлических пластинах при одноосном растяжении.* Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Механики — XXI веку». 2026. № 25. С. 355–361.
3. Хряпенко К. Д. *Проблематика определения материала образца в механике деформируемого твердого тела с помощью применения искусственного интеллекта.* Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению : Материалы III Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых. Комсомольск-на-Амуре, 11–12 декабря 2024 года. Комсомольск-на-Амуре : Комсомольский-на-Амуре госуниверситет, 2025. С. 237–240.
4. Козлова О. В. *Константы разрушения для идеальных жесткопластических тел.* Доклады Академии наук. 2002. Т. 385. № 3. С. 342–345.
5. Хромов А. И., Козлова О. В. *Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения.* Ин-т машиноведения и металлургии ДВО РАН. Владивосток : Дальнаука, 2005. 159 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА С УЧЁТОМ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ТЕПЛОАККУМУЛИРУЮЩЕГО СЛОЯ В СТЕНЕ ТРОМБА

Е. К. Чепурнова, И. К. Андрианов, С.А. Костиков

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре

Исследуется процесс теплопереноса в теплоаккумулирующем слое из материала с фазовым переходом в системе теплообмена стены Тромба, принцип работы которой основывается на аккумулировании солнечной энергии [1]. Стена Тромба включает в себя пористый материал с фазовым переходом, процесс нестационарной теплопроводности в котором описывается дифференциальным уравнением

$$(1-\varepsilon)\,\rho_m c_m \frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(T\right)\left[c\left(T\right)\left(T-T_0\right)+L\phi\left(T\right)\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

граничные условия на внешней и внутренней поверхностях стены определяются соотношениями

$$-\lambda\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_{sol}\left(T\right) - \alpha_{out}\left[T\left(0,t\right) - T_{out}\left(t\right)\right],$$

$$-\lambda\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=\delta} = \alpha_{in}\left[T\left(\delta,t\right) - T_{in}\left(t\right)\right],$$

объёмная доля жидкой фазы материала: $\phi = \{0,\ T < T_{ph} - \Delta T/2;\ [T-(T_{ph}-\Delta T/2)]/\Delta T,\ T_{ph} - \Delta T/2 \le T < T_{ph} + \Delta T/2;\ 1,\ T \ge T_{ph} + \Delta T/2\}$, пористость ε структуры материала с фазовым переходом находится в интервале $0 < \varepsilon < 1$, где $\varepsilon = 1$ – состояние, при котором весь объём занят материалом с фазовым переходом без каркаса.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-29-01248, https://rscf.ru/project/25-29-01248/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrianov I. K. *Mathematical model of optimization of the transparent partition thickness in the trombewall heat exchange system.* Int. J. Comput. Civ. Struct. Eng. 2026. V. 22. No. 1. P. 90–103.

ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕРМОУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ МОМЕНТЕ

А. Д. Чернышов[1], *В. В. Горяйнов*[2], *Д. А. Литвинов*[1]

[1]*Воронежский государственный университет инженерных технологий*
[2]*Воронежский государственный технический университет*

Математическая модель термоупругой пластины представима следующей системой дифференциальных уравнений относительно поперечного перемещения $w(x,y)$ и температуры $T(x,y,z)$ [1]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q(x,y)}{D}-\frac{1}{1-v}\left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2}\right), \quad (x,y)\in\Omega_{\square},\quad x\in[0,a],\quad y\in[0,b], \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+F(x,y,z)=0,\quad x\in[0,a],\quad y\in[0,b],\quad z\in[0,h]. \tag{2}$$

В выражениях (1), (2) используются следующие обозначения: $w(x,y)$ – вертикальное перемещение пластины, $q(x,y)$ – переменная поперечная нагрузка на поверхность, D – цилиндрическая жёсткость пластины, вычисляемая по формуле $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$, где h – толщина пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, M_T – осреднённый по толщине температурный момент, определяемый по формуле [1]

$$M_T(x;y)=\alpha E\int\limits_{-h/2}^{h/2}T(x,y,z)\,z dz, \tag{3}$$

где α – коэффициент температурного расширения, $T(x,y,z)$ – температура пластины, $F(x,y,z)$ – переменный внутренний источник.

Граничные условия для (1) и (2) задаются в виде

$$w|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad w|_{x=a}=\varphi_3(y),\quad w|_{y=0}=\varphi_2(x),\quad w|_{y=b}=\varphi_4(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\psi_1(y),\quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=a}=\psi_3(y),\quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0}=\psi_2(x),\quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=b}=\psi_4(x), \tag{5}$$

$$\begin{gathered}T|_{x=0}=f_1(y,z),\quad T|_{y=0}=f_2(x,z),\quad T|_{z=0}=f_3(x,y),\\ T|_{x=a}=f_4(y,z),\quad T|_{y=b}=f_5(x,z),\quad T|_{z=h}=f_6(x,y).\end{gathered} \tag{6}$$

Применение новых аналитических методов позволяет выявить особенности поведения элементов конструкций в опасных точках, где возможны концентрации напряжений. В данной работе для аналитического решения как бигармонического уравнения, так и уравнения теплопроводности будут использованы быстрые разложения [2], которые обеспечивают возможность почленного дифференцирования ряда Фурье заранее заданное количество раз с одновременным увеличением его скорости сходимости. Для решения краевой задачи теплопроводности (2), (6) используются быстрые синус-разложения [2], которые справедливы для области $x\in[0,a]$, $y\in[0,b]$, $z\in[0,h]$.

В работе [3] в виде быстрых разложений [2] в общем виде получено точное решение трёхмерного уравнения Пуассона при задании граничных условий Дирихле. Используя его, найдём решение задачи (2), (6). Если в (6) функции $f_1 \div f_6$ задать так:

$$f_1(y,z) = \left[T_1\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_2\frac{z}{h}\right]\left(1-\frac{y}{b}\right)+\left[T_3\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_4\frac{z}{h}\right]\frac{y}{b}+\frac{h^2}{\pi^2}Q\sin\pi\frac{z}{h},$$

$$f_2(x,z) = \left[T_1\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_2\frac{z}{h}\right]\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left[T_5\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_6\frac{z}{h}\right]\frac{x}{a}+\frac{h^2}{\pi^2}Q\sin\pi\frac{z}{h},$$

$$f_3(x,y) = \left[T_1\left(1-\frac{y}{b}\right)+T_3\frac{y}{b}\right]\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left[T_5\left(1-\frac{y}{b}\right)+T_7\frac{y}{b}\right]\frac{x}{a}, \tag{7}$$

$$f_4(y,z) = \left[T_5\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_6\frac{z}{h}\right]\left(1-\frac{y}{b}\right)+\left[T_7\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_8\frac{z}{h}\right]\frac{y}{b}+\frac{h^2}{\pi^2}Q\sin\pi\frac{z}{h},$$

$$f_5(x,z) = \left[T_3\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_4\frac{z}{h}\right]\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left[T_7\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_8\frac{z}{h}\right]\frac{x}{a}+\frac{h^2}{\pi^2}Q\sin\pi\frac{z}{h},$$

$$f_6(x,y) = \left[T_2\left(1-\frac{y}{b}\right)+T_4\frac{y}{b}\right]\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left[T_6\left(1-\frac{y}{b}\right)+T_8\frac{y}{b}\right]\frac{x}{a},$$

а внутренний источник –

$$F(x,y,z) = Q\sin\pi\frac{z}{h}, \tag{8}$$

то точное решение краевой задачи (2), (6) будет иметь вид

$$T(x,y,z) = \left\{\left[T_1\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_2\frac{z}{h}\right]\left(1-\frac{y}{b}\right)+\left[T_3\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_4\frac{z}{h}\right]\frac{y}{b}\right\}\left(1-\frac{x}{a}\right)+$$
$$+\left\{\left[T_5\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_6\frac{z}{h}\right]\left(1-\frac{y}{b}\right)+\left[T_7\left(1-\frac{z}{h}\right)+T_8\frac{z}{h}\right]\frac{y}{b}\right\}\frac{x}{a}+\frac{h^2}{\pi^2}Q\sin\pi\frac{z}{h}, \tag{9}$$

$T_1 \div T_8$ – температура в углах пластины, Q – мощность источника.

Зависимость температуры в виде (9) даёт возможность моделировать различные температурные поля. Например, при выборе

$$T_1 = T_3 = T_5 = T_7 = T_{01}, \quad T_2 = T_4 = T_6 = T_8 = T_{02} \tag{10}$$

вид функций из (7) и равенство (9) упрощаются.

Граничные условия на торцах пластины принимают форму

$$T|_{x=0} = T|_{y=0} = T|_{x=a} = T|_{y=b} = T_{01} + (T_{02}-T_{01})\frac{z}{h} + \frac{h^2}{\pi^2}Q\sin\pi\frac{z}{h}, \tag{11}$$

а на верхней и нижней поверхностях пластины температура сохраняет постоянные значения,

$$T|_{z=0} = T_{01}, \quad T|_{z=h} = T_{02}. \tag{12}$$

Температуру в любой точке пластины можно определить по формуле

$$T(x,y,z) = T_{01} + (T_{02}-T_{01})\frac{z}{h} + \frac{h^2}{\pi^2}Q\sin\pi\frac{z}{h}. \tag{13}$$

Случай, описываемый формулами (11)–(13), встречается при подогреве вязких нефтепродуктов в прямоугольных резервуарах.

Для нахождения температурного момента (3), необходимого для решения уравнения равновесия (1), выполним замену переменной $z = \tilde{z} + h/2$ $(-h/2 \le \tilde{z} \le h/2)$ в температурном поле (13). В результате получим равенство

$$T(x,y,\tilde{z}) = \frac{T_{01}+T_{02}}{2} + (T_{02}-T_{01})\frac{\tilde{z}}{h} + \frac{h^2}{\pi^2} Q \sin\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{\tilde{z}}{h}\right), \quad -h/2 \le \tilde{z} \le h/2. \tag{14}$$

Имея распределение (14), найдём температурный момент (3). При выполнении условий (10) температурный момент M_T становится постоянной величиной

$$M_T = \alpha E \int\limits_{-h/2}^{h/2} T(x,y,\tilde{z})\,\tilde{z}d\tilde{z} = \alpha E h^2 \frac{1}{12}\,(T_{02}-T_{01}) \tag{15}$$

и зависит только от разности температур на верхней и нижней поверхностях пластины.

Для решения уравнения равновесия пластины (1) неизвестные перемещения $w(x,y)$ представим в виде быстрого разложения [2]

$$w(x;y) = \sum_{i=1}^{8} A_i(x)\,P_i(y) + \sum_{m=1}^{N_1} w_m(x)\sin m\pi\frac{y}{b}, \quad x \in [0;a], \quad y \in [0;b], \tag{16}$$

где N_1 – число учитываемых членов в ряде Фурье, $A_i(x)$ – коэффициенты граничной функции, а $P_i(y)$ – быстрые полиномы [2] – задаются равенствами

$$\begin{gathered}
P_1(y) = \left(1-\frac{y}{b}\right), \quad P_2(y) = \frac{y}{b}, \quad P_3(y) = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right), \quad P_4(x) = \left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right), \\
P_5(y) = \left(\frac{y^4}{24} - \frac{y^5}{120b} - \frac{by^3}{18} + \frac{b^3y}{45}\right), \quad P_6(y) = \left(\frac{y^5}{120b} - \frac{by^3}{36} + \frac{7b^3y}{360}\right), \\
P_7(y) = \left(\frac{y^6}{720} - \frac{y^7}{5040b} - \frac{by^5}{360} + \frac{b^3y^3}{270} - \frac{2b^5y}{945}\right), \\
P_8(y) = \left(\frac{y^7}{5040b} - \frac{by^5}{720} + \frac{7b^3y^3}{2160} - \frac{31b^5y}{15120}\right).
\end{gathered} \tag{17}$$

Неизвестными в (16) являются функции, зависящие только от одной переменной x,

$$A_1(x) \div A_8(x), \quad w_m(x), \quad m = 1,...,N_1. \tag{18}$$

Функции из (18) представим быстрыми разложениями по переменной x:

$$\begin{gathered}
A_i(x) = \sum_{k=1}^{8} \upsilon_k^{(i)} P_k(x) + \sum_{n=1}^{N_2} a_n^{(i)} \sin\, n\pi\frac{x}{a}, \\
w_m(x) = \sum_{k=1}^{8} u_k^{(m)} P_k(x) + \sum_{n=1}^{N_2} W_n^{(m)} \sin\, n\pi\frac{x}{a}, \quad i = 1,...,8, \quad n = 1,...,N_2, \quad m = 1,...,N_1.
\end{gathered} \tag{19}$$

В (19) N_2 – число учитываемых членов в рядах Фурье повторных разложений, $\upsilon_k^{(i)}$, $u_k^{(m)}$, $i = 1,...,8$, $m = 1 \div N_1$, – коэффициенты граничных функций повторных разложений,

$P_k(x)$ – быстрые полиномы [2], имеют вид, подобный формулам (17). Для записи $P_k(x)$ необходимо в (17) заменить y на x и b на a.

Таким образом, краевая задача (1), (4), (5) сведена к определению $(8+N_1)(8+N_2)$ неизвестных коэффициентов

$$\upsilon_k^{(i)},\ u_k^{(m)},\ a_n^{(i)},\ W_n^{(m)},\ \ i=1,...,8,\ \ k=1,...,8,\ \ m=1,...,N_1,\ \ n=1,...,N_2. \tag{20}$$

Для их нахождения используем быструю тригонометрическую интерполяцию, апробированную в работах [4–6]. В результате приходим к замкнутой системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных из (20). Данная система уравнений решена в среде Maple. После чего найденные неизвестные (20) подставляются в быстрое разложение (16), тем самым строится приближённое аналитическое решение краевой задачи (1), (4), (5).

Для численного решения этой задачи зададим функции $q(x,y)$, $\varphi_1 \div \varphi_4$, $\psi_1 \div \psi_4$ в виде

$$\varphi_1(y)=\varphi_3(y)=\varphi_2(x)=\varphi_4(x)=0,\quad \psi_1(y)=0,\quad \psi_2(x)=0,$$
$$\psi_3(y)=-12\theta a^2 y\left(y^3-b^3\right),\quad \psi_4(x)=-12\theta b^2 x\left(x^3-a^3\right),$$
$$q(x,y)=-24\theta D\left[y\left(y^3-b^3\right)+x\left(x^3-a^3\right)+12x^2y^2\right],$$

где θ – некоторая константа.

В вычислительных экспериментах количество членов в рядах Фурье первого (16) и второго (19) быстрых разложений примем одинаковыми, т. е. $N_1=N_2=N$, и выполним расчёты при $N=3$. В качестве материала пластины выберем конструкционную сталь для сварных конструкций 09Г2С с характеристиками [7]

$$E=2.0\cdot 10^{11}\ \text{Па},\quad \nu=0.3,\quad \alpha=11.4\cdot 10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1},\quad \sigma_T=2.65\cdot 10^8\ \text{Па}.$$

Величину параметра θ и размеры пластины примем равными

$$\theta=10^{-4},\quad a=0.7\ \text{м},\quad b=0.7\ \text{м},\quad h=0.01\ \text{м}. \tag{21}$$

Максимальная невязка $\delta_{\max}$ уравнения равновесия пластины возникает в угловых точках и составляет $0.04\,\%$, а в остальных точках пластины она близка к $0\,\%$. Для граничных условий $\delta_{\max}$ находится в окрестности границ отрезков $[0,a]$ и $[0;\,b]$ и принимает значение, равное $2.9\cdot 10^{-4}\,\%$. Подобная малая погрешность позволяет формально считать полученное в статье приближённое аналитическое решение точным.

Для изучения свойств поля напряжений в термоупругой пластине исследуется влияние температурного момента на величину интенсивности напряжений $\tilde{\sigma}$ [8],

$$\tilde{\sigma}=\sqrt{\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)\right]/2}, \tag{22}$$

и на расположение точки (точек) с наибольшим значением $\tilde{\sigma}$. Вычислим изгибающие и крутящий моменты, перерезывающие силы и компоненты напряжений по формулам из [1, 9]. В формуле (22) примем $\sigma_z=0$. Исследуем пластины разных габаритных размеров, но с одинаковой площадью поверхности. Для выполнения этого условия длина одной из сторон увеличивалась, и одновременно с этим длина другой стороны уменьшалась на одну и ту же величину, которую обозначим K_{IR} и назовем её коэффициентом изменения размера.

Определено соотношение сторон $b/a = (K_{IR}^*)^2$ в прямоугольной пластине, при котором максимальная интенсивность напряжений $\tilde{\sigma}_{\max}$ будет достигаться в двух точках с координатами $(a; b)$ и $(a; 0.625b)$. Если $K_{IR} < K_{IR}^*$ или $K_{IR} > K_{IR}^*$ максимальная интенсивность напряжений $\tilde{\sigma}_{\max}$ находится только в одной точке. Для $K_{IR} < K_{IR}^*$ это угловая точка $(a; b)$, а для $K_{IR} > K_{IR}^*$ точка $(a; 0.625b)$, находящаяся на длинной стороне с заданным моментом. Величина $K_{IR}^* = 1.472$ является неизменной для любой площади поверхности пластины S при $M_T = 0$. Если $M_T \neq 0$ $(T_{02} - T_{01} = \Delta T \neq 0)$, то величина K_{IR}^* будет зависеть от площади пластины и значения M_T. Эта особенность отражена на рис. 1, на котором показаны кривые, соответствующие интенсивности напряжений пластины с двумя точками $\tilde{\sigma}_{\max}$ для различных площадей поверхности пластин. Линия 1 построена для данных (21). Линии 2 и 3 получены заменой в данных (21) размеров a и b на $a = 0,8$ м, $b = 0,8$ м (линия 2) и на $a = 0.9$ м, $b = 0.9$ м (линия 3). Область, лежащая ниже кривой, соответствует комбинации отношения сторон b/a и разности температур на поверхностях пластины ΔT, при которой максимальное значение интенсивности напряжений $\tilde{\sigma}_{\max}$ будет в угловой точке $(a; b)$. Область, лежащая выше кривой, соответствует случаю, где $\tilde{\sigma}_{\max}$ достигается в точке $(a; 0.625b)$.

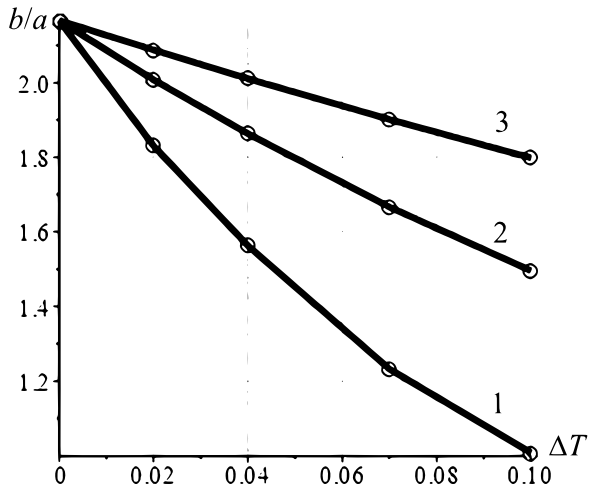


Рис. 1. Кривые, соответствующие интенсивности напряжений пластины с двумя точками $\tilde{\sigma}_{\max}$ для различных площадей поверхности: 1) $S = 0.49$ м^2; 2) $S = 0.64$ м^2; 3) $S = 0.81$ м^2

Из рисунка видно, что чем больше площадь пластины, тем бóльший температурный момент M_T должен быть задан для того, чтобы в пластине $\tilde{\sigma}_{\max}$ достигалось в одной точке $(a; 0,625b)$ на длинной нагруженной стороне. При малых значениях M_T в термоупругой пластине максимальное значение $\tilde{\sigma}_{\max}$, как правило, будет в угловой точке $(a; b)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. *Теория температурных напряжений.* М.: Мир, 1964. 518 с.
2. Чернышов А. Д. *Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений.* Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 13–24.
3. Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Никифорова О. Ю. *Трехмерные точные решения уравнения диффузии.* Вестник Чувашского государственного педагогиче-

ского университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2. С. 48–62.

4. Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Kovaleva E. N. *Simulation of the stress-deformed state of a rectangular bar using fast trigonometric interpolation in various statements of boundary value problems*. Materials Physics and Mechanics. 2023. V. 51. No. 4. P. 160–171.
5. Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Попов М. И. *Исследование погрешности быстрой тригонометрической интерполяции при решении задачи о напряжениях в брусе*. Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2023. № 1. С. 115–128.
6. Чернышов А. Д., Попов М. И., Горяйнов В. В., Никифорова О. Ю. *Применение метода быстрых разложений к построению траектории движения тела переменной массы из его начального положения в заданное конечное в гравитационном поле*. Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87. № 5. С. 742–756.
7. https://www.splav-kharkov.com/mat_start.php?name_id=120.
8. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. *Уравнения и краевые задачи пластичности и ползучести*. Киев : Наукова думка, 1981. 496 с.
9. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. *Пластины и оболочки*. М. : Наука, 1966. 636 с.

НОВАЯ СТРАТЕГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В L-DED-ЛАЗЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ 3D-ПЕЧАТИ МЕТАЛЛОИЗДЕЛИЙ

К. А. Чехонин

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск

Для моделирования непрерывных пространственно-временны́х многомасштабных определяющих параметров тепломассопереноса с нахождением остаточных технологических напряжений в прямых аддитивных технологиях лазерного выращивания металлоизделий (L-DED) разработаны корректные математические модели и эффективные, устойчивые численные алгоритмы, реализованные с использованием метода гибридных конечных элементов [1] на параллельных компьютерных платформах. Эволюция микроструктуры и физико-механических свойств материала, выращиваемого в процессе аддитивного производства металлоизделий (АПМ), – сложная многофизическая и многомасштабная проблема. Изучение влияния режимов процесса АПМ на эволюцию микроструктуры и результирующие физико-механические свойства напечатанного изделия сохраняет актуальность и активно продолжается. Анализ характерных масштабов и идентификация управляющих безразмерных параметров могут дать существенное представление о динамике процесса АПМ с определением бездефектных условий выращивания. Следует отметить, что процесс АПМ осуществляется с использованием небольшого движущегося лазерного источника тепла, который генерирует сильно локализованные градиенты температуры, приводящие к осциллирующим конвективным течениям расплава материала, а при их затвердевании – остаточному напряжённо-деформированному состоянию. Поскольку деформации ограничены окружающим нерасплавленным материалом, возникают остаточные напряжения и коробление выращиваемого слоя (изделия), приводящие порой даже к его разрушению. Адекватное и физически обоснованное численное моделирование необходимо для понимания лежащей в основе АПМ физики и оптимизации режимов выращивания. Однако такое моделирование требует больших вычислительных затрат из-за малого размера источника тепла и различных пространственных и временны́х масштабов протекающих физических процессов (тепломассоперенос в ванне расплава, смачивание твёрдых поверхностей расплавом, турбулентный перенос инертным газом порошка, диффузия тепла в выращиваемое изделие с подложкой, характерные времена воздействия лазерного излучения, растекания и затвердевания расплава и т. д.). Необходимость одновременного разрешения определяющих уравнений в этих масштабах приводит высокоточное моделирование в масштабе изделия к непомерно высоким затратам суперкомпьютерного времени (до недели и больше, в зависимости от принятых предположений и упрощений). Хотя адаптивное построение сеточной области стало популярным подходом для решения проблемы несоответствия пространственных масштабов, равномерный шаг по времени остаётся стандартным в этой области моделирования. Для изделий сантиметрового масштаба это может потребовать сотен миллионов шагов по времени, что делает такое моделирование вычислительно нецелесообразными. В этих условиях многие авторы крайне упрощают задачу до уравнения сохранения энергии с объединением нескольких выращиваемых слоёв в один временно́й шаг. По сути, этот подход устраняет многие физические процессы, малые масштабы, связанные с движением лазерного источника энергии, но значительно увеличивает погрешность и требует значительных затрат в калибровке.

В настоящей работе предложена новая стратегия для численного исследования гидродинамических и термомеханических процессов при выращивании слоя с определением эволюции микроструктуры и конечных свойств выращиваемого слоя [2–5]. Разработан новый способ исследования динамических процессов 3D-печати металлоизделий путём выращивания лежащей капли [2]. Подаваемый в ванну с расплавом порошок подогревается (расплавляется) во время полёта через поток лазерного излучения и на поверхности ванны добавляется в виде непрерывного потока массы через свободную поверхность растущей капли с заданным аналитическим распределением (двухфазная модель). В основу математической модели положены уравнения Навье – Стокса, энергии, концентрации с заменой реологических и теплофизических констант функциями от фазового состояния, температуры и концентрации элементов, включённых в сплав. Динамические условия на свободной поверхности ванны с расплавом зависят от величины поверхностного натяжения, касательного напряжения Марангони и результирующего нормального давления от воздействия струи газа с порошком и паров металла. Моделирование смачивания расплавом твёрдых поверхностей производится в рамках модифицированной модели Воинова. В работе используется объёмная модель лазерного источника энергии с зависимостью абсорбции энергии от фазового состояния материала, геометрии свободной поверхности и длины волны лазерного излучения.

Численное решение задачи производится в трёхмерной и осесимметричной постановках. Свободная поверхность ванны с расплавом отслеживается лагранжевым способом. Применение оператора Лапласа – Бельтрами к динамическим условиям на ней позволяет исключить вычисление кривизны свободной поверхности и естественным образом учесть напряжения Марангони и динамические условия смачивания [3]. Более того, неявная аппроксимация кинематических условий на свободной поверхности исключает численную диффузию и позволяет увеличить шаг по времени на четыре порядка. Построение конечно-элементной сетки производится в два этапа:

1) построение базовой укрупнённой сетки, которая не изменяется в течение всего моделирования;

2) адаптация сетки в окрестности воздействия стационарного лазерного луча методом октодерева (двухуровневый метод).

Исследованы особенности тепломассопереноса в растущей капле и эволюции её свободной поверхности. Показано существенное влияние потока газа и массового расхода порошка на структуру конвекции расплава в капле и эволюцию свободной поверхности с образованием кратера. При этом изменяется структура течения Марангони в окрестности кратера с образованием дополнительного вихря. Этот результат получен впервые и требует более детального исследования. Влияние скорости сканирования лазерного луча на процесс лазерного наращивания металлического слоя учитывается путём регулирования периода подачи лазерной энергии и массы порошка. Исследовано влияние технологических режимов (безразмерных параметров мощности лазера и массового расхода порошка, а также числа Пекле и эффективности захвата порошка ванной) на геометрию капли с определением «технологического окна» значений указанных параметров с ограничениями на уровень проплавления подложки и видимого динамического угла смачивания. Эта же сеточная область используется для моделирования термомеханической подзадачи затвердевания выращенной капли в рамках термо-упругопластической постановки с учётом механизмов упрочнения–разупрочнения [5]. Показано влияние режимов выращивания на формирование микроструктуры и эволюцию технологических напряжений в затвердеваемой капле. Данный подход позволяет подробно исследовать механизм формирования

геометрии выращивания капли, её микроструктуры и конечных свойств с прогнозированием остаточных напряжений и деформаций. Кроме того, предложенная стратегия даёт возможность адаптировать полуаналитические модели контроля за процессом АПМ, которые интегрируются в интеллектуальные информационные системы управления технологическим процессом и позволяют значительно сократить период разработки лазерной технологии выращивания металлоизделий с обеспечением требуемых геометрической точности и качества.

При моделировании 3D-печати слоя, поверхности или изделия по предложенной стратегии используется многоуровневый подход построения сеточной области. Количество уровней зависит от размеров и геометрии выращиваемого изделия. Дополнительной особенностью стратегии является движение адаптированного уровня октосетки вместе с лучом лазера. По мере удаления от движущегося источника тепла расчётная сеточная область сбалансированно укрупняется методом октодерева. При этом базовая крупная сетка всей расчётной области остаётся неизменной. Это позволяет выполнять условие непрерывности искомых функций на межуровневых границах. Благодаря структуре сетки в виде октодерева, перенос значений функций в узлах сеточной области и точках интегрирования Гаусса осуществляется в каждом конечном элементе аналитическим способом с незначительными затратами компьютерного времени. Численные расчёты выращивания слоя показали, что после его формирования с размером в 3–4 эффективных диаметров луча лазера, геометрия ванны с расплавом приходит в квазистационарное состояние (геометрия подобна стекающей капли по наклонной поверхности с характерным хвостом [4]), а алгоритм расчёта становится устойчивым при значительно больших субшагах по времени при расчёте гидродинамической стадии. Предложенная стратегия позволяет моделировать формирование геометрии выращиваемого изделия, аккумуляцию тепла и эволюцию напряжённо-деформированного состояния в нём и в зависимости от целей и точности расчётов на 3–4 порядка сократить затраты компьютерного времени.

На процесс АПМ оказывают влияние более 70 параметров, поэтому в этих условиях невозможно производить оптимизацию технологических режимов выращивания. Для разрешения этой проблемы предложен закон масштабирования рассматриваемого процесса. В этом случае при обезразмеривании определяющих уравнений АПМ используем π-теорему Букингема. В результате ряда преобразований получены ключевые безразмерные параметры, обеспечивающие бездефектные условия выращивания: мощность, число Пекле, массовый расход порошка и эффективность захвата порошка ванной с расплавом. Первые три являются универсальными, а последний зависит от типа используемого оборудования для подачи порошка. Путём параметрического анализа исследовано влияние универсальных параметров АПМ на геометрию и бездефектные условия выращивания слоя. Полученный закон масштабирования подтверждается путём сравнения с доступными экспериментальными результатами для большинства широко используемых металлических сплавов.

Работа выполнена в рамках госзадания Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН (номер темы 122012100027-8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков В. К., Чехонин К. А. *Основы теории метода смешанных конечных элементов.* Хабаровск : изд-во ХГТУ, 1999. 284 с.

2. Чехонин К. А. *Численное моделирование роста лежащей капли расплава металла на горизонтальной подложке в условиях прямой подачи лазерной энергии и порошка.* Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 2. С. 286–299.
3. Chekhonin K. A., Vlasenko V. D. *Modelling of capillary coaxial gap filling with viscous liquid.* Computational Continuum Mechanics. 2019. № 12. P. 313–324.
4. Chekhonin K. A., Vlasenko V. D. *Three-dimensional finite element model of three-phase contact line dynamics and dynamic contact angle.* WSEAS transactions on fluid mechanics. 2024. № 19. P. 577–582.
5. Гриценко А. А., Чехонин К. А. *Численное моделирование остаточных напряжений в формируемом металлическом слое с использованием подвижного лазерного источника энергии.* Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 1. С. 22–32.

ТРЁХПОЛЬНАЯ МОДЕЛЬ KSIBL ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ПЛЁНОК

В. Я. Шкадов, А. Н. Белоглазкин, И. В. Шишкин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В [1] для описания течения плёнки вязкой жидкости по твёрдой поверхности, мало отклоняющейся от горизонта, выводится система KSIBL дифференциальных уравнений для средней толщины, локального расхода жидкости и трения на твёрдой поверхности:

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0, \\ \Delta\,(q_t + G_x) = Fh - \dfrac{1}{3}\,\tau, \\ \Delta\,\tau_t = Q. \end{cases} \tag{1}$$

Все обозначения введены и описаны в [1]. Результаты расчётов показывают преимущество новой системы в возможности более точно моделировать качественную картину течения. В отличие от системы уравнений IBL (Induced Boundary Layer), впервые полученной в [2], при выводе которой принимается параболический профиль скорости, система уравнений KSIBL аппроксимирует профиль скорости полиномом 4-го порядка. Это даёт возможность построить внутри слоя плёнки жидкости локальные области «возвратного» течения (backflow phenomenon).

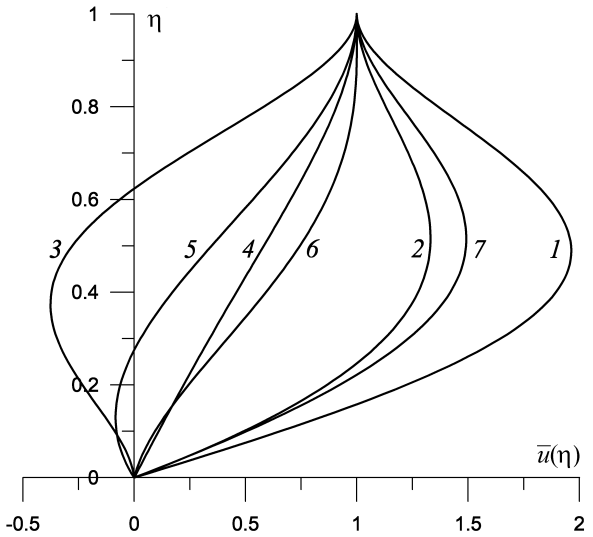


Рис. 1. Изменение формы профиля скорости поперек плёнки на интервале длины волны λ

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я., Белоглазкин А. Н., Шишкин И. В. *Коротковолновая неустойчивость и формирование нелинейных волн в тонком слое текущей вязкой жидкости.* Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2026. Т. 3. С. 47–54.
2. Шкадов В. Я. *Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.* Известия АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗВИТОМ ТУРБУЛЕНТНОМ СЛОЕ СМЕШЕНИЯ

А. В. Шмидт[1], *К. С. Юргенсон*[2]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*
[2]*Федеральный исследовательский центр КНЦ СО РАН, Красноярск*

Для описания течения в дальних областях турбулентного слоя смешения используется $k-\varepsilon$ модель турбулентности

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{2}$$

$$U\frac{\partial k}{\partial x}+V\frac{\partial k}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-\varepsilon, \tag{3}$$

$$U\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+V\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+C_{\varepsilon1}C_\mu k\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{4}$$

где x – переменная, вдоль которой преимущественно развивается слой смешения, y – поперечная координата, U – продольная осреднённая компонента скорости, V – поперечная осреднённая компонента скорости, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности. Эмпирические постоянные в уравнениях (1)–(4) имеют следующие значения:

$$C_\mu=0.09,\quad C_{\varepsilon1}=1.44,\quad C_{\varepsilon2}=1.92,\quad \sigma_\varepsilon=1.3.$$

Получена автомодельная редукция уравнений модели (1)–(4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Приближённое решение соответствующей краевой задачи для редуцированной модели строилось с помощью метода сшивания усечений асимптотических разложений [1]. Максимальная относительная погрешность между сконструированным в виде усечений рядов Пюизё приближённым решением, включающем 13 аппроксимантов, и численным решением, полученным с помощью модифицированного метода стрельбы [2], не превышает 1 %.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Математическое моделирование неидеальных сред с поверхностями раздела в природных и технических системах», № FWES-2024–0025.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмидт А. В. *Приближенное решение задачи о течении в дальнем плоском безымпульсном турбулентном следе.* Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64. № 6. С. 53–59.
2. Капцов О. В., Шанько Ю. В. *Семейство автомодельных решений одной модели дальнего турбулентного следа.* Труды междунар. конф. «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании». 2006. Т. 1. С. 576–579.

NUMERICAL SIMULATION OF THERMAL CONVECTION GENERATED BY OSCILLATIONS IN A ROTATING ANNULUS

N. Kozlov[1], *R. Crepaldi Ferrari*[2], *B. Duguet*[2], *P. P. Feumi*[2]

[1]*Institut de Mecanique des Fluides de Toulouse, Toulouse INP, Toulouse, France*
[2]*Ecole Nationale Superieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique, d'Hydraulique et des Telecommunications, Toulouse INP, Toulouse, France*

Heat transfer intensification is studied numerically in rotating fluid confined in an annulus. This system has common traits with planets [1], as well as with rotary reactors and exchangers [2–4].

Recent experiments and linearized theory [5–7] have demonstrated the existence of two oscillatory mechanisms that may manifest themselves trough two-dimensional motion in rotating non-isothermal systems with stable stratification. The first one is thermal vibrational convection [8], which generally emerges in a large variety of experiments; the second one is convection induced by the parametric resonance, and it strongly depends on problem geometry [7].

In the present study, a 2D numerical model, allowing us to study the thermal vibrational convection generated by the gravity field g in a rotating annulus, was developed with ANSYS Fluent. The layer is horizontal and is formed by two coaxial cylinders of radii R_{in} and R_{out}, the gravity field being oriented perpendicular to the axis of rotation. The Navier – Stokes, energy and continuity equations are solved in their complete form in the inertial frame of reference:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}_r\mathbf{v}) + \rho(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla\cdot\tau_{ij} - \rho g\mathbf{e}_y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}_r H + \rho\mathbf{u}_r) = \nabla\cdot(\lambda\nabla T), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}_r) = 0. \tag{3}$$

Here, $\tau_{ij} = \mu[\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T - 2/3(\nabla\cdot\mathbf{v}\delta_{ij})]$ is the viscous stress tensor, E – internal energy, H – rothalpy, $\mathbf{v}_r$ – relative velocity, $\mathbf{u}_r$ – frame velocity.

The working fluid is water. Its properties are density ρ, dynamic viscosity μ, specific heat c_p and thermal conductivity λ are considered temperature-dependent and formulated via tables with piece-wise linear approximation.

Temperature of the walls is set constant; temperature difference is calculated relative to the inner wall $\Theta = T_{out} - T_{in}$. The layer is heated from the inside: $\Theta < 0$. The rotation is introduced into the model as the frame motion at a constant angular rate Ω.

The dimensionless parameters of the problem are the centrifugal Rayleigh number

$$\mathrm{Ra} = \frac{\Omega^2\overline{R}\beta\Theta h^3}{\nu\chi},$$

and the vibrational parameter (equivalent of Gershuni number)

$$R_v = \frac{(g\beta\Theta h)^2}{2\nu\chi\Omega^2}.$$

Here, $\overline{R} = (R_{in} + R_{out})/2$, $h = R_{out} - R_{in}$, $\nu = \mu/\rho$, $\chi = \lambda/\rho c_p$, β is the thermal expansion coefficient.

In the absence of gravity ($R_v = 0$, $Ra < 0$), the fluid is stratified stably in the centrifugal field: its temperature has a logarithmic radial profile, the convection is absent and the Nusselt number equals to unity. In the presence of gravity, at small temperature difference, small oscillations of temperature and velocity, characterized by the frequency of rotation, are observed in the system, but the average effects remain negligible.

At some fixed value of Ω, increasing the magnitude of negative temperature drop Θ up to a critical value leads to the loss of stability and the emergence of convection. Above this threshold, an intensive average convective motion sets up, and the Nusselt number increases rapidly with a further increase in R_v. An example of simulation results in the overcritical domain is given in Figure 1.

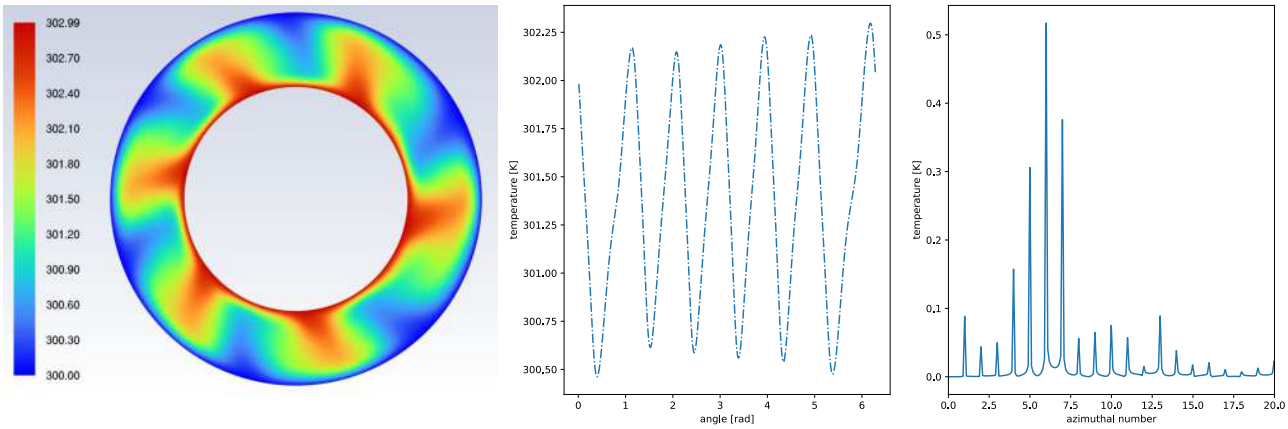


Fig. 1. An example of convective structure at rotation frequency $f = 0.2$ rps ($\Omega = 1.27$ rad/s) and temperature difference $\Theta = -3.0$ K. Left to right: temperature field, azimuthal temperature profile and its wavenumber spectrum from a FFT

The instability hereby presented is due to the thermal vibrational convection. The agreement of the present full N–S simulations with the experiments and linear theory [5–7] is demonstrated. A detailed analysis of instantaneous and average convective characteristics is carried out. The influence of control parameters on the dynamics and stability of the studied system is discussed. The results are compared to the existing experiments and linear theory.

REFERENCE

1. Dolzhansky F. V., Krymov V. A., Manin D. Yu. *Stability and vortex structures of quasi-two-dimensional shear flows.* Physics–Uspekhi. 1990. V. 33. No. 7. P. 495–520.
2. Saatdjian E., Rodrigo A. J. S., Mota J. P. B. *Stokes flow heat transfer in an annular, rotating heat exchanger.* Appl. Therm. Eng. 2011. V. 31. P. 1499–1507.
3. Visscher F., van der Schaaf J., Nijhuis T. A., Schouten J. C. *Rotating reactors – A review.* Chem. Eng. Res. Des. 2013. V. 91. P. 1923–1940.
4. Piton M., Huchet F., Cazacliu B., Le Corre O. *Heat Transport in Rotating Annular Duct: A Short Review.* Energies. 2022. V. 15. No. 22. Art. 8633.
5. Vjatkin A. A., Kozlov V. G., Siraev R. R. *Convective stability of fluid in a rotating horizontal annulus.* Fluid Dyn. 2017. V. 52. No. 4. P. 526–535.

6. Vjatkin A., Siraev R., Kozlov V. *Theoretical and experimental study of thermal convection in rotating horizontal annulus.* Microgravity Sci. Technol. 2020. V. 32. P. 1133–1145.
7. Vjatkin A., Kozlov V. *Parametric instability of nonisothermal fluid in a rotating horizontal cylindrical layer.* Phys. Fluids. 2026. V. 38. Art. 014131.
8. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal vibrational convection.* Hoboken, NJ, USA : Wiley, 1998.

Авторские данные

Авдейчик Евгений Валерьевич, Белорусский государственный университет, Минск, **e-mail:** zhenya_avdeychik@mail.ru

Алабужев Алексей Анатольевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, **e-mail:** alabuzhev@mail.ru

Алтынбек уулу Ыйман, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, Красноярск, **e-mail:** imanuulu9@gmail.com

Андреев Александр Сергеевич, Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, **e-mail:** aandreev.07.1988@gmail.com

Андреев Виктор Константинович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** andr@icm.krasn.ru

Андрианов Иван Константинович, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, **e-mail:** ivan_andrianov_90@mail.ru

Баженов Евгений Аркадьевич, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** bazhenovsnyteck@yandex.ru

Балданов Алдар Батомункуевич, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, **e-mail:** bal-aldar@yandex.ru

Бекежанова Виктория Бахытовна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** vbek@icm.krasn.ru

Белоглазкин Александр Николаевич, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, **e-mail:** beloglazkin@yandex.ru

Болдырева Ольга Юрьевна, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, **e-mail:** olga.boldyreva@mail.ru

Бондаренко Гордей, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** gordey_bondarenko@mail.ru

Бондаренко Наталья Сергеевна, Донецкий государственный университет, Донецк, **e-mail:** n.bondarenko123@mail.ru

Боровик Ксения Григорьевна, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, **e-mail:** ksushareno@mail.ru

Бородина Ксения Алексеевна, Тюменский государственный университет, Тюмень, **e-mail:** k.a.borodina@utmn.ru

Брацун Дмитрий Анатольевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** DABracun@pstu.ru

Ваганов Роман Александрович, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** rvaganov@sfu-kras.ru

Вахнина Ольга Владимировна, Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, **e-mail:** ovahnina@bk.ru

Виндокуров Илья Владимирович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** ivv@pstu.ru

Волкова Ирина Рустамовна, Федеральный исследовательский центр КНЦ СО РАН, Красноярск, **e-mail:** iriny_24@mail.ru@mail.ru

Володин Иван Валерьевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** ivanwolodin@gmail.com

Володько Ольга Станиславовна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** olga.pitalskaya@gmail.com

Гайфуллин Александр Марксович, Центральный аэрогидродинамический институт имени Н. Е. Жуковского, Жуковский, **e-mail:** gaifullin@tsagi.ru

Герасимов Сергей Иванович, Центр машиноведения ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова – Грехова РАН», Нижний Новгород, **e-mail:** s.gerasimov@ipfran.ru

Гилёв Павел Вячеславович, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** pavel.gilev.2000@mail.ru

Глухов Антон Александрович, Донецкий государственный университет, Донецк, **e-mail:** antonglukhov2012@yandex.ru

Голубев Василий Иванович, Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный, **e-mail:** golubev.vi@mipt.ru

Гончарова Дарья Витальевна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** darya.goncharova25@mail.ru

Гончарова Ольга Николаевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** gon@math.asu.ru

Горяйнов Виталий Валерьевич, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, **e-mail:** gorvit77@mail.ru

Григорьева Анна Леонидовна, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, **e-mail:** naj198282@mail.ru

Губайдуллин Амир Анварович, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, **e-mail:** a.a.gubaidullin@yandex.ru

Гузей Дмитрий Викторович, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** DGuzey@sfu-kras.ru

Гусева Евгения Кирилловна, Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный, **e-mail:** guseva.ek@phystech.su

Дембровский Кирилл Олегович, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** dembrovskiy.43011@stud.asu.ru

Дёмин Виталий Анатольевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** demin@psu.ru

Дёмин Федор Витальевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь. **e-mail:** deminfv@yandex.ru

Доброхотов Сергей Юрьевич, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** s.dobrokhotov@gmail.com

Докукова Наталия Анатольевна, Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, **e-mail**: dokukova@mail.ru

Дудин Дмитрий Сергеевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** dmitryovj@yandex.ru

Дудко Дина Николаевна, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, **e-mail:** d_dina@bk.ru

Дуркин Анатолий Альбертович, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, **e-mail:** durkinaa@syktsu.ru

Дяченко Вероника Руслановна, Донецкий государственный университет, Донецк, **e-mail:** dyachenko.v007@gmail.com

Еленская Наталия Витальевна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** n.elenskaya@pstu.ru

Елсуфьев Евгений Викторович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** yelsufyevev@gmail.com

Ерофеев Владимир Иванович, Центр машиноведения ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова – Грехова РАН», Нижний Новгород, **e-mail:** v.erofeev@ipfran.ru

Ефимов Евгений Александрович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** efimov@icm.krasn.ru

Затонская Вера Михайловна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** vmzatonskaja@pstu.ru

Иванов Андрей Викторович, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, **e-mail:** andrewivanovviktorovich@gmail.com

Иванов Роман Петрович, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, **e-mail:** iv-romanov@mail.ru

Иванова София Васильевна, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** SVIvanova@sfu-kras.ru

Казаков Александр Леонидович, Институт динамики систем и теории управления имени М. В. Матросова СО РАН, Иркутск, **e-mail:** kazakov@icc.ru

Казанцев Павел Николаевич, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, **e-mail:** kazantsevpn@yandex.ru

Карачаров Антон Александрович, Институт химии и химической технологии СО РАН, Красноярск, **e-mail:** antonkaracharov@ya.ru

Качанов Марк Лазаревич, Тафтский университет, Бостон, США,
e-mail: mark.kachanov@tufts.edu

Келлер Илья Эрнстович, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** kie@icmm.ru

Клочков Михаил Юрьевич, Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, **e-mail:** m.klo4koff@yandex.ru

Клочков Юрий Васильевич, Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, **e-mail:** klotchkov@bk.ru

Князева Анна Георгиевна, Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, **e-mail:** anna-knyazeva@mail.ru

Конон Павел Николаевич, Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, **e-mail**: kononpn@mail.ru

Костиков Сергей Александрович, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, ХФИЦ ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, **e-mail:** 300gloof@mail.ru

Коянкин Александр Александрович, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** akoyankin@sfu-kras.ru

Красняков Иван Васильевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** krasnyakov_ivan@mail.ru

Кузнецова Юлия Леонидовна, Институт механики сплошных сред, УрО РАН, Пермь, **e-mail:** julyas@icmm.ru

Кукушкин Алексей Александрович, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** akukushkin@sfu-kras.ru

Кучинский Михаил Олегович, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** kuchinskiy@icmm.ru

Кучунова Елена Владимировна, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, Красноярск,
e-mail: HKuchunova@sfu-kras.ru

Лавринова Лидия Николаевна, Институт оптики атмосферы имени В. Е. Зуева СО РАН, Томск **e-mail:** lnl@iao.ru

Лавринов Виталий Валериевич, Институт оптики атмосферы имени В. Е. Зуева СО РАН, Томск **e-mail:** lvv@iao.ru

Лазарев Нюргун Петрович, Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, Якутск, **e-mail:** nyurgunlazarev@yandex.ru

Ласковец Екатерина Валерьевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** katerezanova@mail.ru

Лемешкова Елена Николаевна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** elena_cher@mail.ru

Лисенкова Елена Евгеньевна, Центр машиноведения ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова – Грехова РАН», Нижний Новгород, **e-mail:** e.lisenkova@ipfran.ru

Литвинов Дмитрий Анатольевич, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, **e-mail:** d77013378@yandex.ru

Литвинов Владислав Львович, Самарский государственный технический университет, Самара, **e-mail:** vladlitvinov@rambler.ru

Литвинова Кристина Владиславовна, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, **e-mail:** kristinalitvinova900@rambler.ru

Луценко Николай Анатольевич, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, **e-mail:** nickl@inbox.ru

Любимова Александра Алексеевна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** sashal05@mail.ru

Любимова Татьяна Петровна, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** lyubimovat@mail.ru

Лян Илья Павлович, Институт машиноведения имени А. А. Благонравова РАН, Москва, **e-mail:** LyanIlyaIMASH@yandex.ru

Магденко Евгений Петрович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** magdenko_evgeniy@icm.krasn.ru

Маньков Дмитрий Константинович, Московский государственный строительный университет (НИУ), Москва, **e-mail:** dmitrymanckov03@gmail.com

Марков Анатолий Михайлович, Технологический институт Монтеррея, Монтеррей, Мексика

Мезенцева Александра Максимовна, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, **e-mail:** mez.sasha60@gmail.com

Минаков Андрей Викторович, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** tov-andrey@yandex.ru

Михеев Евгений Викторович, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, **e-mail:** mchave21@outlook.com

Мотыгин Олег Валерьевич, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, **e-mail:** mov@ipme.ru

Найденова Кристина Евгеньевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** kristina-akulova00@mail.ru

Нарыгин Эдуард Игоревич, Тюменский государственный университет, Тюмень, **e-mail:** e.i.narygin@yandex.ru

Наседкин Андрей Викторович, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, **e-mail:** avnasedkin@sfedu.ru

Наседкина Анна Андреевна, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, **e-mail:** aanasedkina@sfedu.ru

Невоструев Глеб Александрович, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, Красноярск,
e-mail: bazhenovsnyteck@yandex.ru

Некрасов Олег Олегович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, **e-mail:** dakeln2@gmail.com

Никитин Александр Дмитриевич, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша, Москва, **e-mail:** nikitin_alex@bk.ru

Никитин Илья Степанович, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша, Москва, **e-mail:** i_nikitin@list.ru

Николаев Анатолий Петрович, Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, **e-mail:** anpetr40@yandex.ru

Очиров Артем Александрович, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** otchirov@mail.ru

Павлецов Денис Артемович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** qazvaaz@inbox.ru

Папин Александр Алексеевич, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** papin@math.asu.ru

Парфёнова Елена Сергеевна, Институт физики прочности и материаловедения имени В. Е. Панина СО РАН, Томск, **e-mail:** linasergg@mail.ru

Пашковский Дмитрий Максимович, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, **e-mail:** pashkovskydm@gmail.com

Пекарская Татьяна Андреевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** pekarskayat@yandex.ru

Перельмутер Михаил Натанович, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** perelm@ipmnet.ru

Петраков Игорь Евгеньевич, Институт вычислительного моделирования, Красноярск, **e-mail:** petrigr@icm.krasn.ru

Петров Игорь Борисович, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, **e-mail:** petrov@mipt.ru

Погосян Вардан Баландурович, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** vardan.pogosyn@yandex.ru

Пронина Юлия Григорьевна, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, **e-mail:** y.pronina@spbu.ru

Просвиряков Евгений Юрьевич, Уральский федеральный университет, Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, **e-mail:** evgen_pros@mail.ru

Пухначёв Владислав Васильевич, Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** pukhnachev@gmail.com

Пяткова Анна Владимировна, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, **e-mail:** annyakovenko@yandex.ru

Роменский Евгений Игоревич, Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** evrom@math.nsc.ru

Руженцев Иван Дмитриевич, Сибирский федеральный университет, Красноярск, e-mail: ruzhentsev03@mail.ru

Рыбкин Константин Анатольевич, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** k.rybkin@gmail.com

Рыбянец Андрей Николаевич, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, **e-mail:** anrybyanets@sfedu.ru

Рыжков Илья Игоревич, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** rii@icm.krasn.ru

Савельев Никита Андреевич, ФИЦ Красноярский научный центр СО РАН, Красноярск, **e-mail:** nikita.a.saveliev@gmail.com

Садовникова Анастасия Денисовна, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** anastasiiia3006@mail.ru

Садовская Оксана Викторовна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** o_sadov@icm.krasn.ru

Садовский Владимир Михайлович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** sadov@icm.krasn.ru

Садырин Евгений Валерьевич, Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, **e-mail:** esadyrin@donstu.ru

Салихова Нелли Камилевна, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, **e-mail:** salikhova@icmm.ru

Сбоев Иван Олегович, Акционерное общество «ОДК-Авиадвигатель», Пермь, **e-mail:** ivan-sboev@yandex.ru

Сибин Антон Николаевич, Новосибирский государственный университет, Новосибирск. **e-mail:** sibin_anton@mail.ru

Сибирякова Татьяна Андреевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** sibiriakova.tatiana@mail.ru

Сираев Рамиль Рифгатович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** romauld@mail.ru

Ситдиков Вакиль Хасанович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** sitdikovvakil652@gmail.com

Смолехо Ирина Владимировна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** i_smol@icm.krasn.ru

Смородин Борис Леонидович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, **e-mail:** bsmorodin@yandex.ru

Спевак Лев Фридрихович, Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова УрО РАН, Екатеринбург, **e-mail:** lfs@imach.uran.ru

Степанова Ирина Владимировна, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** stepiv@icm.krasn.ru

Татосов Алексей Викторович, Тюменский государственный университет, Тюмень, **e-mail:** a.v.tatosov@utmn.ru

Ташкинов Михаил Анатольевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** m.tashkinov@pstu.ru

Токарева Маргарита Андреевна, Алтайский государственный университет, Барнаул, **e-mail:** tma2505@gmail.com

Уточкин Владимир Юрьевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, **e-mail:** vyutochkin@pstu.ru

Фатьянов Алексей Геннадьевич, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** fat@nmsf.sscc.ru

Фёдорова Наталья Александровна, Сибирский федеральный университет, Красноярск, e-mail: feodorova.natalia@mail.ru

Фецов Сергей Сергеевич, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, **e-mail:** fetc95@mail.ru

Фрейдин Александр Борисович, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, **e-mail:** alexander.freidin@gmail.com

Фурцев Алексей Игоревич, Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, **e-mail:** al.furtsev@mail.ru

Харченко Иван Александрович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** harchenko@icm.krasn.ru

Хряпенко Ксения Дмитриевна, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, **e-mail:** vicarious024@mail.ru

Чашечкин Юлий Дмитриевич, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, **e-mail:** yulidch@gmail.com

Чепурнова Елена Константиновна, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, ХФИЦ ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, **e-mail:** el.chep@bk.ru

Чернышов Александр Данилович, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, **e-mail:** chernyshovad@mail.ru

Чехонин Константин Александрович, Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, **e-mail:** lex7861@rambler.ru

Шевченко Алексей Владимирович, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Москва, **e-mail:** alexshevchenko@phystech.su

Шефер Илья Александрович, Сибирский федеральный университет, Красноярск, **e-mail:** ishefer@sfu-kras.ru

Шишкин Игнат Владимирович, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, **e-mail:** ignat.shishkin@math.msu.ru

Шкадов Виктор Яковлевич, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, **e-mail:** vshkadov@yandex.ru

Шмидт Алексей Владимирович, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, **e-mail:** schmidt@icm.krasn.ru

Юргенсон Кирилл Сергеевич, Федеральный исследовательский центр КНЦ СО РАН, Красноярск, **e-mail:** kirill.yurgenson@mail.ru

Crepaldi Ferrari Rafael, ENSEEIHT, Toulouse INP, Toulouse, France,
e-mail: rafael.crepaldiferrari@etu.toulouse-inp.fr

Duguet Baptiste, ENSEEIHT, Toulouse INP, Toulouse, France,
e-mail: baptiste.duguet@etu.toulouse-inp.fr

Feumi Patrick Prince, ENSEEIHT, Toulouse INP, Toulouse, France,
e-mail: patrickprince.feumi@etu.toulouse-inp.fr

Kozlov Nikolai, IMFT, Toulouse INP, Toulouse, France,
e-mail: nicolai.kozlov@toulouse-inp.fr

Научное издание

Математическое моделирование в механике

Материалы докладов Всероссийской онлайн-конференции

Техническая подготовка, обработка материалов и научное редактирование:

В. Б. Бекежанова, И. В. Степанова

Компьютерная вёрстка:

Н. Ф. Ильина

Объём данных 33 Мб
Подписано к печати 20.09.2026

Размещено в открытом доступе
на сайте https://mdm2026.tilda.ws/#BookOfAbs
в разделе `Материалы докладов`

ISBN 978-5-6054684-5-5

9 785605 468455 >

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
660036, Красноярск, Академгородок, 50/44.